Esercizi sul calcolo vettoriale

I moduli di due vettori sono a = 8 m e b =3 m. Trovare i valori massimi e minimi del modulo del vettore risultante

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b}$$

Risultato:

Il valore massimo di $|\vec{R}|$ è 11 m e si ha quando $\vec{a}$ e $\vec{b}$ puntano nella stessa direzione orientata.

Il valore minimo di $|\vec{R}|$ è 5 m e si ha quando $\vec{a}$ è in verso opposto a $\vec{b}$.

Determinare il valore di x per cui si ha $\vec{a} = x\vec{b}$ nel caso in cui $\vec{a}$ e $\vec{b}$ siano paralleli o antiparalleli:

$$x = \pm \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$$

Trovare un vettore parallelo al vettore $\vec{u} = (1,3)$, di modulo 3.

$$\vec{v}=k\vec{u}\rightarrow|\vec{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{k^2(u_x^2+u_y^2)}\rightarrow\sqrt{k^2(1+9)}=3\rightarrow k=\sqrt{\frac{9}{10}}$$

Trovare un vettore parallelo a $\vec{w} = (1,-1,-2)$ di lunghezza 1.

$$\hat{v}=k\vec{w}\rightarrow|\hat{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{k^2(w_x^2+w_y^2+w_z^2)}\rightarrow\sqrt{k^2(1+1+4)}=1\rightarrow k=\sqrt{\frac{1}{6}}$$

Dati i vettori, $\vec{u} = (1,-2, 5)$, $\vec{v} = (2,3,1)$, $\vec{w} = (0,-2,3)$

calcolare la combinazione lineare: $\vec{s} = 3\vec{u}-2\vec{v}+5\vec{w}$.

$$\vec{s}=(3u_x-2v_x+5w_x)\hat{i}+(3u_y-2v_y+5w_y)\hat{j}+(3u_z-2v_z+5w_z)\hat{k}$$

$$\vec{s}=(3-4)\hat{i}+(-6-6-10)\hat{j}+(15-2+15)\hat{k}=(-1;-22;+28)$$

Siano a e b due vettori giacenti nel piano xy dati da:

$$\vec{a} = 2.0\,\hat{i} + 2.0\,\hat{j} \qquad \vec{b} = 2.0\,\hat{i} - 4.0\,\hat{j}$$

Calcolare il modulo e la direzione del vettore somma:

La somma è:

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} = (2.0 + 2.0)\,\hat{i} + (2.0 - 4.0)\,\hat{j} = 4.0\,\hat{i} - 2.0\,\hat{j}$$

Il modulo risulta:

$$R = |\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(4.0)^2 + (-2.0)^2} = \sqrt{20} = 4.5$$

Angolo del vettore somma con l'asse x

$$\phi = \arctan\frac{R_y}{R_x} = \arctan\left(\frac{-2.0}{4.0}\right) = 333.5\,° = -26.5\,°$$

Una particella effettua 3 spostamenti consecutivi dati da:

$$\vec{a}=(1.5\,\hat{i}+3.0\,\hat{j}-1.2\,\hat{k})\,cm$$

$$\vec{b}=(2.3\,\hat{i}-1.4\,\hat{j}-3.6\,\hat{k})\,cm \qquad \vec{c}=(-1.3\,\hat{i}+1.5\,\hat{j})\,cm$$

Calcolare modulo direzione e verso dello spostamento risultante

Lo spostamento risultante è: $\vec{R}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(2.5\,\hat{i}+3.1\,\hat{j}-4.8\,\hat{k})\,cm$

Il modulo del vettore somma risulta:

$$R=|\vec{R}|=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}=\sqrt{(2.5\,cm)^2+(-3.1\,cm)^2+(-4.8\,cm)^2}=6.2\,cm$$

$$\theta=\arccos\frac{R_z}{|\vec{R}|}=\arccos\frac{-4.8\,cm}{6.2\,cm}=39.2\,°$$

$$\phi=\arctan\frac{R_y}{R_x}=\arctan\frac{-3.1\,cm}{2.5\,cm}=-51\,°=309\,°$$

I vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ non sono collineari. Determinare per quali valori di x i vettori $\vec{c} = 2x\vec{a}+(3x+4)\vec{b}$ e $\vec{d} = 2\vec{a}+x\vec{b}$ sono collineari.

Affinché siano collineari deve verificarsi: $\vec{c} = y\vec{d}$

$$2x\vec{a}+(3x+4)\vec{b} = y(2\vec{a}+x\vec{b}) = 2y\vec{a}+xy\vec{b}$$

$$\downarrow$$

$$(2x-2y)\vec{a}+(3x+4-xy)\vec{b}=0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} 2x-2y=0 \\ 3x+4-xy=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-1 \end{cases}$$

Determinare se possibile i due numeri reali m ed n in modo che i vettori: $\vec{v}$ = (-5,3,1) e $\vec{w}$ = (2, 1-m, 3n) risultino paralleli.

Primo metodo: $\vec{v}=k\vec{w}\rightarrow(-5,3,1)=(2k,(1-m)k,3nk)$

per cui deve risultare verificato il seguente sistema :

$$\begin{cases}2k=-5\\(1-m)k=3\\3nk=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}k=-\dfrac{5}{2}\\m=1-\dfrac{3}{k}\\n=\dfrac{1}{3k}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}k=-\dfrac{5}{2}\\m=\dfrac{11}{5}\\n=-\dfrac{2}{15}\end{cases}$$

Determinare se possibile i due numeri reali m ed n in modo che i vettori:

$\vec{v}$ = (-5,3,1) e $\vec{w}$ = (2, 1-m, 3n) risultino paralleli.

Secondo metodo: $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -5 & 3 & 1 \\ 2 & 1-m & 3n \end{vmatrix} = (9n-1+m)\hat{i} + (2+15n)\hat{j} + (5m-11)\hat{k} = 0\,\hat{i} + 0\,\hat{j} + 0\,\hat{k}$$

$$n = \frac{-2}{15} \qquad m = \frac{11}{5}$$

Dati i vettori: $\vec{a}=2\,\hat{i}-\hat{j}-3\,\hat{k}$ $\quad\quad$ $\vec{b}=-2\,\hat{i}+2\,\hat{j}-\hat{k}$

calcolare: $(\vec{a}-3\,\vec{b})\times(-2\,\vec{a}+\vec{b})$

$$(\vec{a}-3\,\vec{b})=8\,\hat{i}-7\,\hat{j}$$

$$(-2\,\vec{a}+\vec{b})=-6\,\hat{i}+4\,\hat{j}+5\,\hat{k}$$

$$(\vec{a}-3\,\vec{b})\times(-2\,\vec{a}+\vec{b})=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 8 & 7 & 0\\ -6 & 4 & 5\end{vmatrix}=35\,\hat{i}-40\,\hat{j}+74\,\hat{k}$$

Determinare il numero reale k in modo che il vettore $\vec{v}$ = (m, 2-m, m-1) risulti complanare con i vettori $\vec{w}$ = (3, 2, 1) e $\vec{u}$ = (-1, 2, -1).

Se $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{u}$ sono complanari significa che il vettore $\vec{v}$ deve essere ortogonale al vettore $\vec{w}$ x $\vec{u}$:

$$\vec{w}\times\vec{u}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-4\,\hat{i}+2\,\hat{j}+8\,\hat{k}$$

$$\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})=v_x(\vec{w}\times\vec{u})_x+v_y(\vec{w}\times\vec{u})_y+v_z(\vec{w}\times\vec{u})_z=0$$

$$\downarrow$$

$$-4\,m+2\,(2-m)+8\,(m-1)=0\rightarrow 2\mathrm{k}-4=0\rightarrow k=2$$

Dati i due vettori $\vec{u} = (1, 0, -1)$ e $\vec{v} = (2, 4, 3)$;

1)Calcolarne il prodotto scalare e vettoriale .

2)Trovare l'angolo compreso tra i 2 vettori.

Soluzione 1)

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_x v_x+u_y v_y+u_z v_z=2-3=-1$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 4 & 3\end{vmatrix}=4\hat{i}-5\hat{j}+4\hat{k}\rightarrow\vec{u}\times\vec{v}=(4,-5,4)$$

Soluzione 2)

$$|\vec{u}|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{2^2+4^2+3^2}=\sqrt{29}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha\rightarrow\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{-1}{\sqrt{58}}\rightarrow\alpha=\arccos\frac{-1}{\sqrt{58}}=82.4\,°$$

Dati i due vettori $\vec{u} = (1, 0, -1)$ e $\vec{v} = (2, 4, 3)$;

1)Verificare se sono linearmente indipendenti o dipendenti .

2)Calcolarne il prodotto scalare e vettoriale .

3)Trovare il coseno dell'angolo compreso tra i 2 vettori.

Soluzione 3)

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{29}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{-1}{\sqrt{58}}$$