# PRODOTTO SCALARE e COSENO di un angolo

Il prodotto scalare tra due vettori è uno scalare dato dal prodotto dei moduli dei due vettori per il coseno dell'angolo compreso:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u\ v\ cos\alpha}$$

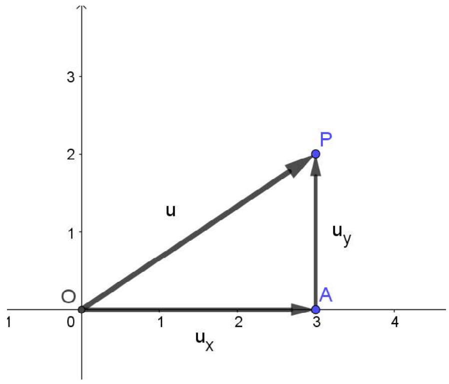
In fisica il prodotto scalare è usato quando si deve calcolare la proiezione di un vettore lungo una determinata componente.

Ad esempio, il lavoro di una forza è definito come: $L = \vec{F} \cdot \vec{s} = F\ s\ cos\alpha$

\- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

dalla definizione si ha: $\vec{v} \cdot \vec{v} = v\ v\ cos0 = v^2$

nel piano cartesiano un vettore si può scrivere come la somma delle sue componenti:



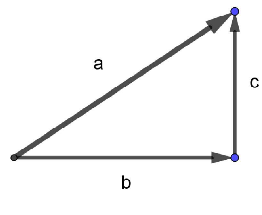

sia: $\vec{u} = \overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{u_y}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{v_y}$

si ha: $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y}$

infatti: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{u_y}\right) \cdot \left(\overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{v_y}\right) = \overrightarrow{u_x} \cdot \overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{u_x} \cdot \overrightarrow{v_y} + \overrightarrow{u_y} \cdot \overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{u_y} \cdot \overrightarrow{v_y}$

$= u_x v_x cos\ 0 \cancel{+ u_x v_y cos\ 90°} \cancel{+ u_y v_x cos\ 90°} + u_y v_y cos\ 0$

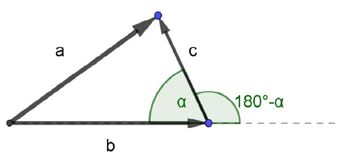
da quanto detto si potrebbe ricavare una ennesima dimostrazione del Teorema di Pitagora, vettorializzando un triangolo rettangolo, ad esempio, si ha:




$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$

$a^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = \left(\vec{b} + \vec{c}\right) \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c}$

$= bb\ cos\ 0 \cancel{+ bc cos\ 90°} \cancel{+ cb cos\ 90°} + cc\ cos\ 0 = b^2 + c^2$ → $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$



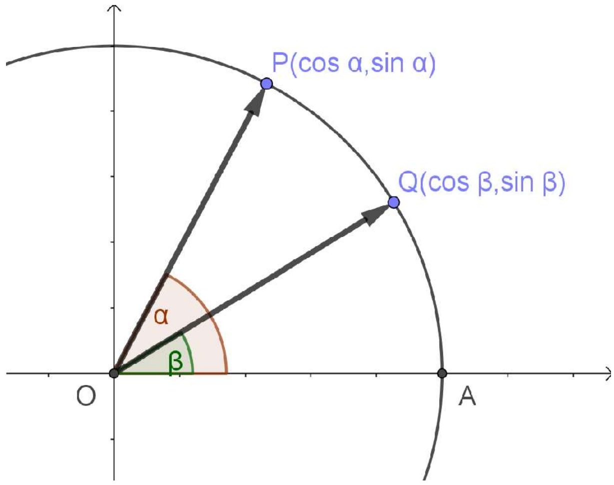

Anche vettorializzando un triangolo generico, si ha una ennesima dimostrazione del Teorema del coseno di Carnot (detto anche teorema di Pitagora generalizzato):

$a^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = \left(\vec{b} + \vec{c}\right) \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c}$

$= bb\ cos\ 0 + bc\ cos(180 - \alpha) + cb\ cos(180 - \alpha) + cc\ cos\ 0$

$= b^2 + 2bc\ cos\ (180° - \alpha) + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ \alpha$ → $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ \alpha}$

Mediante il prodotto scalare si può ottenere una dimostrazione della formula di sottrazione del coseno:




si calcoli il prodotto scalare tra i vettori OP e OQ mediante la definizione:

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 1 \cdot 1 \cdot cos(\alpha - \beta)$$

e mediante le coordinate cartesiane dei due vettori

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = cos\alpha \; cos\beta + sin\alpha \; sin\beta$$

I due risultati devono coincidere, da cui la formula di sottrazione del coseno:

$$\boxed{cos(\alpha - \beta) = cos\alpha \; cos\beta + sin\alpha \; sin\beta}$$

\- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Allo stesso modo anche l'angolo tra due vettori qualsiasi $\vec{u} = \overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{u_y}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{v_x} + \overrightarrow{v_y}$ si può calcolare dal prodotto scalare essendo: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y = |u| \, |v| \; cos\alpha$

Segue:

$$\boxed{cos \; \alpha = \frac{u_x v_x + u_y v_y}{|u| \, |v|}}$$

\- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

E quindi si può ricavare anche la condizione di perpendicolarità tra due vettori

$$\boxed{u_x v_x + u_y v_y = 0}$$

Infatti se i due vettori sono perpendicolari, il coseno dell'angolo retto è nullo e quindi il prodotto scalare è nullo

\- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -