IL NUMERO *e*

Approssimazione del numero: $e = 2.7\,1828\,1828\,4590....$

Il numero ***e*** è conosciuto anche come numero di **Eulero** (CH, 1707-1783) o come numero di **Nepero** (UK, 1550-1617) che lo individuò per la prima volta utilizzandolo come base dei suoi logaritmi, i logaritmi naturali o neperiani

Eulero dimostrò nel 1737 che ***e*** è un numero **irrazionale** (ossia non può essere scritto come una frazione a/b con a e b interi e b≠0 ed il suo valore esatto non può essere espresso mediante un numero finito di cifre decimali o con illimitate cifre decimali periodiche)

Hermite dimostrò nel 1873 che ***e*** è un numero **trascendente** (ossia non esiste un'equazione algebrica a coefficienti razionali che lo ammetta come soluzione)

Jakob **Bernoulli** (CH, 1654-1705) "scoprì" la costante ***e*** studiando problemi di "**capitalizzazione semplice**" e di "**capitalizzazione continua**" di seguito schematizzati e semplificati:

Si ha la **capitalizzazione semplice** quando un capitale (ma si potrebbe utilizzare qualsiasi altro esempio di accrescimento naturale) produce un interesse, sempre lo stesso, per intervalli di tempo uguali e l'interesse maturato viene accantonato e quindi non produce altro interesse, perciò il valore complessivo capitale più interesse, detto "*montante*", cresce linearmente di quantità uguali in tempi uguali; consideriamo il caso che al tempo t=0 il capitale di partenza sia 1 e che al tempo t=1 il montante sia 2.

Procedendo per gradi, si potrebbe ora, più convenientemente, ipotizzare che gli interessi vengano aggiunti al capitale, se non istantaneamente alla fine di periodi fissi, ad esempio alla metà del tempo.

Ipotizziamo quindi che al tempo t=0 il capitale di partenza sia 1 e che ora gli interessi spettanti vengano calcolati al tempo t=1/2

$$capitale = 1$$
$$interesse = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$------------$$
$$montante = 1 + \frac{1}{2}$$

Dunque alla fine del tempo, per t=1 si avrà:

$$capitale = 1 + \frac{1}{2}$$
$$interesse = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$$
$$------------$$
$$montante = 1 + \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \cong 2,25$$

Quindi alla fine del periodo il montante sarà 2,25 e non solo 2 come nella capitalizzazione semplice.

Ipotizziamo ora che gli interessi vengano aggiunti al capitale non 2 , ma 3 volte; al tempo t=1/3 si avrà:

$$
\begin{aligned}
&capitale = 1 \\
&interesse = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\
&------------ \\
&montante = 1 + \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Poi al tempo t=2/3 si avrà:

$$
\begin{aligned}
&capitale = 1 + \frac{1}{3} \\
&interesse = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} \\
&------------ \\
&montante = 1 + \frac{1}{3} + \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2
\end{aligned}
$$

Infine al tempo t=1 si avrà:

$$
\begin{aligned}
&capitale = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 \\
&interesse = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \\
&------------ \\
&montante = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 \cong 2,37
\end{aligned}
$$

Quindi alla fine del periodo il montante sarà 2,37 e quindi sempre più conveniente.

Se gli interessi vengono aggiunti al capitale non 2 o 3 volte , ma n-volte, si avrà una "**capitalizzazione continua**" e il montante finale sarà $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, reiterando si ottiene la definizione del numero ***e***:

$$
\boxed{e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}
$$

(estratto da: Bruno De Finetti, Le scienze n.39 del 1971)

Il numero ***e*** descrive fenomeni che, come nella capitalizzazione continua, nello sviluppo di una popolazione, nella disintegrazione di una sostanza radioattiva, avvengono con crescita pari alla quantità, in termini matematici hanno la derivata pari alla funzione,

y(x)=e^x è l'unica funzione uguale alla sua derivata:

$$De^x = e^x$$

La primitiva della iperbole: $y = \frac{1}{x}$ è la funzione: $y' = ln(x)$ si ha inoltre:

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = \left[ln(x)\right]_1^e = ln(e) - ln(1) = 1$$

In cui si evidenzia che l'area del trapezoide sotto un ramo di iperbole è strettamente legato al numero ***e***, si veda anche la costruzione: https://www.geogebra.org/m/FB89pmC7 tale area, in termodinamica, rappresenta il lavoro compito dal sistema durante una trasformazione isoterma.

Newton (UK, 1642-1727) nel 1665 scopri che:

$$\boxed{e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}}$$

Si può dimostrare sviluppando la n-esima potenza con il binomio di Newton:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)\cancel{(n-k)!}}{\cancel{(n-k)!}k!} \cdot \frac{1}{n^k} =$$

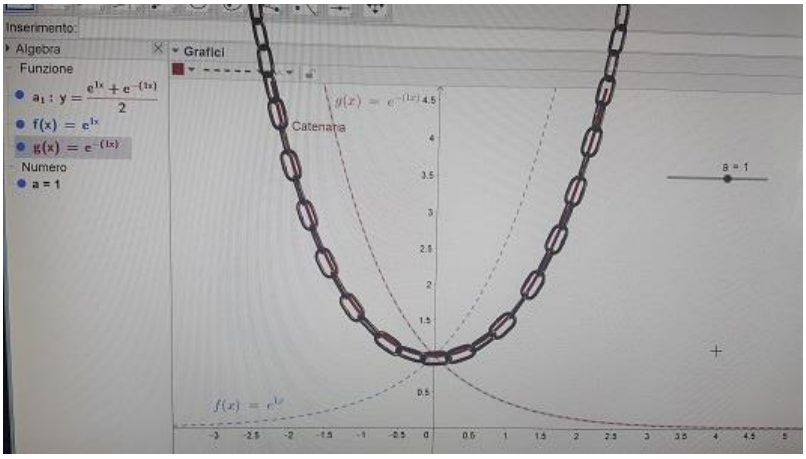
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n \cdot n \cdots\cdots\cdots n} \cdot \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdot \dots \frac{(n-k+1)}{n} \cdot \frac{1}{k!} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{k!} =$$

e passando al limite per n che tende all'infinito:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

La funzione $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ è detta "**catenaria**" e descrive la forma di una catena appesa a due estremi alla stessa altezza dal suolo, dunque in qualche modo il numero ***e*** è legato anche alla forza di gravità. Il problema della catenaria era stato studiato anche da Leonardo da Vinci che aveva disegnato alcuni schizzi di catene sui suoi taccuini e prima di essere risolto fu affrontato anche da Galileo che ipotizzò avesse una forma parabolica, da Leibnitz e da Huygens (che risolse il problema in un modo più astruso) infine il problema fu risolto da Johann Bernoulli per mezzo di una equazione differenziale.



La funzione $y = cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ è detta coseno iperbolico di x ed insieme alla funzione $senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ permette di definire, come si fa per le funzioni circolari, una famiglia di funzioni e un insieme di relazioni a partire da esse. Coseno e seno iperbolico rappresentano, analogamente alle corrispondenti funzioni circolari, l'ascissa e l'ordinata di un punto P sulla iperbole equilatera unitaria di equazione $x^2 - y^2 = 1$

https://www.geogebra.org/m/jsu936dC

Le Formule di Eulero mettono in relazione ***e***, l'unità immaginaria ***i*** e le funzioni goniometriche:

$$e^{\boldsymbol{i}\, x} = cos\ x + \boldsymbol{i}\ sin\ x$$

Questa formula dà origine all'identità di Eulero, considerata tra le più affascinanti del mondo della matematica, che mette in relazione oltre al numero uno e al numero zero i tre numeri trascendenti più interessanti della matematica:

$$e^{\boldsymbol{i}\,\pi} + 1 = 0$$

In conclusione la onnipresente costante ***e*** risulta legata a problemi di accrescimento, ai logaritmi, al numero **π**, quindi alle circonferenze e alle funzioni goniometriche, alle iperboli e alle funzioni iperboliche, alla unità immaginaria ***i***, allo sviluppo della potenza di un binomio, ai numeri fattoriali, ai concetti di limite, di derivata e di integrale e perfino alla forza di gravità e al lavoro di una trasformazione isoterma e molte altre cose… in pratica a quasi tutte le idee essenziali della matematica e non basterebbero interi libri a scrivere su di essa.