SERIE NOTEVOLI

1. le SERIE aritmetiche:

sono serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ in cui: $a_{n+1} = a_n + d$, ovvero la differenza tra due termini consecutivi è sempre la ragione d, le somme parziali valgono $\boxed{S_n = na_1 + d\frac{n(n-1)}{2}}$

OGNI serie aritmetica è divergente infatti:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left[na_1 + d\frac{n(n-1)}{2}\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{2na_1 + dn^2 - nd}{2}\right] = \pm\infty$$ secondo il segno di d

es.1: $\sum_{k=0}^{\infty} k$ diverge (d=1)   es.2: $\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)$ diverge (d=2)

2. le SERIE geometriche

sono serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ in cui: $a_{n+1} = a_n \cdot q$, ovvero il rapporto tra due termini consecutivi è sempre la ragione q, le somme parziali valgono $\boxed{S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}}$ se q≠1

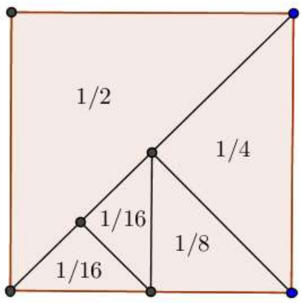
quindi le serie geometriche:

convergono se $|q|<1$ cioè se $-1<q<1$ infatti: $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$

divergono se $q \geq 1$ infatti $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \infty$

sono indeterminate o non regolari se $q \leq -1$

esempi:



$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ serie geom. $a_1 = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2} < 1$ converge a $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$

(cfr. il tramezzino infinito o il paradosso dello stadio)

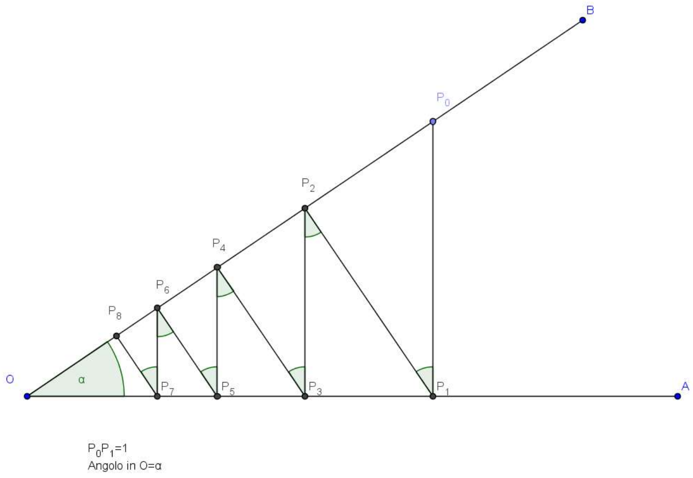
$\sum_{k=0}^{\infty} \pi^k$ serie geom. di ragione $q = \pi > 1$ diverge

$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k$ serie geom. $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{4} < 1$ converge a $S = 1 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$

(cfr. quadratura della parabola di Archimede)

$\sum_{k=0}^{\infty} cos^k \alpha$ serie geom. $a_1 = 1$ e di ragione

$q = cos\,\alpha < 1$ converge a $S = 1 \cdot \frac{1}{1 - cos\,\alpha}$



Infatti la lunghezza della spezzata è
$P_0P_1+P_1P_2+P_2P_3\ldots$ con $\alpha<90°$
Applicando
$P_0P_1=1$
$P_1P_2=1*\cos\,\alpha$
$P_2P_3=(1*\cos\,\alpha)*\cos\,\alpha$
...

ACHILLE e la TARTARUGA

Achille, alla velocità costante v_A, impiega un tempo t_1 per percorrere lo spazio L_1, nel frattempo la tartaruga, alla velocità costante v_T percorre lo spazio L_2.
Achille impiega un tempo t_2 per percorrere lo spazio L_2, nel frattempo la tartaruga percorre lo spazio L_3 e così via all'infinito, ma non in infinito tempo...
Achille impiegherà dunque un tempo totale $T=t_1+t_2+t_3+\ldots+t_n+\ldots$ per raggiungere la tartaruga:

$t_1 = \frac{L_1}{v_A}$ nel frattempo la tartaruga avanza di: $L_2 = v_T t_1 = v_T \frac{L_1}{v_A} = L_1 \frac{v_T}{v_A}$

$t_2 = \frac{L_2}{v_A} = \frac{L_1}{v_A} \cdot \frac{v_T}{v_A} = \frac{L_1}{v_A} \cdot \left(\frac{v_T}{v_A}\right)$ nel frattempo la tartaruga avanza di: $L_3 = v_T t_2 = v_T \frac{L_1}{v_A} \cdot \left(\frac{v_T}{v_A}\right) = L_1 \cdot \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^2$

$t_3 = \frac{L_3}{v_A} = \frac{L_1}{v_A} \cdot \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^2$ nel frattempo la tartaruga avanza di: $L_4 = v_T t_3 = v_T \frac{L_1}{v_A} \cdot \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^2 = L_1 \cdot \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^3$

...

$t_n = \frac{L_n}{v_A} = \frac{L_1}{v_A} \cdot \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^{n-1}$ nel frattempo la tartaruga avanza di:...

Quindi il tempo totale sarà:

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_n + \ldots =$$

$$T = \frac{L_1}{v_A} + \frac{L_1}{v_A} \cdot \left(\frac{v_T}{v_A}\right) + \frac{L_1}{v_A} \cdot \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^2 + \ldots + \frac{L_1}{v_A} \cdot \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^{n-1} + \ldots$$

$$T = \frac{L_1}{v_A} \cdot \left[1 + \left(\frac{v_T}{v_A}\right) + \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^{n-1} + \ldots\right]$$ è una serie geometrica convergente(ragione $v_T/v_A<1$)

$T = \frac{L_1}{v_A} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{v_T}{v_A}\right)^k = \frac{L_1}{v_A} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v_T}{v_A}}$ ad esempio, se $L_1 = 100m$, $v_A = 10m/s$, $v_T = 0,01m/s$

$T = \frac{100m}{10m/s} \cdot \frac{1}{1 - \frac{0,01}{10}} = 10s \cdot 1,\overline{001} = 10,01001\ldots s$ ovvero poco più di 10s

----

SERIE GEOMETRICHE di ragione variabile, occorre stabilire per quali valori si ha la convergenza:

$\sum_{k=0}^{\infty}(-x)^{3k}$ serie geom. di ragione $q=-x^3$ converge a $\frac{1}{1+x^3}$ se $\left|-x^3\right|<1$ cioè se $|x|<1$

$\sum_{k=0}^{\infty}(5x)^{k}$ serie geom. di ragione $q=5x$ converge a $\frac{1}{1-5x}$ se $|5x|<1$ cioè se $-\frac{1}{5}<x<\frac{1}{5}$

$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1-x}{3+x}\right)^{k}$ serie geom. di ragione $q=\frac{1-x}{3+x}$ converge a $\frac{3+x}{2+2x}$ se $\left|\frac{1-x}{3+x}\right|<1$ cioè se $x>-1$

3. la SERIE armonica

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ la serie armonica diverge anche se $\lim_{n\to+\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$

si può dimostrare la sua divergenza con una maggiorazione:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\ldots..+\frac{1}{16}+\ldots.>$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots..+\frac{1}{16}+\ldots.>$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots.$$ che è una somma divergente

La sua divergenza è comunque MOLTO lenta: $\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k}\cong 5{,}18$; $\sum_{k=1}^{10.000}\frac{1}{k}\cong 9{,}78$; $\sum_{k=1}^{1.000.000}\frac{1}{k}\cong 14{,}39\ldots$

----

oppure si può dimostrare la sua divergenza con il criterio di CAUCHY scegliendo p=n

$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$ non può essere piccola a piacere

4. la SERIE armonica a segni alterni

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots$$ converge per il criterio di LEIBNIZ

1. È una serie a termini di segno alterno
2. Il termine generico è infinitesimo $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)n-1}{n}=0$

5. la SERIE armonia generalizzata

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}=1\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\frac{1}{4^{\alpha}}+\ldots$ converge se $\alpha>1$ diverge se $\alpha\le 1$

$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$ serie armonica generalizzata con α=2>1 è convergente (non dimostrata)

6. le SERIE di Mengoli

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots.+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\ldots.$$

Il termine n-esimo può essere scritto come:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}-\frac{B}{n+1}=\frac{A(n+1)-Bn}{n(n+1)}=\frac{nA+A-Bn}{n(n+1)}=\frac{n(A-B)+A}{n(n+1)}\rightarrow\begin{cases}A-B=0\\A=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}A=1\\B=1\end{cases}$$

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

In questo caso si possono calcolare le somme parziali:

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\ldots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

e quindi la somma della serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=S=\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

7. le SERIE telescopiche

Sono serie che, come la serie di Mengoli, permettono di calcolare la somma parziale, potendo scrivere i suoi termini nella forma:

$a_1=b_1-b_2$

$a_2=b_2-b_3$

...

$a_k=b_k-b_{k+1}$ per cui risulta

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=(b_1-\cancel{b_2})+(\cancel{b_2}-\cancel{b_3})+(\cancel{b_3}-b_4)+\ldots+(\cancel{b_k}-b_{k+1})=b_1-b_{k+1}$$

E quindi $S_n=\lim_{k\to+\infty}S_k=\lim_{k\to+\infty}(b_1-b_{k+1})=b_1-\lim_{k\to+\infty}b_{k+1}$

ad es.:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2+8k+3}$$

Il termine n-esimo può essere scritto come:

$$\frac{1}{4n^2+8n+3} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{A}{2n+1} - \frac{B}{2n+3} = \frac{A(2n+3)-B(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2nA+3A-2nB-B}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{2n(A-B)+3A-B}{(2n+1)(2n+3)} \rightarrow \begin{cases} A-B=0 \\ 3A-b=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=1/2 \\ B=1/2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\frac{1}{4n^2+8n+3} = \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+3)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right]$$

In questo caso si possono calcolare le somme parziali:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{7}}\right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{2n+1}} - \frac{1}{2n+3}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2n+3}\right]$$

e quindi la somma della serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2+8k+3} = S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

8. altre SERIE notevoli

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$$

può dimostrare sviluppando la n-esima potenza con il binomio di Newton:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)\cancel{(n-k)!}}{\cancel{(n-k)!}k!} \cdot \frac{1}{n^k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n \cdot n \cdots\cdots\cdots n} \cdot \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdot \ldots \frac{(n-k+1)}{n} \cdot \frac{1}{k!} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \left(1-\frac{k-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{k!} =$$

e passando al limite per n che tende all'infinito:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \left(1-\frac{k-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$