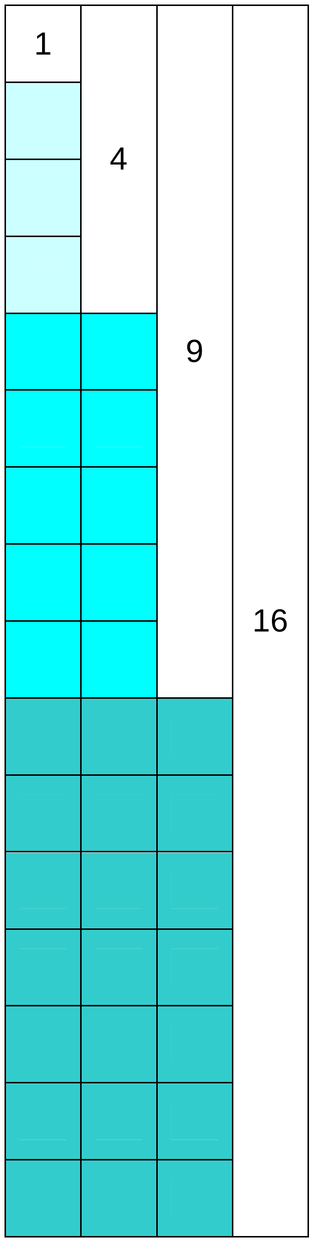
La somma dei primi n quadrati perfetti

chiamo x la somma dei primi n quadrati perfetti che ancora non so calcolare

X=$1^2+2^2+3^2+....+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2$

Posso rappresentare ciascuno dei numeri di questa somma parziale mediante rettangoli di base 1, 2, 3, 4,… e altezza 1^2,2^2,3^2,4^2,….; affiancandoli come in figura ottengo un rettangolo di base n e altezza n^2, (la cui area totale vale n^3) che potrei utilizzare per calcolare la somma parziale cercata calcolando il valore della somma delle aree azzurre.



Ciascuna delle aree azzurre è data dal prodotto della base per l'altezza, le scrivo in una tabella per vedere se posso trovarne una legge che le lega al crescere di n:

n	base	altezza
1	0	1
2	1	3
3	2	5
4	3	7
…	…	…
n	n-1	2n-1

deduco che in generale la singola area azzurra vale

(n-1)(2n-1)= $2n^2-3n+1$

Allora posso scrivere: $n\cdot n^2=x+somma\,delle\,aree\,azzurre$

$n^3=x+\sum_{k=1}^{n}\left(2k^2-3k+1\right)$ per la proprietà distributiva della somma si ha:

$n^3=x+2\sum_{k=1}^{n}k^2-3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$ da cui (essendo la prima somma parziale il doppio dell'area cercata, la seconda somma parziale il triplo della nota formula del piccolo Gauss e la terza somma parziale elementare)

$n^3=x+2x-3\frac{n(n+1)}{2}+n$ eseguendo alcuni passaggi algebrici si ottiene

$x=\frac{n^3}{3}+\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n}{3}$ e infine sommando e fattorizzando si ottiene la formula cercata:

$$x=1^2+2^2+3^2+....+n^2 \quad = \quad \boxed{\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$