Trasformazioni nel piano

1.SIMMETRIA CENTRALE rispetto al punto $C(x_0;y_0)$:è la corrispondenza biunivoca tra punti del piano che associa ad ogni punto $P(x;y)$ il punto $P'(x';y')$ tale che C sia punto medio del segmento PP'

La simmetria centrale è una isometria

Formule analitiche:

$$Sc:\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$$

Determinare l'eventuale centro di simmetria di una curva γ: f(x,y)=0:

detto $C(x_0;y_0)$ ***l'eventuale*** *centro di simmetria,*

se $P(\overline{x};\overline{y}) \in \gamma$ *allora anche il suo simmetrico* $P(2x_0 - \overline{x}; 2y_0 - \overline{y}) \in \gamma$

In simboli: $f(\overline{x};\overline{y}) = 0 \;\Rightarrow\; f(2x_0 - \overline{x}; 2y_0 - \overline{y}) = 0$ *sviluppando i calcoli si ottiene un sistema da cui ricavare* x_0 *e* y_0*.*

2.SIMMETRIA ASSIALE rispetto alla retta r:è la corrispondenza biunivoca tra punti del piano che associa ad ogni punto $P(x;y)$ il punto $P'(x';y')$ tale che r sia asse del segmento PP'

La simmetria assiale è una isometria

Formule analitiche nel caso r sia la retta orizzontale $y=y_0$*:*

$$Sr:\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$$

Formule analitiche nel caso r sia la retta verticale $x=x_0$*:*

$$Sr:\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = y \end{cases}$$

Formule analitiche nel caso r sia la retta bisettrice del I e III quadrante y=x:

$$Sr:\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

Formule analitiche nel caso r sia la retta bisettrice del II e IV quadrante y=-x:

$$Sr:\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$$

3.AFFINITÀ: è la corrispondenza biunivoca tra punti del piano che trasforma rette in rette, rette parallele in rette parallele, le coniche in coniche (ellissi in ellissi ecc…), triangoli di Area A in triangoli di Area $A' = A \cdot |\det A|$

Formule analitiche:

$$T:\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases}$$

In cui la matrice dei coefficienti $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *ha determinante* $\det A = ad - cb \neq 0$

Gli eventuali punti uniti della trasformazione si ottengono ponendo $x' = x$ *e* $y' = y$ *e risolvendo il sistema che ne deriva.*

5.TRASLAZIONE di VETTORE: è la corrispondenza biunivoca tra punti del piano che associa ogni punto $P(x;y)$ il punto $P'(x';y')$ tale che $\overrightarrow{PP'}=\vec{v}$

La traslazione è una isometria

Formule analitiche:

$$\tau_{\vec{v}}:\begin{cases} x'=x+p \\ y'=y+q \end{cases}$$

6.ROTAZIONE: dato un centro O e un angolo θ, è la corrispondenza biunivoca tra punti del piano che associa ogni punto O il punto O stesso e ad ogni punto $P(x;y)$ il punto $P'(x';y')$ tale che $\overline{OP}=\overline{OP'}$ e $\widehat{POP'}=\vartheta \ \ (mod\ 2\pi)$

La rotazione è una isometria

Formule analitiche:

$$\rho_{O,\vartheta}:\begin{cases} x'=x\cdot cos\ \vartheta - y\cdot sen\ \vartheta \\ y'=x\cdot sen\ \vartheta + y\cdot cos\ \vartheta \end{cases}$$

$$det A=\begin{vmatrix} cos\ \vartheta & -sen\ \vartheta \\ sen\ \vartheta & cos\ \vartheta \end{vmatrix}=cos^2\vartheta+sen^2\vartheta=1$$

Trasformazione inversa:

$$\rho^{-1}{}_{O,\vartheta}=\rho_{O,-\vartheta}:\begin{cases} x=x'\cdot cos\ \vartheta + y'\cdot sen\ \vartheta \\ y=-x'\cdot sen\ \vartheta + y'\cdot cos\ \vartheta \end{cases}$$

Per ottenere la trasformazione inversa senza eseguire calcoli basta ricordare le formule sugli archi associati: $cos\,\vartheta = cos(-\vartheta)$ *e* $sen\,\vartheta=-sen(-\vartheta)$

ISOMETRIA: ogni affinità tra punti del piano che conservi le distanze

Nelle isometrie si ha: $det A=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-cb=\pm 1$ *(non è detto il viceversa: ossia se detA=1 potrebbe non essere isometria)*