# IN SINTESI
# Equazioni differenziali

## Equazioni differenziali del primo ordine

- **Equazione differenziale del primo ordine**: è riconducibile alla forma $F(x; y; y') = 0$.
- **Integrale generale**: è una famiglia di funzioni $f(x; c)$ con $c$ parametro reale.
- **Integrale particolare**: ogni soluzione ottenuta attribuendo a $c$ un valore.
- **Problema di Cauchy**: data l'equazione del primo ordine $F(x; y; y') = 0$, consiste nella ricerca di una soluzione particolare $y = f(x)$ il cui grafico passi per un punto dato $(x_0; y_0)$, cioè che risolva il sistema:

$$\begin{cases} F(x; y; y') = 0 \\ y_0 = f(x_0) \qquad \textbf{condizione iniziale.} \end{cases}$$

- **Equazione del tipo $y' = f(x)$**
  1. Si isola $y'$ e si integrano entrambi i membri rispetto alla variabile $x$: $\int y'\,dx = \int f(x)\,dx$.
  2. La soluzione generale è $y = \int f(x)\,dx$.

- **Equazione a variabili separabili: $y' = g(x) \cdot h(y)$**, con $g(x)$ e $h(y)$ funzioni continue.
  1. Essendo $y' = \dfrac{dy}{dx}$, si ottiene $\dfrac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$.
  2. Si separano le variabili, supponendo $h(y) \neq 0$: $\dfrac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx$.
  3. Si integrano entrambi i membri, $\int \dfrac{1}{h(y)}\,dy = \int g(x)\,dx$, e si ricava $y$ in funzione di $x$.
  4. Si esaminano a parte i casi derivanti da $h(y) = 0$.

- **Equazione lineari del primo ordine: $y' = a(x) \cdot y + b(x)$**, dove $a(x)$ e $b(x)$ rappresentano funzioni note e continue in un opportuno intervallo.
  - **$b(x) = 0$ (equazione omogenea)**: la soluzione è $y = ke^{\int a(x)\,dx}$, con $k \in \mathbb{R}$.
  - **$b(x) \neq 0$ (equazione completa)**: la soluzione è $y = e^{\int a(x)\,dx}\left[\int b(x)\,e^{-\int a(x)\,dx}\,dx + c\right]$.

## Equazioni differenziali del secondo ordine

- **Equazioni lineari con coefficienti costanti omogenee: $y'' + by' + cy = 0$.**
  1. Si trovano le radici (reali o complesse) dell'equazione caratteristica $z^2 + bz + c = 0$.
  2. Si determina l'integrale generale dell'equazione differenziale secondo lo schema seguente.

| Radici dell'equazione caratteristica | | Integrale generale |
|---|---|---|
| $\Delta > 0 \rightarrow z_1 \neq z_2$ | (reali distinte) | $y = c_1 e^{z_1 x} + c_2 e^{z_2 x}$ |
| $\Delta = 0 \rightarrow z_1 = z_2$ | (reali coincidenti) | $y = (c_1 + c_2 x)\,e^{z_1 x}$ |
| $\Delta < 0 \rightarrow z_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ | (complesse coniugate) | $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$ |

- **Equazioni lineari con coefficienti costanti complete del tipo: $y'' = r(x)$.**
  Si determina direttamente la *soluzione generale* mediante due integrazioni successive.

Scanned by CamScanner