Disequazioni irrazionali

1. INDICE DISPARI, ad esempio n=3, operatore "<" (stessi calcoli per l'operatore ">")

ricordando la proprietà delle diseguaglianze: $a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$

Si ha che la disequazione: $\sqrt[3]{f(x)} < g(x)$ equivale alla disequazione: $f(x) < \left[g(x)\right]^3$

Esempio: $\sqrt[3]{x^3 - 2x} < x - 2$, elevando al cubo e due membri, si ha:

$$x^3 - 2x < (x-2)^3$$
$$x^3 - 2x < x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$
$$6x^2 - 14x + 8 < 0$$

$3x^2 - 7x + 4 < 0$ le radici dell'equazione sono: $x_1 = 1$ e $x_2 = 4/3$,

la disequazione è verificata per i valori interni: $1 < x < 4/3$

2. INDICE PARI, ad esempio n=2 **CASO a:** $\sqrt{f(x)} < g(x)$

Occorre imporre:

1. Le condizioni di esistenza del radicale $f(x) \geq 0$
2. Essendo il radicale NON negativo $g(x) > 0$ deve essere positivo
3. Con queste due condizioni, elevando al quadrato si ottiene $f(x) < \left[g(x)\right]^2$

Tale disequazione equivale al sistema: $\begin{cases} f(x) \geq 0 & C.E. \\ g(x) > 0 & c.d.s. \\ f(x) < \left[g(x)\right]^2 \end{cases}$

Esempio: $\sqrt{3x+1} < x + 7$, Tale disequazione equivale al sistema: $\begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ x+7 > 0 \\ 3x+1 < (x+7)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -1/3 \\ x > -7 \\ x^2 + 11x + 48 > 0 \end{cases}$

La terza disequazione è sempre verificata avendo $\Delta < 0$

la disequazione di partenza è verificata per $x \geq -1/3$

2. INDICE PARI, ad esempio n=2 **CASO b:** $\sqrt{f(x)} > g(x)$

Occorre imporre:

1. Le condizioni di esistenza del radicale $f(x) \geq 0$

2. se $g(x) < 0$ la disequazione è senz'altro verificata, quindi sono soluzioni della disequazione le soluzioni del sistema

$$\boxed{\begin{cases} f(x) \geq 0 & C.E. \\ g(x) < 0 & positivo > negativo \end{cases}}$$

3. se $g(x) \geq 0$ la disequazione è soddisfatta se $f(x) > [g(x)]^2$

quindi le soluzioni del sistema $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$ sono soluzioni della disequazione.

Osserviamo che la condizione $f(x) \geq 0$ è implicita nella terza disequazione, in quanto:

$f(x) > [g(x)]^2 \geq 0$, quindi in luogo dell'ultimo sistema, si può scrivere:

$$\boxed{\begin{cases} g(x) \geq 0 & c.d.s. \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}}$$

in conclusione, **<u>l'UNIONE</u>** delle soluzioni dei due sistemi dà l'insieme delle soluzioni della disequazione data.

Esempio: $\sqrt{4-x^2} > \frac{1}{2}x$

Le soluzioni della disequazione data si ottengono unendo le soluzioni dei due sistemi:

sistema 1 $\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ \frac{1}{2}x < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x < 0 \end{cases} \rightarrow -2 \leq x < 0$

Sistema 2 $\begin{cases} \frac{1}{2}x \geq 0 \\ 4-x^2 > \left(\frac{1}{2}x\right)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 < \frac{16}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -\frac{4}{\sqrt{5}} < x < \frac{4}{\sqrt{5}} \end{cases} \rightarrow 0 \leq x < \frac{4}{\sqrt{5}}$

la disequazione di partenza è verificata per $-2 \leq x < \frac{4}{\sqrt{5}}$ **<u>unione</u>** delle soluzioni dei due sistemi