

CALCOLO probabilità - "il sorteggio" e la formula di STIEFEL

In classe si sorteggiano 3 ragazzi da mandare "volontari" all'interrogazione tra 13 presenti.

1) in quanti modi diversi posso scegliere i 3 ragazzi da interrogare?

$$R1: n=13, k=3 \text{ ordine non rilevante, ripetizioni no } C_{13,3} = \binom{13}{3} = 286$$

2) Qual è la probabilità che io NON sia tra questi?

$$R2: P(\text{NON essere sorteggiato}) = \frac{n \text{ casi favorevoli}}{n \text{ casi possibili}} = \frac{\binom{12}{3}}{\binom{13}{3}} = \frac{220}{286} = \frac{10}{13} \cong 0,77 \cong 77\%$$

I casi favorevoli sono infatti tutti i modi di scegliere $k=3$ persone in un gruppo di $n=12$ persone (tutti tranne me!)

Come verifica si potrebbe calcolare la probabilità che io sia interrogato

$$R3: P(\text{essere sorteggiato}) = \frac{n \text{ casi favorevoli}}{n \text{ casi possibili}} = \frac{\binom{12}{2}}{\binom{13}{3}} = \frac{66}{286} = \frac{3}{13} \cong 0,23 \cong 23\%$$

I casi "favorevoli" in questo caso sono tutti i modi di scegliere $k=2$ persone (io, il terzo devo necessariamente essere tra questi) in un gruppo di $n=12$ persone (tutti gli altri tranne me!)

$$\text{Si verifica che } \binom{13}{3} = \binom{12}{2} + \binom{12}{3} = 66 + 220 = 286$$

infatti la somma dei casi favorevoli e NON favorevoli deve necessariamente essere uguale al numero di casi possibili. Tali numeri si trovano sul triangolo di Tartaglia in cui per costruzione un elemento è la somma dei due che si trovano vicini nella riga superiore

$$\begin{array}{l} \text{riga 12...} \quad \binom{12}{2} = 66 \qquad \qquad \qquad \binom{12}{3} = 220 \\ \text{riga 13...} \quad \qquad \qquad \binom{13}{3} = 286 \end{array}$$

In generale vale la formula di [STIEFEL](#): $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Dimostrazione formale della validità della formula di STIEFEL

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Step1: secondo la definizione scrivo i binomiali come fattoriali

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{(n-1)!}{(n-1-k+1)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!}$$

Step2: semplifico i fattoriali

(per non affollare le semplificazioni eseguo una semplificazione alla volta, si potrebbero svolgere tutte insieme)

$$\frac{n \cdot \cancel{(n-1)!}}{(n-k)!k!} = \frac{\cancel{(n-1)!}}{(n-1-k+1)!(k-1)!} + \frac{\cancel{(n-1)!}}{(n-k-1)!k!}$$

$$\frac{n}{(n-k)!k!} = \frac{1}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{1}{(n-k-1)!k!}$$

$$\frac{n}{(n-k) \cdot \cancel{(n-k-1)!}k!} = \frac{1}{(n-k) \cdot \cancel{(n-k-1)!} (k-1)!} + \frac{1}{\cancel{(n-k-1)!}k!}$$

$$\frac{n}{(n-k) \cdot k!} = \frac{1}{(n-k) \cdot (k-1)!} + \frac{1}{k!}$$

$$\frac{n}{(n-k) \cdot k \cdot \cancel{(k-1)!}} = \frac{1}{(n-k) \cdot \cancel{(k-1)!}} + \frac{1}{k \cdot \cancel{(k-1)!}}$$

Step3: passaggi algebrici

$$\frac{n}{(n-k) \cdot k} = \frac{1}{(n-k)} + \frac{1}{k}$$

$$\frac{n}{(n-k) \cdot k} = \frac{\cancel{n} \cdot \cancel{k}}{(n-k) \cdot k}$$

$$\frac{n}{(n-k) \cdot k} = \frac{n}{(n-k) \cdot k}$$