Numeri complessi

NUMERI COMPLESSI

$$\begin{array}{ll} i^0 = 1 & = i^4 = \dots \\ i^1 = i & = i^5 = \dots \\ i^2 = -1 & = i^6 \\ i^3 = -i & = i^7 \end{array}$$

$z = a + ib$

$\bar{z} = a - ib$

Modulo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Somma: $z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$

Differenza: $z_1 - z_2 = a_1 - a_2 + i(b_1 - b_2)$

Prodotto: $z_1 \cdot z_2 = a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 + i(b_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2)$

Segue che: $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

Quoziente: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1}{z_2} \cdot \dfrac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\dfrac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$

Coordinate polari nel piano

$P[\rho, \theta]$

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho\, sen\, \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\rho} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ sen\,\theta = \dfrac{y}{\rho} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

Rappresentazione trigonometrica o polare di numeri complessi

$z = \rho(\cos\theta + i\, sen\,\theta)$

$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\, sen\,(\theta_1 + \theta_2)\right]$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\, sen\,(\theta_1 - \theta_2)\right]$

$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\, sen\, n\theta)$ formula di DE MOIVRE (dim. con principio di induzione)

Esponenziali complessi

Definizione: $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\, sen\, y)$

Modulo dell'esponenziale complesso: $|e^z| = |e^{x+iy}| = e^x$

Una formula famosa: per $z = 0 + i\pi$ si ha l'esp. Comp. $e^{i\pi} = e^0(\cos\pi + i\, sen\,\pi)$ da cui $e^{i\pi} = -1$ oppure: $\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$

Riassumendo un numero complesso può essere rappresentato $\begin{cases} z = x + iy \\ z = \rho(\cos\theta + i\, sen\,\theta) \\ z = \rho \cdot e^{i\theta} \end{cases}$

Formule di EULERO: $\begin{cases} cos\ \theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ sen\ \theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$

Varie sui numeri complessi

- Un **paradosso** sui numeri complessi: $-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$ quindi $-1 = 1$

Oppure: $\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$ → $\sqrt{\dfrac{1}{-1}} = \sqrt{\dfrac{-1}{1}}$ → $\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \dfrac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}$ → $\sqrt{1} \cdot \sqrt{1} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$ quindi $1 = -1$

- Una **uguaglianza** inaspettata:

$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$ dimostrazione: dalla definizione $e^{i\frac{\pi}{2}} = i = e^{ln\, i}$ → $i\dfrac{\pi}{2} = ln\, i$ → $i \cdot i\dfrac{\pi}{2} = i \cdot ln\, i$ → $-\dfrac{\pi}{2} = ln\, i^i$ → $e^{-\frac{\pi}{2}} = i^i$

$\sqrt[i]{i} = e^{\frac{\pi}{2}}$ analogamente

- **Moltiplicare per i** un numero equivale ad una rotazione di 90° nel piano cartesiano (es. 1*i=….)
- **Moltiplicare per 2i** un numero equivale ad una rotazione di 90° più una traslazione nel piano cartesiano (es. 1*2i=….)
- **il prodotto di due numeri sulla circonferenza unitaria** è un numero sulla circonferenza unitaria (es. banale -1*i oppure $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot i$

Grafici in coordinate polari

$\theta = cost$ semiretta uscente da O

$\rho = cost$ circonferenza di centro l'origine

$\rho sen\ \theta = cost$ retta orizzontale

$\rho cos\ \theta = cost$ retta verticale

$\rho = a \cdot sen\ \theta$ circonferenza

$\rho = a \cdot cos\ \theta$ circonferenza

$\rho = \theta$ spirale

$\rho = \dfrac{d \cdot e}{1 \pm e \cdot cos\ \theta}$ conica (e=eccentricità; d=direttrice)

……