Numeri complessi

$\boldsymbol{i}^0 = 1$	$= \boldsymbol{i}^4 = \boldsymbol{i}^{-4}$....
$\boldsymbol{i}^1 = \boldsymbol{i}$	$= \boldsymbol{i}^5 = \boldsymbol{i}^{-3}$....
$\boldsymbol{i}^2 = -1$	$= \boldsymbol{i}^6 = \boldsymbol{i}^{-2}$
$\boldsymbol{i}^3 = -\boldsymbol{i}$	$= \boldsymbol{i}^7 = \boldsymbol{i}^{-1}$

NUMERO COMPLESSO: coppia ordinata (a;b) di numeri reali

In forma algebrica: $z = a + b\boldsymbol{i}$

Complesso coniugato: $\overline{z} = a - b\boldsymbol{i}$

Modulo: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Somma: $z_1 \pm z_2 = a_1 \pm a_2 + (b_1 \pm b_2)\boldsymbol{i}$

Prodotto: $z_1 \cdot z_2 = a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 + (b_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2)\boldsymbol{i}$

Segue che: $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$

Quoziente: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1}{z_2} \cdot \dfrac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \dfrac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\boldsymbol{i}$

- Moltiplicare per **i** un numero corrisponde a ruotare la sua posizione di 90° nel piano cartesiano (es. 1***i**=….)
- Moltiplicare per $\mathbf{i}^2$ un numero corrisponde a ruotare la sua posizione di 180° nel piano cartesiano (es. 1*$\mathbf{i}^2$=….)
- Moltiplicare per $\mathbf{i}^3$ un numero corrisponde a ruotare la sua posizione di 270° nel piano cartesiano (es. 1*$\mathbf{i}^3$=….)
- Moltiplicare per $\mathbf{i}^4$ un numero corrisponde a ruotare la sua posizione di 360° nel piano cartesiano (es. 1*$\mathbf{i}^4$=….)
- Moltiplicare per 2**i** un numero corrisponde a ruotare la sua posizione di 90° e a raddoppiare il suo modulo (es. 1*2**i**=….)

- **il prodotto di due numeri sulla circonferenza unitaria** è un numero sulla circonferenza unitaria (es. -1*i oppure $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot i$)

Coordinate polari nel piano

$P[r;\alpha]$

$$\begin{cases} x = r \cdot cos\ \alpha \\ y = r \cdot sen\ \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ tg\ \alpha = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Grafici in coordinate polari

	coordinate polari	coordinate cartesiane	esempio Geogebra
Punto	$P[r;\alpha]$	$\mathrm{P(x, y)}$	$\mathrm{P} = (1; \mathrm{pi}/3)$
Retta per l'origine	$tg\ \alpha = m$	$y = m\,x$	
Retta orizzontale	$r \cdot sen\ \alpha = k$	$y = k$	ρ=4/sin(θ)
Retta verticale	$r \cdot cos\ \alpha = h$	$x = h$	ρ=2/cos(θ) Curva[(2 / cos(θ); θ), θ, 0, 2π]
Retta d: distanza OH; θ angolo OH-asse x	$r \cdot cos\,(\vartheta - \alpha) = d$	$y = m\,x + q$	ρ=3/cos(5pi/6-θ)
circonferenza di centro O e raggio R	$r = R$	$x^2 + y^2 = R^2$	Curva[(2; θ), θ, 0, 2π]
circonferenza centro C(d/2,0) e diametro d	$r = d \cdot cos\ \alpha$	$x^2 + y^2 - d \cdot x = 0$	Curva[(4cos(θ); θ), θ, 0, 2π]
circonferenza centro C(0,d/2) y e diametro d	$r = d \cdot sen\ \alpha$	$x^2 + y^2 - d \cdot y = 0$	Curva[(3sin(θ); θ), θ, 0, 2π]
spirale di Archimede	$r = \alpha$	- - - - - - -	$\rho = \theta$
Cardioide	$r = R \cdot (1 + cos\ \alpha)$	- - - - - - -	ρ=3 (1 + cos(θ))
fiore a n petali	$r = sen\,(n \cdot \alpha)$	- - - - - - -	ρ=sin(5*θ)

Aggiornato il: 24 aprile 2017

forma trigonometrica di un numero complesso

$z = r(\cos\alpha + \boldsymbol{i}\,sen\,\alpha)$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\alpha_1+\alpha_2) + \boldsymbol{i}\,sen(\alpha_1+\alpha_2)\right]$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos(\alpha_1-\alpha_2) + \boldsymbol{i}\,sen(\alpha_1-\alpha_2)\right]$

$\boxed{z^n = r^n(\cos n\alpha + \boldsymbol{i}\,sen\,n\alpha)}$ **formula di DE MOIVRE**

$z^{-n} = \dfrac{1}{z^n} = \dfrac{1}{r^n}(\cos n\alpha - \boldsymbol{i}\,sen\,n\alpha)$

$\sqrt[n]{1} = \cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right) + \boldsymbol{i}\,sen\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right) \qquad con\ k = 0,1,2,.....,n-1$ radici n-esime dell'unità

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}\right) + \boldsymbol{i}\,sen\left(\dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}\right)\right] \quad con\ k = 0,1,2,.....,n-1$ radici n-esime del numero complesso z

Esponenziali complessi

Costante di Nepero o numero di Eulero: $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \cong 2,7\ 1828\ 1828\ 4590....$

Dato un numero complesso di modulo unitario si definisce: $e^{i\alpha} = (\cos\alpha + \boldsymbol{i}\,sen\,\alpha)$

In particolare l'esp. Compl. $e^{i\pi} = (\cos\pi + \boldsymbol{i}\,sen\,\pi)$ da cui $e^{i\pi} = -1$ segue **l'IDENTITÀ di EULERO**: $\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$

Sommando e sottraendo $e^{i\alpha}$ con $e^{-i\alpha}$ si ottengono le **Formule di EULERO**: $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \\ sen\,\alpha = \dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2\boldsymbol{i}} \end{cases}$

Riassumendo un numero complesso può essere rappresentato in forme equivalenti: $\begin{cases} z = a + b\boldsymbol{i} \\ z = r(\cos\alpha + \boldsymbol{i}\,sen\,\alpha) \\ z = r\cdot e^{i\alpha} \end{cases}$

Varie sui numeri complessi

- In generale si definisce $z = r\cdot(\cos\alpha + \boldsymbol{i}\,sen\,\alpha) = r\cdot e^{i\alpha}$

- Modulo dell'esp. compl.: $\left|e^{a+ib}\right| = e^a$, argomento dell'esp.compl. $Arg(e^{a+ib}) = b$ es.: $\left|e^{3-2i}\right| = e^3$; $Arg\left(e^{3-2i}\right) = -2$

- Una **uguaglianza** inaspettata:

$\boldsymbol{i}^{\boldsymbol{i}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$ dim.: dalla definizione $e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{i} = e^{ln\,\boldsymbol{i}} \rightarrow \boldsymbol{i}\dfrac{\pi}{2} = ln\,\boldsymbol{i} \rightarrow \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}\dfrac{\pi}{2} = \boldsymbol{i}\cdot ln\,\boldsymbol{i} \rightarrow -\dfrac{\pi}{2} = ln\,\boldsymbol{i}^{\boldsymbol{i}} \rightarrow e^{-\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{i}^{\boldsymbol{i}}$

$\sqrt[i]{\boldsymbol{i}} = e^{\frac{\pi}{2}}$ analogamente $e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{i} = e^{ln\,\boldsymbol{i}} \rightarrow \boldsymbol{i}\dfrac{\pi}{2} = ln\,\boldsymbol{i} \rightarrow \dfrac{1}{\boldsymbol{i}}\cdot\boldsymbol{i}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{\boldsymbol{i}}\cdot ln\,\boldsymbol{i} \rightarrow \dfrac{\pi}{2} = ln\,\boldsymbol{i}^{\frac{1}{i}} \rightarrow e^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt[i]{\boldsymbol{i}}$

- Un **paradosso** sui numeri complessi: $-1 = \boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$ quindi $-1 = 1$

Oppure: $\sqrt{-1} = \sqrt{-1} \rightarrow \sqrt{\dfrac{1}{-1}} = \sqrt{\dfrac{-1}{1}} \rightarrow \dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \dfrac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} \rightarrow \sqrt{1}\cdot\sqrt{1} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$ quindi $1 = -1$

(le regole dei radicali algebrici si possono applicare solo a radicandi positivi)