ESEMPIO SECONDA PROVA DI MATEMATICA E FISICA
pubblicato dal MIUR il 2 aprile 2019

Svolgimento

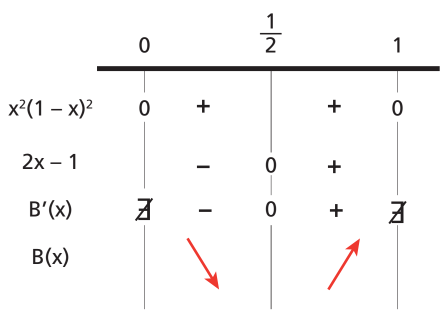
A cura di Valentina Angelini, Francesco Benvenuti, Lidia Ceresara, Gianni Melegari, Francesca Anna Riccio e Claudio Romeni

Problema 1

1 Per la legge di Biot-Savart, la corrente i che scorre nel filo passante per l'origine genera nel punto $P(x, 0)$ un campo magnetico di intensità $B_1(x) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{x}$ $\left(\text{con } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{T}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{A}}\right)$ e diretto parallelamente all'asse y. Per la regola della mano destra, il campo è diretto verso l'alto.
Analogamente, la corrente i che scorre nel filo passante per il punto D genera nel punto $P(x, 0)$ un campo magnetico di intensità $B_2(x) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{1-x}$ e diretto parallelamente all'asse y. Per la regola della mano destra, il campo è diretto verso l'alto.
Il campo magnetico totale nel punto $P(x, 0)$ ha intensità

$$B(x) = B_1(x) + B_2(x) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{x} + \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{1-x} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) \quad \text{con} \quad 0 < x < 1$$

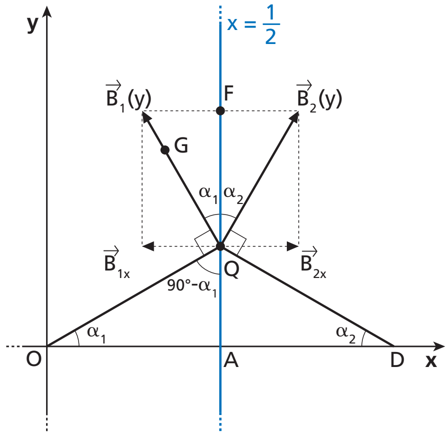
Il secondo membro dell'espressione fornita dal testo del problema, $B(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$, ha unità di misura tesla. Quindi la costante K ha unità di misura (T·m).
Al variare di x nell'intervallo $]0; 1[$, non cambiano la direzione e il verso dei campi $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$. Quindi in ogni punto di quell'intervallo il campo magnetico totale $\vec{B}$ è parallelo all'asse y e diretto verso l'alto.
Per individuare il valore di x nell'intervallo $]0; 1[$ in cui l'intensità B è minima, calcoliamo la derivata $B'(x) = \frac{dB}{dx} = K\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}\right) = K\frac{2x-1}{x^2(1-x)^2}$.
La derivata $B'(x)$ si annulla per $x = \frac{1}{2}$. Dal grafico del segno di $B'(x)$ concludiamo che nell'intervallo $]0; 1[$ la funzione $B(x)$ ha il minimo per $x = \frac{1}{2}$.



2 Determiniamo le caratteristiche del campo magnetico totale lungo la retta di equazione $x = \frac{1}{2}$.
Ciascun punto $Q\left(\frac{1}{2}, y\right)$ di tale retta è equidistante da O e da D. Quindi i campi magnetici $\vec{B}_1(y)$ e $\vec{B}_2(y)$ hanno la stessa intensità $B(y)$. Tali campi sono perpendicolari rispettivamente ai segmenti OQ e DQ e, per la regola della mano destra, hanno i versi indicati in figura.
Gli angoli α_1 sono congruenti poiché vale

$$F\hat{Q}G = F\hat{Q}A - G\hat{Q}O - O\hat{Q}A = 180° - 90° - (90° - \alpha_1) = \alpha_1$$

Per un ragionamento analogo, troviamo che gli angoli α_2 sono congruenti. Ma α_1 è congruente a α_2 perché i triangoli OQA e DQA sono congruenti. Poniamo $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$.



Quindi le componenti lungo l'asse x dei campi $\vec{B}_1(y)$ e $\vec{B}_2(y)$ sono uguali e opposte:

$$B_{1x}(y) = -B(y)\,\text{sen}\,\alpha\,, \qquad B_{2x}(y) = B(y)\,\text{sen}\,\alpha$$

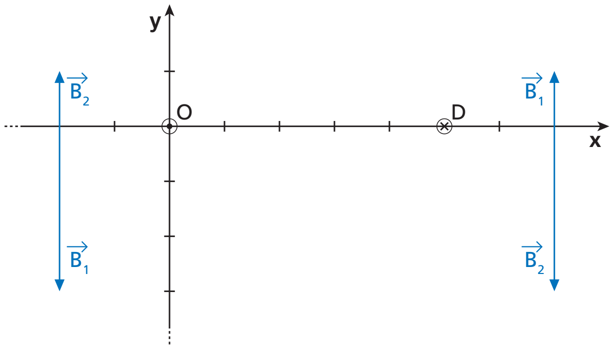
e la componente $B_x(y) = B_{1x}(y) + B_{2x}(y)$ lungo l'asse x del campo magnetico totale è nulla.
In tutti i punti della retta $x = \frac{1}{2}$ il campo magnetico totale è quindi sempre parallelo all'asse y.
La carica puntiforme transita nel punto $C\left(0, \frac{1}{2}\right)$ con velocità parallela al campo magnetico totale, quindi non risente di alcuna forza di Lorentz. Per ipotesi, sulla carica non agiscono altre forze, per cui essa si muove con moto rettilineo uniforme lungo la retta $x = \frac{1}{2}$.
Nei punti dell'asse x esterni all'intervallo $]0; 1[$ i campi hanno la stessa direzione parallela all'asse y ma versi opposti. Calcoliamo le intensità di $B_1(x) = \left|\vec{B}_1(x)\right|$ e $B_2(x) = \left|\vec{B}_2(x)\right|$.

- Nei punti $P(x, 0)$ con $x < 0$, $B_1(x) > B_2(x)$ e

$$\begin{cases} B_1(x) = K\dfrac{1}{|x|} \\ B_2(x) = K\dfrac{1}{1+|x|} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B(x) = K\left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{1+|x|}\right) = K\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right) \quad \text{per } x < 0$$

- Nei punti $P(x, 0)$ con $x > 1$, $B_1(x) < B_2(x)$ e

$$\begin{cases} B_1(x) = K\dfrac{1}{x} \\ B_2(x) = K\dfrac{1}{x-1} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B(x) = K\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right) \quad \text{per } x > 1$$



All'esterno dell'intervallo]0; 1[non esistono punti equidistanti da O e da D. Quindi non esistono punti in cui il campo magnetico totale sia nullo. Nell'intervallo]0; 1[i campi magnetici $\vec{B}_1(x)$ e $\vec{B}_2(x)$ sono non nulli e hanno la stessa direzione e lo stesso verso. Quindi non esistono punti nell'intervallo in cui il campo magnetico totale sia nullo.

3 Calcoliamo la derivata seconda di $f(x)$:

$$f''(x) = 2K\frac{(1-x)^3 + x^3}{x^3(1-x)^3} = 2K\frac{3x^2-3x+1}{x^3(1-x)^3}$$

Osserviamo che il numeratore è un polinomio di secondo grado irriducibile ($\Delta < 0$), per cui la derivata seconda di f non si annulla mai. La funzione non possiede quindi punti di flesso.

La retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $\frac{1}{3}$ ha equazione $y - f\left(\frac{1}{3}\right) = f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$, dove

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{2}K \quad \text{e } f'\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{27}{4}K$$

perciò

$$y - \frac{9}{2}K = -\frac{27}{4}K\left(x-\frac{1}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{27}{4}Kx + \frac{27}{4}K$$

Per trovare l'ulteriore punto di intersezione risolviamo il sistema

$$\begin{cases} y = -\dfrac{27}{4}Kx + \dfrac{27}{4}K \\ y = K\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x}\right) \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli si ottiene l'equazione di 3° grado

$$27x^3 - 54x^2 + 27x - 4 = 0$$

Per la condizione di tangenza, tale equazione ha due soluzioni coincidenti $x_1 = x_2 = \frac{1}{3}$. Troviamo la terza radice applicando la regola di Ruffini. Otteniamo perciò

$$(3x-1)^2(3x-4) = 0$$

L'ascissa dell'ulteriore punto di intersezione è $x = \frac{4}{3}$. Sostituendo tale valore otteniamo il punto di coordinate $\left(\frac{4}{3}, -\frac{9}{4}K\right)$.

4 Calcoliamo l'integrale definito:

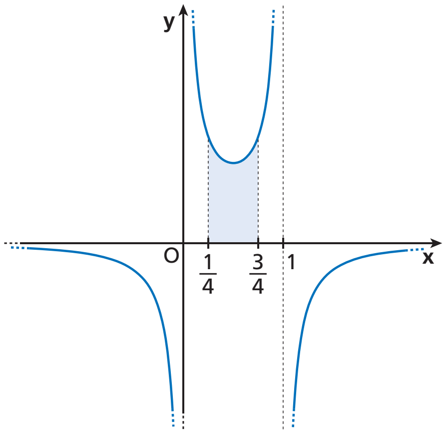
$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} K\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)dx = K\left[\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{x}dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{1-x}dx\right] =$$

$$= K\left\{\left[\ln|x|\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} - \left[\ln|1-x|\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}\right\} =$$

$$= K\left[\ln\frac{3}{4} - \ln\frac{1}{4} - \ln\frac{1}{4} + \ln\frac{3}{4}\right] =$$

$$= 2K\ln 3$$

Tale valore rappresenta geometricamente l'area del trapezoide compreso tra il grafico di $y = f(x)$ e l'asse x nell'intervallo $\left[\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right]$.



Osserviamo che la funzione $y = f(x)$, per $x \geq 2$ è negativa. Pertanto:

$$|f(x)| = -f(x) \qquad \text{se} \qquad x \geq 2$$

quindi:

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_2^t |f(x)|dx = -\int_2^t f(x)dx = -K\int_2^t\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)dx = \\ &= -K\left[\ln|x| - \ln|1-x|\right]_2^t = -K\left[\ln|t| - \ln|1-t| - \ln 2 + \ln 1\right] = \\ &= -K\left[\ln\left|\frac{t}{1-t}\right| - \ln 2\right] \end{aligned}$$

Calcolando il limite per $t \to +\infty$ di $g(t)$ ottieniamo:

$$\lim_{t\to+\infty}\left[-K\left(\ln\left|\frac{t}{1-t}\right| - \ln 2\right)\right] = -K(\ln 1 - \ln 2) = K\ln 2$$

Il significato geometrico di tale limite è l'area della regione illimitata di piano compresa tra il grafico della funzione e l'asse x nell'intervallo $[2; +\infty[$.

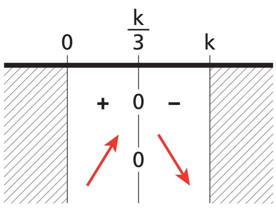
Problema 2

1 È data la funzione $f(x) = \sqrt{x}(k-x)$, con $k > 0$, che ha dominio $D_f\colon x \geq 0$.

Calcoliamo la sua derivata:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(k-x) - \sqrt{x} = \frac{k-x-2x}{2\sqrt{x}} = \frac{k-3x}{2\sqrt{x}}, \text{ con } D_{f'}\colon x > 0.$$

Studiamo il segno di $f'(x)$ in $[0; k]$: otteniamo che $f'(x) \geq 0$ per $0 < x \leq \frac{k}{3}$.



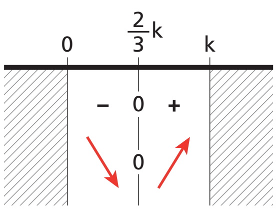
Si ha dunque un punto di massimo in $F\left(\frac{k}{3}; \frac{2}{3}k\sqrt{\frac{k}{3}}\right)$.

Consideriamo ora la funzione $g(x) = x^2(x-k)$, con $k > 0$, che ha dominio $D_g\colon \mathbb{R}$.

Calcoliamo la sua derivata:

$$g'(x) = 2x(x-k) + x^2 = x(3x-2k), \text{ con } D_{g'}\colon D_g.$$

Studiamo il segno di $g'(x)$ in $[0; k]$: otteniamo che $g'(x) \geq 0$ per $\frac{2}{3}k \leq x \leq k$.



Si ha dunque un punto di minimo in $G\left(\frac{2}{3}k; -\frac{4}{27}k^3\right)$.

Come richiesto, risulta che:

- $x_G = 2x_F$, perché $\frac{2}{3}k = 2 \cdot \frac{k}{3}$

- $y_G = -(y_F)^2$, perché $-\dfrac{4}{27}k^3 = -\left(\dfrac{2}{3}k\sqrt{\dfrac{k}{3}}\right)^2$.

2 Entrambe le funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$ passano per l'origine $O(0;0)$. Per $k > 0$, studiamo l'andamento della derivata prima in un opportuno intorno di $x = 0$ di entrambe le funzioni.

- $f'(x) = \dfrac{k-3x}{2\sqrt{x}}$ è definita per $x > 0$, quindi $f(x)$ non è derivabile in $x = 0$. Poiché $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{k-3x}{2\sqrt{x}} = +\infty$, la funzione $y = f(x)$ presenta una tangente verticale in O che coincide con l'asse delle ordinate ($x = 0$).
- $g'(x) = x(3x-2k)$ è definita su $\mathbb{R}$ e $g'(0) = 0$, quindi il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione $g(x)$ in O è zero. Dunque la retta tangente a g in O è orizzontale e coincide con l'asse delle ascisse ($y = 0$).

Poiché le rispettive rette tangenti in O alle due funzioni coincidono con gli assi cartesiani, i grafici delle due funzioni sono ortogonali in O.

Calcoliamo le coordinate dell'ulteriore punto comune tra i due grafici:

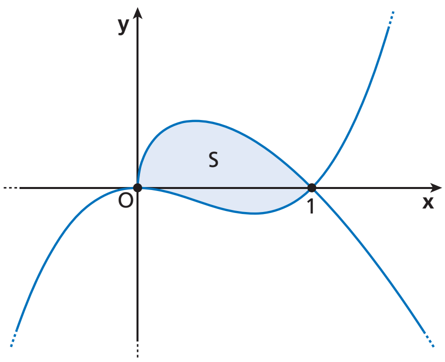
$$\begin{cases} y = \sqrt{x}(k-x) \\ y = x^2(x-k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2(x-k) = \sqrt{x}(k-x) \\ y = x^2(x-k) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-k)(x^2+\sqrt{x}) = 0 \\ y = x^2(x-k) \end{cases} \Rightarrow \quad O(0;0),\ P(k;0).$$

I valori $f'(k) = -\dfrac{2k}{2\sqrt{k}} = -\sqrt{k}$ e $g'(x) = k^2$ rappresentano rispettivamente i coefficienti angolari delle due rette tangenti ai grafici delle due funzioni nel punto comune P. Affinché si intersechino ortogonalmente, devono risultare antireciproci:

$$k^2\sqrt{k} = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 1.$$

3 Per $k = 1$, i grafici delle due funzioni sono rappresentati in figura.



Per il calcolo del flusso del campo magnetico attraverso S, occorre innanzitutto calcolare l'area della regione S:

$$S = \int_0^1 [f(x) - g(x)]\,dx = \int_0^1 \left[\sqrt{x} - x\sqrt{x} - x^3 + x^2\right] dx =$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{20} = 0{,}35$$

Dunque l'area misura 0,35 m^2.

Di conseguenza, il flusso del campo magnetico attraverso S vale

$$\Phi_S(\vec{B}) = B \cdot S \cdot \cos 0° = \left(2{,}0 \cdot 10^{-2}\,\text{T}\right) \cdot \left(0{,}35\,\text{m}^2\right) = 7{,}0 \cdot 10^{-3}\,\text{Wb}.$$

4 Per la legge di Faraday-Neumann-Lenz, la forza elettromotrice indotta vale fem $= -\dfrac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$ e la corrente indotta vale $i = -\dfrac{1}{R}\dfrac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$.

Se ora il campo magnetico è variabile nel tempo come $B(t) = B_0\, e^{-\omega t}\cos(\omega t)$, con $\omega = \pi$ rad/s, si ha:

$$\Phi(\vec{B}) = S\, B_0\, e^{-\pi t}\cos(\pi t) = 7{,}0 \cdot 10^{-3} e^{-\pi t}\cos(\pi t)\,\text{Wb}.$$

La derivata temporale del flusso vale

$$\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} = 7{,}0 \cdot 10^{-3}\left[-\pi e^{-\pi t}\cos(\pi t) - \pi\sin(\pi t)e^{-\pi t}\right]\,\text{V} = -7{,}0 \cdot 10^{-3}\pi e^{-\pi t}\left[\cos(\pi t) + \sin(\pi t)\right]\,\text{V}$$

Quindi l'intensità della corrente indotta nella spira in funzione del tempo t, espressa in ampere, vale

$$i(t) = \pi e^{-\pi t} \cdot 10^{-4}\left[\cos(\pi t) + \sin(\pi t)\right]\,\text{A}$$

Per determinare in quale istante la corrente cambia verso per la prima volta occorre determinare in quale istante cambia il segno per la prima volta passando da positiva a negativa.

Il termine di $i(t)$ che ne determina il segno è solo $\cos(\pi t) + \sin(\pi t)$, perché il fattore $\pi e^{-\pi t} \cdot 10^{-4}$ A è strettamente positivo.

$\cos(\pi t) + \sin(\pi t) = 0$ se $\tan(\pi t) = -1 \Rightarrow \pi t = \dfrac{3}{4}\pi + \pi k \Rightarrow t = \left(\dfrac{3}{4} + k\right)$ s, per cui l'istante cercato è $t = \dfrac{3}{4}$ s $= 0{,}75$ s.

Per determinare il massimo valore assunto dalla corrente $i(t)$ per $t \geq 0$ si calcola la derivata prima

$$i'(t) = \pi 10^{-4}\left[-\pi e^{-\pi t}\left(\cos(\pi t) + \sin(\pi t)\right) + e^{-\pi t}\left(-\pi\sin(\pi t) + \pi\cos(\pi t)\right)\right]\,\text{A/s} =$$

$$= \pi^2 10^{-4} e^{-\pi t}\left(-\cos(\pi t) - \sin(\pi t) - \sin(\pi t) + \cos(\pi t)\right) = -2\pi^2 10^{-4} e^{-\pi t}\sin(\pi t)\,\text{A/s}.$$

Il segno di $i'(t)$ è legato al segno di $\sin(\pi t)$, essendo il fattore $-2\pi^2 10^{-4} e^{-\pi t}$ negativo per ogni $t \geq 0$. Il valore massimo della corrente si ha all'istante iniziale $t = 0$ s e vale $i(0) = \pi \cdot 10^{-4}$ A.

La funzione ha infiniti massimi relativi, la cui ordinata diventa sempre minore a causa del termine $e^{-\omega t}$.

Anche considerando il dato della corrente in valore assoluto, il massimo assoluto si ha per $t = 0\,\text{s}$; per confronto, nel primo minimo della funzione $i(t)$, a $t = 1\,\text{s}$, il valore assoluto dell'ordinata vale

$$\left|i(1\ \text{s})\right| = \pi e^{-\pi} \cdot 10^{-4}\ \text{A}$$

che è minore di $\left|i(0\,\text{s})\right| = \pi \cdot 10^{-4}$ A.

Per la legge di Lenz, se la variazione del campo magnetico è positiva, allora la corrente indotta ha segno negativo; viceversa, se la variazione del campo magnetico è negativa, allora la corrente indotta ha segno positivo.

Per esempio, se scegliamo come verso positivo dell'asse z quello uscente dal foglio, la corrente scorre in senso orario quando B_z aumenta, in senso antiorario quando B_z diminuisce.

ESEMPIO SECONDA PROVA DI MATEMATICA E FISICA
pubblicato dal MIUR il 2 aprile 2019

Svolgimento

Quesito 1

Osserviamo che il denominatore della funzione razionale fratta $g(x) = \dfrac{(k-1)x^3 + kx^2 - 3}{x-1}$ si annulla per $x = 1$. Se non vogliamo che il grafico della funzione $g(x)$ abbia asintoti, e in particolare asintoti verticali, dobbiamo trovare un valore di $k \in \mathbb{R}$ per cui $(x-1)$ sia un fattore del numeratore. Vogliamo cioè esprimere $g(x)$ come $g(x) = \dfrac{P(x)}{x-1}$, dove $P(x)$ è un polinomio tale che $P(1) = 0$.
Imponiamo tale condizione:

$$P(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad (k-1) \cdot 1^3 + k \cdot 1^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2k - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

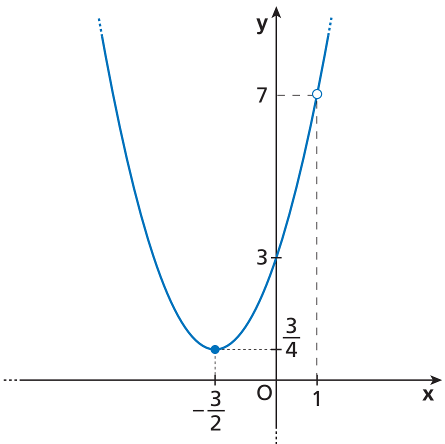
Per tale valore, otteniamo $g(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3}{x-1}$.
Scomponiamo $x^3 + 2x^2 - 3$ con il metodo di Ruffini:

	1	2	0	−3
1		1	3	3
	1	3	3	/

Quindi $x^3 + 2x^2 - 3 = (x-1)(x^2 + 3x + 3)$. Di conseguenza, possiamo scrivere

$$g(x) = \frac{(x-1)(x^2+3x+3)}{x-1} \quad \Rightarrow \quad g(x) = x^2 + 3x + 3 \ \text{ per } \ x \neq 1$$

che è una parabola privata del punto $(1; 7)$, corrispondente a $x = 1$, e che infatti non possiede asintoti.
Il vertice della parabola ha coordinate $x_V = -\dfrac{3}{2}$ e $y_V = \left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 + 3\left(-\dfrac{3}{2}\right) + 3 = \dfrac{3}{4}$, dunque $V\left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{4}\right)$; la parabola interseca l'asse delle ordinate nel punto $(0; 3)$ e ha la concavità rivolta verso l'alto.



Se vogliamo che il grafico di $g(x)$ abbia un asintoto obliquo, dev'essere necessariamente $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = m \in \mathbb{R} - \{0\}$; di conseguenza, essendo $g(x)$ una funzione razionale fratta, il grado del numeratore deve essere pari al grado del denominatore più uno, e in particolare il numeratore di $g(x)$ dev'essere di secondo grado.

Quindi $k = 1 \Rightarrow g(x) = \frac{x^2-3}{x-1}$, che ha per dominio $\mathbb{R} - \{1\}$, e

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3}{x^2-x} = 1.$$

Calcoliamo q:

$$q = \lim_{x\to\infty} \left[g(x) - mx\right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2-3}{x-1} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2-3-x^2+x}{x-1}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x-3}{x-1} = 1$$

quindi l'asintoto obliquo ha equazione $y = x + 1$.

Osserviamo che, per $k = 1$, $g(x)$, oltre ad avere l'asintoto obliquo $y = x + 1$, ha anche un asintoto verticale di equazione $x = 1$; infatti $\lim_{x\to 1^{\mp}} \frac{x^2-3}{x-1} = \pm\infty$.

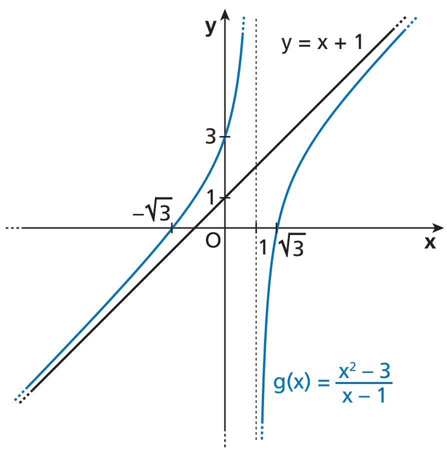
Per disegnare il grafico di $g(x) = \frac{x^2-3}{x-1}$, con $x \neq 1$, calcoliamo $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{2x \cdot (x-1) - (x^2-3) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 + 3}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2}, \text{ con } x \neq 1$$

Il numeratore di $g'(x)$ è un polinomio di secondo grado irriducibile ($\Delta < 0$), che assume valori sempre positivi.

Quindi $g'(x) > 0 \, \forall x \neq 1$, e di conseguenza $g(x)$ è strettamente crescente su ciascun sottointervallo del dominio $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$. Inoltre $g(x)$ ha le seguenti intersezioni con gli assi: $(0; 3)$; $(\pm\sqrt{3}; 0)$.

Il grafico è allora il seguente:



ESEMPIO SECONDA PROVA DI MATEMATICA E FISICA
pubblicato dal MIUR il 2 aprile 2019

Svolgimento

Quesito 2

Consideriamo la funzione f, pari e derivabile in $\mathbb{R}$.
Per la regola di derivazione composta, $D[f(-x)] = -f'(-x)$. Poiché f è pari, $D[f(-x)] = D[f(x)] = f'(x)$. Quindi deve essere $f'(x) = -f'(-x)$, da cui concludiamo che f' è dispari.

Consideriamo la funzione g, dispari e derivabile in $\mathbb{R}$.
Per la regola di derivazione composta, $D[g(-x)] = -g'(-x)$.
Poiché g è dispari, $D[g(-x)] = D[-g(x)] = -D[g(x)] = -g'(x)$.
Quindi deve essere:

$$-g'(x) = -g'(-x) \quad \Rightarrow \quad g'(x) = g'(-x) \quad \Rightarrow \quad g' \text{ è pari.}$$

Come esempio di funzione f pari e derivabile in $\mathbb{R}$ possiamo considerare $f(x) = \cos x$, la cui derivata è $f'(x) = -\sin x$, che è dispari. Come esempio di funzione g dispari e derivabile in $\mathbb{R}$ possiamo considerare $g(x) = \sin x$, la cui derivata è $g'(x) = \cos x$, che è pari.

ESEMPIO SECONDA PROVA DI MATEMATICA E FISICA
pubblicato dal MIUR il 2 aprile 2019

Svolgimento

Quesito 3

La retta tangente al grafico della funzione $y = f(x)$ nel suo punto di ascissa 1 ha equazione

$$y - f(1) = m(x - 1)$$

dove:

$$f(1) = \int_1^1 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)}{t} dt = 0$$

$$m = f'(1) = \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)}{x}\right]_{x=1} = \frac{1}{2}$$

La retta tangente ha quindi equazione $y - 0 = \frac{1}{2}(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

ESEMPIO SECONDA PROVA DI MATEMATICA E FISICA
pubblicato dal MIUR il 2 aprile 2019

Svolgimento

Quesito 4

Determiniamo innanzitutto l'equazione della retta r:

$$\begin{cases} x = -2 + t[0 - (-2)] \\ y = 0 + t(2 - 0) \\ z = 1 + t(1 - 1) \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

Vogliamo individuare le coordinate x, y, z di un punto P equidistante da C e da D. Imponiamo quindi la condizione $\overline{CP} = \overline{DP}$:

$$\sqrt{(x_C - x)^2 + (y_C - y)^2 + (z_C - z)^2} = \sqrt{(x_D - x)^2 + (y_D - y)^2 + (z_D - z)^2}$$

$$\sqrt{(5 - x)^2 + (1 - y)^2 + (-2 - z)^2} = \sqrt{(1 - x)^2 + (3 - y)^2 + (4 - z)^2}$$

$$(5 - x)^2 + (1 - y)^2 + (-2 - z)^2 = (1 - x)^2 + (3 - y)^2 + (4 - z)^2$$

$$25 + \cancel{x^2} - 10x + 1 + \cancel{y^2} - 2y + 4 + \cancel{z^2} + 4z = 1 + \cancel{x^2} - 2x + 9 + \cancel{y^2} - 6y + 16 + \cancel{z^2} - 8z$$

da cui, semplificando, otteniamo

$$4x - 2y - 6z - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - y - 3z - 1 = 0$$

Mettiamo a sistema le condizioni trovate:

$$\begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = 2t \\ z = 1 \\ 2x - y - 3z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = 2t \\ z = 1 \\ 4t - 4 - 2t - 3 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = 2t \\ z = 1 \\ t = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \\ z = 1 \end{cases}$$

Il punto cercato ha dunque coordinate $P(6; 8; 1)$.

Quesito 5

Indichiamo con p la probabilità che, in un lancio di un dado a 6 facce, esca il numero 3, e con q la probabilità che non esca il numero 3.
Quindi, in un singolo lancio:

$$p = \frac{1}{6} \quad \text{e} \quad q = 1 - p = \frac{5}{6}$$

- Affinché, dopo 4 lanci, il punteggio sia ancora 0, occorre che la faccia 3 esca esattamente una volta. Utilizzando lo schema delle prove ripetute si ha quindi:

$$p_{\mathrm{A}} = \binom{4}{1}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{324} \simeq 38{,}6\%$$

- Osserviamo che, affinché, in 6 lanci, il punteggio non scenda mai sotto lo 0, il primo lancio deve necessariamente avere come esito il numero 3. Nei successivi 5 lanci possono verificarsi le seguenti situazioni:

1. Tutti 3, per cui:

$$p_1 = \underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)}_{1° \text{ lancio}} \left(\frac{1}{6}\right)^5$$

2. Quattro volte la faccia 3 e una volta una faccia diversa da 3:

$$p_2 = \underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)}_{1° \text{ lancio}} \binom{5}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)$$

3. Tre volte la faccia 3 e due volte una faccia diversa da 3:

$$p_3 = \underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)}_{1° \text{ lancio}} \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

4. Due volte la faccia 3 e tre volte una faccia diversa da 3:

$$p_4 = \underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)}_{1° \text{ lancio}} \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3$$

5. Una volta la faccia 3, ma non all'ultimo lancio, e quattro volte una faccia diversa da 3:

$$p_5 = \underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)}_{1° \text{ lancio}} \binom{4}{1} \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^3 \underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)}_{6° \text{ lancio}}$$

La probabilità richiesta è quindi:

$$p_\mathrm{B} = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = \frac{671}{7776} \simeq 8{,}6\%$$

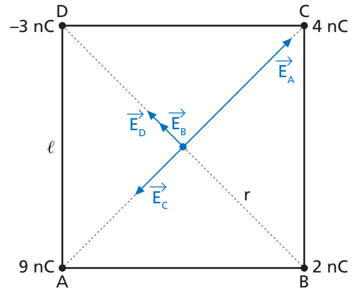
ESEMPIO SECONDA PROVA DI MATEMATICA E FISICA pubblicato dal MIUR il 2 aprile 2019

Svolgimento

Quesito 6

Indicando con q_A, q_B, q_C, q_D le cariche ai quattro vertici $ABCD$ del quadrato, con l il lato del quadrato e r la sua semidiagonale, si ha:

$$l = r\sqrt{2} = 2 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \text{ m} = \sqrt{2} \text{ m}$$



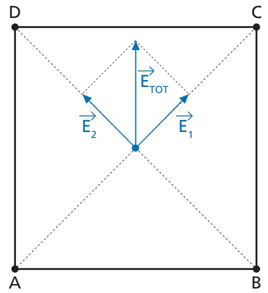
Il modulo della risultante $\overrightarrow{E_1}$ del campo generato dalle cariche q_A e q_C è dato da:

$$E_1 = k\left(\frac{|q_A|}{r^2} - \frac{|q_C|}{r^2}\right) = \frac{k}{r^2}(|q_A| - |q_C|) = \frac{8{,}99 \cdot 10^9}{2 \text{ m}^2} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot (9 - 4) \cdot 10^{-9} \text{ C} = 22{,}5 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

Il verso di $\overrightarrow{E_1}$ è dal centro del quadrato al vertice C.
Il modulo della risultante $\overrightarrow{E_2}$ del campo generato dalle cariche q_B e q_D è dato da:

$$E_2 = \frac{k}{r^2}(|q_B| + |q_D|) = \frac{8{,}99 \cdot 10^9}{2 \text{ m}^2} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot (2 + 3) \cdot 10^{-9} \text{ C} = 22{,}5 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

Perciò si trova $E_2 = E_1$. Il verso di $\overrightarrow{E_2}$ è dal centro del quadrato al vertice D.



$\overrightarrow{E_{tot}}$ è quindi la risultante di due vettori uguali in modulo e fra loro perpendicolari: è diretta dal centro del quadrato verso l'alto, parallelamente al lato BC. Il suo modulo è pari a:

$$E_{tot} = E_1\sqrt{2} = 31{,}8 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

ESEMPIO SECONDA PROVA DI MATEMATICA E FISICA
pubblicato dal MIUR il 2 aprile 2019

Svolgimento

Quesito 7

Indicando con ΔV la d.d.p., con m_p, e e v rispettivamente la massa, la carica e la velocità del protone, l'energia cinetica K del protone è data da:

$$K = \frac{1}{2} m_\mathrm{p} v^2 = e\Delta V \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m_\mathrm{p}}}$$

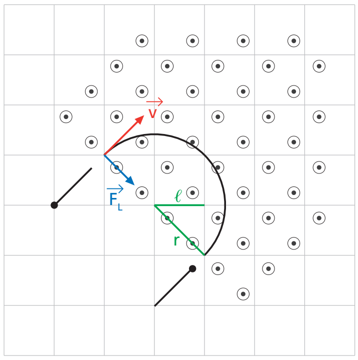
Il raggio r della semicirconferenza è la diagonale del quadrato di lato $l = 1{,}00$ m:

$$r = l\sqrt{2} = (1{,}00)\sqrt{2}\ \mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad r^2 = 2\ \mathrm{m}^2$$

Il protone risente della forza di Lorentz $\vec{F}_\mathrm{L}$ non appena entra nella regione in cui è presente il campo magnetico. La forza è data da:

$$\vec{F}_\mathrm{L} = e(\vec{v} \times \vec{B})$$

Poiché $\vec{v}$ e $\vec{B}$ sono perpendicolari, il modulo della forza di Lorentz è $F = evB$.



La forza di Lorentz si comporta come una forza centripeta. Pertanto:

$$F_\mathrm{L} = F_\mathrm{c} \quad \Rightarrow \quad evB = m_\mathrm{p}\frac{v^2}{r}$$

e quindi

$$B = \frac{m_\mathrm{p} v}{er} = \frac{m_\mathrm{p}}{er} \cdot \sqrt{\frac{2eV}{m_\mathrm{p}}} = \sqrt{\frac{2m_\mathrm{p}V}{er^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(1{,}673 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}\right)(400\ \mathrm{V})}{\left(1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}\right)\left(2{,}00\ \mathrm{m}^2\right)}} = 2{,}04 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{T}$$

Si può verificare che l'unità di misura nel calcolo precedente corrisponde effettivamente al tesla:

$$\sqrt{\frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{V}}{\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}^2}} = \sqrt{\frac{\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}^2}} = \sqrt{\frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{N} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \mathrm{s}^2}{\mathrm{C}^2 \cdot \mathrm{m}^2}} = \sqrt{\frac{\mathrm{N}^2}{\mathrm{A}^2 \cdot \mathrm{m}^2}} = \sqrt{\mathrm{T}^2} = \mathrm{T}$$

Quesito 8

Il metallo è illuminato con una radiazione di frequenza $f = 7,80 \cdot 10^{14}$ Hz. Perché possa verificarsi l'effetto fotoelettrico, occorre che la frequenza della radiazione sia maggiore o uguale alla frequenza di soglia f_0 che è tipica del metallo utilizzato.
La frequenza di soglia è infatti legata all'energia di estrazione W dalla relazione:

$$W = hf_0 \quad \Rightarrow \quad f_0 = \frac{W}{h}$$

in cui compare la costante di Planck h.
La frequenza di soglia per i tre metalli riportati in tabella è:

$$\begin{aligned} f_0(\mathrm{Ag}) &= \frac{W_{\mathrm{Ag}}}{h} = \frac{(4{,}8\ \mathrm{eV})\left(1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J/eV}\right)}{6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}} = 1{,}16 \cdot 10^{15}\ \mathrm{Hz} \\ f_0(\mathrm{Cs}) &= \frac{W_{\mathrm{Cs}}}{h} = \frac{(1{,}8\ \mathrm{eV})\left(1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J/eV}\right)}{6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}} = 4{,}35 \cdot 10^{14}\ \mathrm{Hz} \\ f_0(\mathrm{Pt}) &= \frac{W_{\mathrm{Pt}}}{h} = \frac{(5{,}3\ \mathrm{eV})\left(1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J/eV}\right)}{6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}} = 1{,}28 \cdot 10^{15}\ \mathrm{Hz} \end{aligned}$$

Quindi l'unico metallo adatto è il cesio.
Per la legge di Einstein dell'effetto fotoelettrico, l'energia cinetica massima con cui fuoriescono gli elettroni dal metallo è:

$$\begin{aligned} K_{\max} &= hf - W = hf - hf_0 = h(f - f_0) \\ &= \left(6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}\right)\left(7{,}80 \cdot 10^{14} - 4{,}35 \cdot 10^{14}\right) \frac{1}{\mathrm{s}} = 2{,}29 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} \end{aligned}$$

e la velocità massima è:

$$K_{\max} = \frac{1}{2} m_e v_{\max}^2 \quad \Rightarrow \quad v_{\max} = \sqrt{\frac{2K_{\max}}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(2{,}29 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}\right)}{9{,}109 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}}} = 7{,}09 \cdot 10^5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Si può verificare che l'unità di misura nel calcolo precedente corrisponde effettivamente al metro al secondo:

$$\sqrt{\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{kg}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$