SIMULAZIONE ZANICHELLI 2019

DELLA PROVA DI MATEMATICA E FISICA DELL'ESAME DI STATO

PER IL LICEO SCIENTIFICO

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.

Problema 1

Si consideri la funzione reale di variabile reale $i(t)$ così definita:

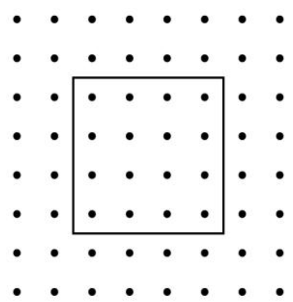
$$i(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq t \leq 2 \\ t^3 + at^2 + bt + c & \text{se } 2 < t \leq 5 \end{cases},$$

con a, b, c parametri reali.

1. Ricavare i valori di a, b e c che rendono $i(t)$ continua e derivabile in tutto l'intervallo $[0; 5]$, con $i(3) = 0$.

Avendo dimostrato che deve essere $a = -9$, $b = 24$ e $c = -18$, sia $i(t)$ la funzione ottenuta in corrispondenza di tali valori.

2. Senza calcolare la derivata prima di $i(t)$, mostrare che $i'(t)$ si annulla in corrispondenza di almeno un valore $\bar{t}$ con $2 < \bar{t} < 5$. Studiare e rappresentare la funzione $i(t)$ in un riferimento cartesiano.



Si supponga che $i(t)$ rappresenti l'intensità (in mA) della corrente indotta all'istante t (in s) in una spira conduttrice di forma quadrata, di lato l (in m) e resistenza R (in Ω), immersa in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$ come mostrato in figura. Il campo magnetico è diretto perpendicolarmente al piano della spira e la sua componente B (in mT) in tale direzione varia nel tempo secondo la funzione $B(t)$. Scegliamo il sistema di riferimento in modo che l'asse perpendicolare al piano del foglio abbia come verso positivo il verso uscente. In base a tale scelta, $B(t) > 0$ se il campo magnetico $\vec{B}$ è uscente dal piano del foglio, e $B(t) < 0$ se $\vec{B}$ è entrante. Inoltre, sempre in base alla scelta del verso degli assi del sistema di riferimento, $i(t) > 0$ se la corrente percorre la spira in senso antiorario, $i(t) < 0$ se la percorre in senso orario.

3. Giustificare, sulla base delle leggi di Maxwell dell'elettromagnetismo classico, il fatto che tra $B(t)$ e $i(t)$ sussiste una relazione del tipo

$$\frac{dB(t)}{dt} = -k \cdot i(t)$$

dove k è una costante positiva. Considerato l = 40 cm e R = 0,16 Ω, determinare la dimensione e il valore di k.

4. Verificare graficamente che la funzione

$$j(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq t \leq 2 \\ -2\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) & \text{se } 2 < t \leq 5 \end{cases}$$

Questo file è un'estensione dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone e dei corsi di fisica di Ugo Amaldi; John D Cutnell, Kenneth W Johnson; David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker; Claudio Romeni.
Hanno collaborato Andrea Betti, Lorenzo Meneghini, Steave Selvaduray e Pietro Velonà.

approssima in una certa misura l'andamento di $i(t)$ nell'intervallo $[0; 5]$ secondi. Assumendo $j(t)$ come valore della corrente, calcolare l'energia termica W dissipata per effetto Joule nell'intervallo $[0; 5]$ secondi, motivando la risposta.

Problema 2

Si consideri un filo rettilineo infinito t, posto nel vuoto, che presenta una carica positiva distribuita in modo uniforme con densità lineare di carica λ. Al di fuori del filo, in un generico punto P dello spazio, si osserva che il campo elettrico $\vec{E}$ generato dalla distribuzione lineare ha direzione radiale rispetto a t ed è uscente da essa. Inoltre, il modulo del campo elettrico è costante nei punti posti alla stessa distanza dal filo.

1. Con riferimento alle caratteristiche geometriche di $\vec{E}$ esposte in precedenza, dimostrare che il modulo del campo elettrico generato dalla distribuzione lineare di carica in un punto P che dista r da t è dato da:

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{r}.$$

Considerare ora tre fili rettilinei infiniti, vincolati a restare fissi, con la stessa densità lineare di carica positiva, perpendicolari al piano del foglio e passanti per i vertici di un triangolo equilatero ABC di lato $2l$. Una carica puntiforme positiva q è posta in un punto generico dell'altezza relativa al vertice A.

2. Verificare che la direzione della forza risultante $\vec{R}$ è quella dell'altezza considerata. Dopodiché definire, su tale altezza, un sistema di riferimento Ox con l'origine O coincidente con il baricentro del triangolo e il verso positivo delle x rivolto verso il vertice A. Verificare che la componente di $\vec{R}$ rispetto Ox è data da:

$$R(x) = \frac{27\lambda q}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{x^2}{9x^3 - 8\sqrt{3}l^3}.$$

Si definisca poi la seguente variabile adimensionale:

$$X \equiv \frac{\sqrt{3}x}{l},$$

e la seguente espressione adimensionale della variabile X:

$$f(X) \equiv \frac{R(X)}{a}$$

con $a \equiv \frac{3\sqrt{3}\lambda q}{2\pi\varepsilon_0 l}$.

3. Dopo avere verificato che risulta $f(X) = \frac{X^2}{X^3-8}$, studiare tale funzione su $\mathbb{R}$ (non è richiesta l'analisi dei flessi e della concavità) e tracciare il grafico qualitativo di $f(X)$.

4. La funzione $f(X)$ possiede un punto di minimo relativo in $X_1 = -2\sqrt[3]{2}$. Determinare allora l'area della regione di piano XY limitata dall'asse delle ascisse, l'asse delle ordinate, il grafico della funzione $f(X)$ e la retta verticale passante per $(X_1; 0)$. Calcolare, infine, il seguente limite:

$$\lim_{X\to-\infty} \frac{\int_X^0 f(z)dz}{\ln(-2X-1)}.$$

Questo file è un'estensione dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone e dei corsi di fisica di Ugo Amaldi; John D Cutnell, Kenneth W Johnson; David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker; Claudio Romeni.
Hanno collaborato Andrea Betti, Lorenzo Meneghini, Steave Selvaduray e Pietro Velonà.

QUESITI

1. Verificare che il grafico della funzione

$$F(x) = 2 + \frac{1}{2}x - \int_0^x \sqrt{\ln(t^2+1)+4}\,dt$$

ammette un punto di flesso di ascissa $x = 0$ e ricavare l'equazione della retta tangente in tale punto.

2. Una scatola contiene 30 palline, numerate da 1 a 30. Le palline sono di due colori diversi: quelle il cui numero è multiplo di 3 sono nere, le rimanenti sono bianche. Si estraggono 3 palline simultaneamente. Determinare la probabilità degli eventi:
A: «le palline sono di uno stesso colore»;
B: «il più piccolo dei numeri estratti è 15»;
C: «le palline sono di colori diversi».

3. Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + \frac{3}{2} & \text{se } x < 1 \\ e^{b-x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}.$$

Determinare i parametri reali a e b in modo che la funzione risulti derivabile in tutto il suo dominio. Dopo aver tracciato i grafici di $f(x)$ e di $f'(x)$, dire se esiste $f''(1)$.

4. Data la superficie sferica Γ di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ e le rette r_1 e r_2 di equazioni:

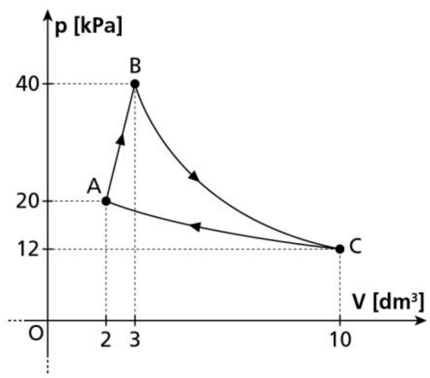
$$r_1\colon \begin{cases} x = 3t \\ y = 0 \\ z = -3t + 2 \end{cases}, \text{con } t \in \mathbb{R}, \qquad r_2\colon \begin{cases} x = 3s + 2 \\ y = -4 \\ z = -3s - 2 \end{cases}, \text{con } s \in \mathbb{R},$$

siano A e B i punti di intersezione tra Γ e la retta r_1 e C e D i punti di intersezione tra Γ e la retta r_2. Dimostrare che i punti A, B, C e D appartengono a uno stesso piano α contenente il centro della superficie sferica e determinare l'equazione di tale piano.

5. Nel diagramma in figura è rappresentata una trasformazione ciclica di un particolare sistema termodinamico. Il tratto AB è lineare; lungo il tratto BC il prodotto $p \cdot V$ è costante; infine nel tratto CA sussiste tra p e V una relazione del tipo

$$p = \frac{\alpha}{V + \beta}$$

dove α e β sono due costanti reali. Ricavare i valori di α e β, specificandone l'unità di misura. Utilizzando il calcolo integrale, calcolare poi il lavoro totale W, in joule, compiuto dal sistema in un ciclo specificandone il segno e approssimando il risultato alle unità.



6. In un laboratorio posto sulla Terra, sotto una campana a vuoto uno ione Ag^+ (carica pari a $+e$, massa $m = 1{,}79 \cdot 10^{-25}$ kg) è lanciato obliquamente verso l'alto con una velocità iniziale di 1,53 m/s inclinata di 45° rispetto all'orizzontale e da un'altezza di 3,20 cm rispetto alla base della campana. La base stessa è elettrizzata con una carica negativa che genera un campo elettrico corrispondente a quello di una distribuzione piana e infinita di carica con densità superficiale di carica $\sigma = -7{,}92 \cdot 10^{-17}\ \text{C/m}^2$. Determinare qual è la velocità con cui lo ione Ag^+ colpisce la base della campana a vuoto e la durata del suo volo.

7. Un fascio di radiazione infrarossa, che si propaga nel vuoto, in 4,16 s fornisce 1,97 J di energia a una superficie piana di area pari a 31,6 cm^2, posta perpendicolarmente all'onda elettromagnetica. Calcolare:

a. la densità volumica media di energia dell'onda elettromagnetica infrarossa;

b. i valori massimi del campo elettrico e del campo magnetico dell'onda.

8. Un esperimento sull'effetto Compton viene eseguito con raggi X che hanno una frequenza di $3{,}220 \cdot 10^{17}$ Hz.
Determinare l'energia dei fotoni che hanno subito la diffusione Compton a un angolo di 130,3° e la corrispondente velocità iniziale dell'elettrone coinvolto nella diffusione.

Costanti fisiche	
Carica elementare	$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C
Costante di Planck	$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J · s
Costante dielettrica del vuoto	$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ F/m
Massa dell'elettrone	$m_e = 9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg
Permeabilità magnetica del vuoto	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A^2
Velocità della luce nel vuoto	$c = 2{,}998 \cdot 10^8$ m/s

Questo file è un'estensione dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Graziella Barozzi e Anna Trifone e dei corsi di fisica di Ugo Amaldi; John D Cutnell, Kenneth W Johnson; David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker; Claudio Romeni.
Hanno collaborato Andrea Betti, Lorenzo Meneghini, Steave Selvaduray e Pietro Velonà.