ANNO SCOLASTICO 2012 - 13

SIMULAZIONE DELLA PROVA DI MATEMATICA DELL'ESAME DI STATO

INDIRIZZO: SCIENTIFICO CORSO DI ORDINAMENTO

Risoluzione

Problema 1

a) Poiché per ogni valore di a l'espressione analitica di f è un polinomio senza termine noto, tutti i grafici delle funzioni f hanno in comune l'origine. Dimostriamo che è l'unico punto comune a tutti i grafici delle funzioni f. I punti comuni a tutte le funzioni sono quelli le cui coordinate soddisfano la condizione $y = ax^3 + x \ \forall a \in \mathbf{R}$. Ciò significa che l'equazione

$$ax^3 + x - y = 0$$

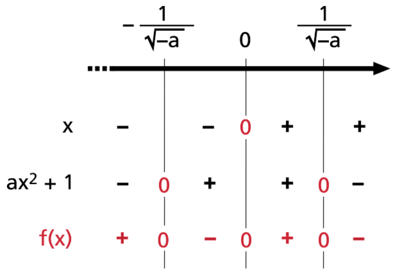
deve risultare indeterminata rispetto all'incognita a. Trattandosi di un'equazione di primo grado in una incognita, essa è indeterminata se e solo se i suoi coefficienti sono entrambi nulli, ossia se

$$\begin{cases} x^3 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

L'origine è dunque l'unico punto comune a tutti i grafici delle funzioni f. Anche l'espressione della funzione g manca del termine noto e quindi il grafico di g passa per l'origine.
Studiamo ora le funzioni $f(x) = ax^3 + x$.

- Dominio: $\mathbf{R} \ \forall a \in \mathbf{R}$.
- Parità: $f(-x) = a(-x)^3 + (-x) = -ax^3 - x = -f(x), \forall a \in \mathbf{R}, \ \forall x \in \mathbf{R}$, le f sono dispari.
- Limiti:
  se $a \geq 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;
  se $a < 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
  Non ci sono asintoti verticali e orizzontali.
  Se $a \neq 0$, non ci sono neppure asintoti obliqui, in quanto:
  $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^3 + x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}(ax^2 + 1) = \infty.$
  Se $a = 0$, la funzione si riduce a $f(x) = x$ e ammette l'asintoto obliquo di equazione $y = x$, che coincide con il grafico della funzione stessa.
- Segno:
  $f(x) \geq 0$ se $ax^3 + x \geq 0 \ \rightarrow \ x(ax^2 + 1) \geq 0$;
  se $a \geq 0$, $f(x) \geq 0$ per $x \geq 0$;
  se $a < 0$, $f(x) \geq 0$ per $\left[\begin{array}{l} x \geq 0 \\ (ax^2 + 1) \geq 0 \rightarrow -\dfrac{1}{\sqrt{-a}} \leq x \leq \dfrac{1}{\sqrt{-a}} \end{array}\right. \rightarrow$
  $\rightarrow \ f(x) \geq 0$ per $x \leq -\dfrac{1}{\sqrt{-a}} \ \vee \ 0 \leq x \leq \dfrac{1}{\sqrt{-a}}$ (figura 1).

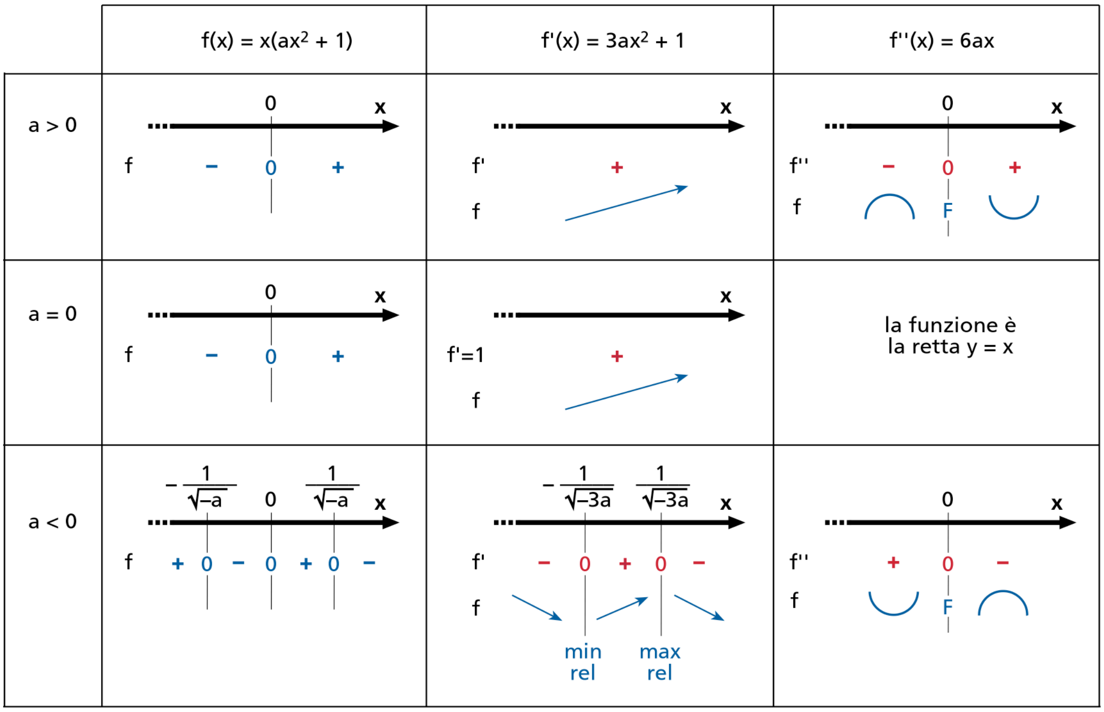
Figura 1



- Derivata prima: $f'(x) = 3ax^2 + 1 \quad \forall a \in \mathbf{R}$.
  Studiamo il segno di $f'(x)$:
  se $a \geq 0$, $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$;
  se $a < 0$, $f'(x) \geq 0$ se $-\dfrac{1}{\sqrt{-3a}} \leq x \leq \dfrac{1}{\sqrt{-3a}}$.

- Derivata seconda: $f''(x) = 6ax \quad \forall a \in \mathbf{R}$.
  Studiamo il segno di $f''(x)$:
  se $a > 0$, $f''(x) \geq 0$ se $x \geq 0$;
  se $a = 0$, $f''(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$;
  se $a < 0$, $f''(x) \geq 0$ se $x \leq 0$.

Riassumiamo lo studio del segno, della crescenza e della concavità delle funzioni f nella seguente tabella.



Studiamo ora la funzione $g(x)$.

- Dominio: **R**.
- Parità: $g(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 = x^4 - x^2 = g(x) \quad \forall x \in \mathbf{R} \rightarrow \quad g$ è pari.

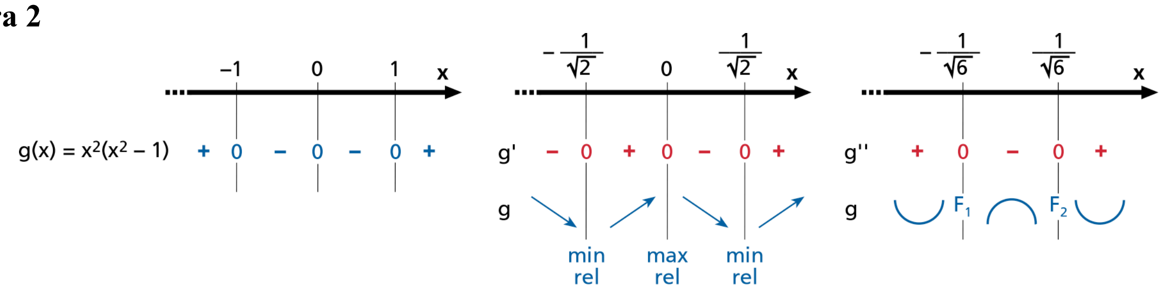
- Limiti:
  $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = +\infty.$
  Non ci sono asintoti verticali o orizzontali.
  Non ci sono asintoti obliqui, in quanto:
  $$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^4 - x^2}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} (x^3 - x) = \pm\infty.$$

- Derivata prima: $g'(x) = 4x^3 - 2x.$
  Studiamo il segno di $g'(x)$:
  $$g'(x) > 0 \text{ se } 4x^3 - 2x > 0 \rightarrow 2x(2x^2 - 1) > 0 \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0 \vee x > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- Derivata seconda: $g''(x) = 12x^2 - 2.$
  Studiamo il segno di $g''(x)$:
  $$g''(x) > 0 \text{ se } x < -\frac{1}{\sqrt{6}} \vee x > \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

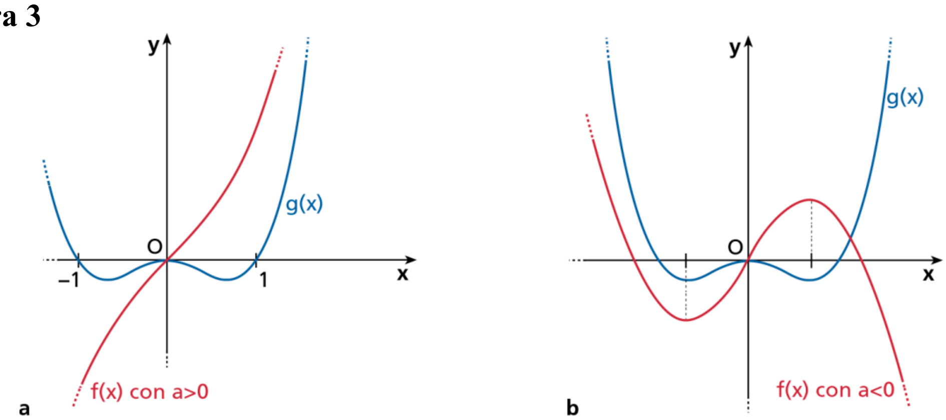
Riportiamo lo studio del segno, della crescenza e della concavità della funzione g nei seguenti grafici.

Figura 2



Rappresentiamo i grafici delle funzioni (figura 3).

Figura 3



b) L'equazione assegnata esprime la condizione $f(x) = g(x)$; le soluzioni pertanto corrispondono ai punti di intersezione dei grafici delle due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, ovvero agli zeri della funzione:

$$\delta(x) = g(x) - f(x) = x^4 - x^2 - ax^3 - x.$$

I caso: $a \geq 0$.
Osservando la figura 3*a* notiamo che i grafici di *f* e *g* si incontrano, oltre che in *O*, anche in un punto di ascissa maggiore di 1. Infatti:

$$\delta(1) = 1 - 1 - a - 1 = -a - 1 < 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} \delta(x) = +\infty,$$

dunque, essendo $\delta(x)$ continua, per il teorema di esistenza degli zeri, essa si annulla almeno una volta per $x > 1$. Quindi i grafici delle due funzioni si incontrano in almeno un punto con ascissa maggiore di 1 e perciò, considerando anche il punto (0; 0), hanno almeno due punti di intersezione.

II caso: $a < 0$.
Analogamente, dall'esame della figura 3*b* notiamo che i grafici di *f* e *g* si incontrano almeno una volta per $x > 0$, quindi hanno almeno due punti di intersezione.

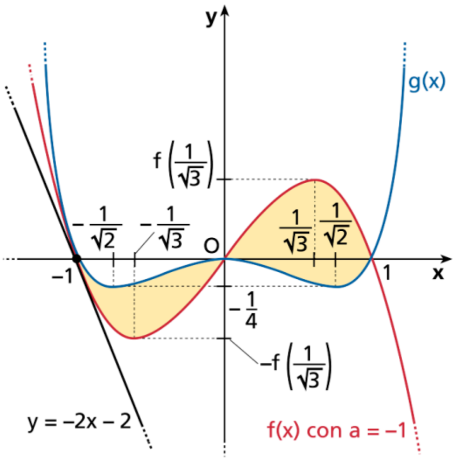
c) In $x = -1$ devono essere verificate le due condizioni:

$$\begin{cases} f(-1) = g(-1) \\ f'(-1) = g'(-1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -a - 1 = 1 - 1 \\ 3a + 1 = -4 + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = -1 \end{cases} \rightarrow \quad a = -1.$$

Sostituiamo il valore $a = -1$ nella funzione *f* e nei risultati della tabella di pagina 2, quindi disegniamo i grafici (figura 4).
La retta tangente comune ha equazione:

$$y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \quad \rightarrow \quad y - 0 = -2(x + 1) \quad \rightarrow \quad y = -2x - 2.$$

Figura 4



d) La regione di piano di cui si deve trovare l'area è formata da due parti (figura 4): la prima con $-1 \leq x \leq 0$, la seconda con $0 \leq x \leq 1$. L'area è data dalla somma dei seguenti due integrali:

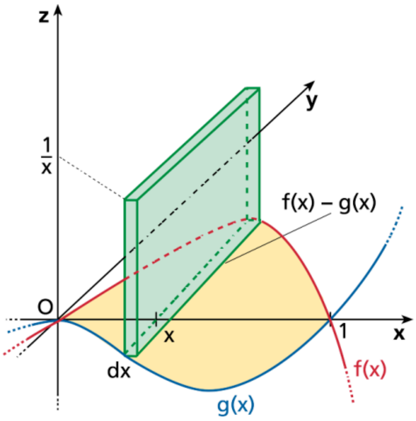
$$\int_{-1}^{0} [g(x) - f(x)]dx + \int_{0}^{1} [f(x) - g(x)]dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^4 - x^2 + x^3 - x)dx + \int_{0}^{1} (-x^3 + x - x^4 + x^2)dx =$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} = \ldots = \frac{7}{60} + \frac{23}{60} = \frac{1}{2}.$$

e) Rappresentiamo in un riferimento cartesiano ortogonale tridimensionale la base del solido, la sezione ottenuta con un generico piano ortogonale all'asse x e il corrispondente elemento infinitesimo di volume. In base ai dati forniti la generica sezione è un rettangolo di altezza $\frac{1}{x}$ e base $f(x)-g(x)$ (figura 5).

Figura 5



Il volume del solido è dato dalla somma degli infiniti elementi infinitesimi compresi nell'intervallo $[0;1]$ dell'asse x.
Il volume dell'elemento infinitesimo generico è:

$$dV = \frac{1}{x}[f(x)-g(x)]dx = \frac{1}{x}(-x^4-x^3+x^2+x)dx = (-x^3-x^2+x+1)dx.$$

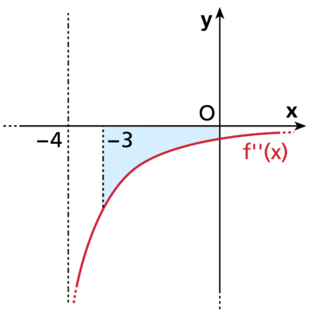
Osserviamo che per x tendente a 0 la sezione ha area finita, anche se l'altezza $\frac{1}{x}$ tende a $+\infty$, in quanto il prodotto $\frac{1}{x}[f(x)-g(x)]$ tende a 1 per x che tende a 0. Possiamo quindi determinare il volume del solido calcolando l'integrale definito:

$$\int_0^1 (-x^3-x^2+x+1)dx = \left[-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1 = \frac{11}{12}.$$

Problema 2

a) L'area richiesta è quella relativa alla parte di piano delimitata dalle rette di equazione $x=-3$ e $x=0$, dall'asse x e dal grafico di $f''(x)$.

Figura 6



Indichiamo tale area con A. Utilizzando l'integrale definito e tenendo conto che $f''(x) < 0$ per $-3 \le x \le 0$, abbiamo:

$$A = \int_{-3}^{0} -f''(x)dx = \int_{0}^{-3} f''(x)dx.$$

Applichiamo il teorema fondamentale del calcolo integrale e, ricordando che una primitiva di $f''(x)$ è $f'(x)$, otteniamo:

$$A = \int_{0}^{-3} f''(x)dx = f'(-3) - f'(0).$$

$f'(-3)$ e $f'(0)$ rappresentano i coefficienti angolari delle rette tangenti al grafico di $f(x)$ rispettivamente nei punti di ascissa –3 e 0, che possiamo ricavare esplicitando in y l'equazione delle rette tangenti in tali punti:

$$4x - y + 14 = 0 \quad \to \quad y = 4x + 14 \quad \to \quad f'(-3) = 4;$$
$$y = x + q \quad \to \quad f'(0) = 1.$$

Sostituendo abbiamo:

$$A = f'(-3) - f'(0) = 4 - 1 = 3.$$

b) Dall'esame del grafico di $f''(x)$ possiamo ricavare alcune informazioni sul grafico probabile di $f'(x)$.

- Dominio.
  Poiché $f''(x)$ è continua in $]-4; +\infty[$, allora $f'(x)$ è continua e derivabile in ogni punto di tale intervallo e quindi il dominio di $f'(x)$ è $D_{f'} =]-4; +\infty[$.
  Nel punto $x = -4$ $f''(x)$ tende a $-\infty$, e poiché $f(x)$ ha un asintoto verticale, allora anche $f'(x) \to \infty$.

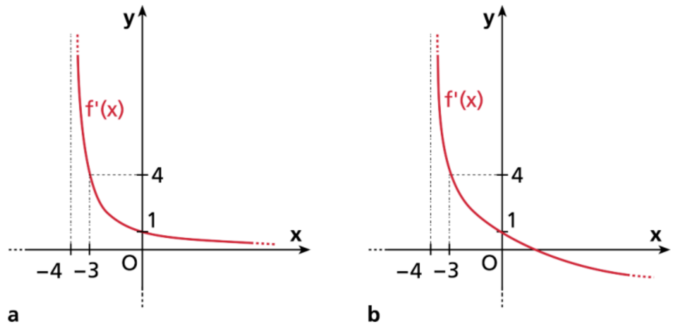
- I punti (–3; 4) e (0; 1) appartengono al grafico di $f'(x)$ per le indicazioni relative alle rette tangenti.

- Derivata prima.
  $\mathrm{D}[f'(x)] = f''(x) < 0$ per $x \in]-4; +\infty[$, pertanto $f'(x)$ è sempre decrescente nel suo dominio $D_{f'}$.

- Limiti agli estremi di $D_{f'}$.
  Per $x = -4$ abbiamo stabilito, analizzando il dominio, che $f'(x) \to \infty$; inoltre, dato che $f'(x)$ è sempre decrescente, deve necessariamente essere $f'(x) \to +\infty$.
  Per $x \to +\infty$, poiché $f''(x) \to 0$, il coefficiente angolare della retta tangente a $f'(x)$ tende a 0; dunque, per $x \to +\infty$, $f'(x)$ ha la concavità rivolta verso l'alto e non possiede l'asintoto obliquo. Non abbiamo elementi sufficienti per stabilire se $f'(x)$ possieda o meno un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$.

Di seguito riportiamo due diversi grafici probabili per $f'(x)$.

Figura 7



c) Determiniamo $f'(x)$ calcolando la primitiva della funzione $f''(x)$ assegnata:

$$f'(x) = \int f''(x)dx = \int -\frac{4}{(x+4)^2}dx = -4\int (x+4)^{-2}dx = -4\frac{(x+4)^{-1}}{-1} + c = \frac{4}{x+4} + c.$$

Poiché il grafico di $f'(x)$ passa per il punto (0; 1), deve essere:

$$1 = 1 + c \quad \rightarrow \quad c = 0.$$

Dunque $f'(x) = \dfrac{4}{x+4}$.

Determiniamo ora $f(x)$ calcolando la primitiva di $f'(x)$:

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{4}{x+4}dx = 4\ln|x+4| + c.$$

Poiché il dominio di $f(x)$ è l'intervallo $]-4; +\infty[$, scriviamo $f(x) = 4\ln(x+4) + c$.
Inoltre, dall'equazione della retta tangente nel punto $x = -3$ otteniamo che il grafico di $f(x)$ passa per il punto $(-3; 2)$. Sostituendo abbiamo:

$$2 = 4\ln(-3+4) + c \quad \rightarrow \quad c = 2.$$

L'equazione di $f(x)$ è allora:

$$f(x) = 4\ln(x+4) + 2.$$

Per rappresentare il grafico di $f(x)$ studiamo la funzione.

- Dominio: $D =]-4; +\infty[$.
- Segno: $f(x) > 0$ se $x > \dfrac{1}{\sqrt{e}} - 4$.
- Intersezione con gli assi: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}} - 4; 0\right)$ e $(0; 4\ln 4 + 2)$.
- Limiti agli estremi di D:

$$\lim_{x\to -4^+} f(x) = \lim_{x\to -4^+} [4\ln(x+4) + 2] = -\infty;$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} [4\ln(x+4) + 2] = +\infty.$$

Constatiamo quindi che la retta di equazione $x = -4$ è asintoto verticale destro per $f(x)$ e che non esiste l'asintoto orizzontale. Osserviamo inoltre che

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4 \ln(x+4) + 2}{x}$$

si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Applichiamo il teorema di De L'Hospital:

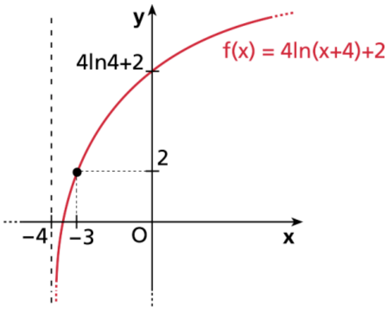
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{D[4 \ln(x+4) + 2]}{D[x]} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{4}{x+4}}{1} = 0.$$

Pertanto $f(x)$ non possiede l'asintoto obliquo.

- Derivata prima, già calcolata: $f'(x) = \frac{4}{x+4}$.
  Dominio: $D =]-4; \ +\infty[$, perché ci restringiamo al dominio di $f(x)$.
  Segno: $f'(x) > 0$ per ogni $x \in D$. Pertanto non sono presenti punti stazionari di minimo, né di massimo, né di flesso a tangente orizzontale.
- Derivata seconda, fornita dalla traccia: $f''(x) = -\frac{4}{(x+4)^2}$.
  Segno: $f''(x) < 0$ per ogni $x \in D$. $f(x)$ ha concavità rivolta verso il basso per ogni $x \in D$; non ci sono punti di flesso con tangente obliqua.

Tracciamo il grafico Γ di $f(x)$.

Figura 8

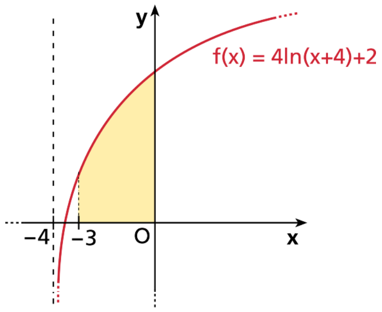


Osserviamo che il grafico Γ può essere dedotto dal grafico della funzione $y = \ln x$ applicando una dopo l'altra tre trasformazioni nel piano:

- traslazione di vettore $\vec{v}(-4; 0)$;
- dilatazione di un fattore 4 rispetto all'asse y;
- traslazione di vettore $\vec{v}(0; 2)$.

d) Calcoliamo l'area della parte di piano compresa tra Γ e l'asse x nell'intervallo [–3; 0] utilizzando l'integrale definito. Per risolvere una parte dell'integrale indefinito associato applichiamo il metodo di integrazione per parti e successivamente, per integrare la funzione razionale fratta che risulta, utilizziamo la divisione tra polinomi:

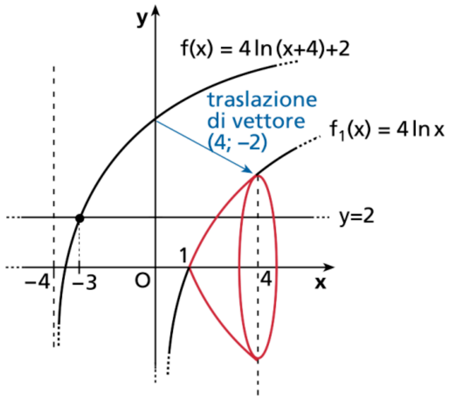
Figura 9



$$\int_{-3}^{0}[4\ln(x+4)+2]dx = 4\int_{-3}^{0}\ln(x+4)dx+\int_{-3}^{0}2dx =$$
$$= 4\left\{[x\ln(x+4)]_{-3}^{0}-\int_{-3}^{0}\frac{x}{x+4}dx\right\}+[2x]_{-3}^{0} =$$
$$= -4\int_{-3}^{0}\left(1-\frac{4}{x+4}\right)dx+6 =$$
$$= -4\int_{-3}^{0}dx+16\int_{-3}^{0}\frac{1}{x+4}dx+6 =$$
$$= -4[x]_{-3}^{0}+16\left[\ln|x+4|\right]_{-3}^{0}+6 =$$
$$= -12+16\ln 4+6 = 16\ln 4-6.$$

e) Il volume richiesto, che indichiamo con V, è equivalente al volume del solido ottenuto dalla rotazione completa attorno all'asse x del tratto con ascissa compresa nell'intervallo [1; 4] della curva $f_1(x)$ che si ricava traslando il grafico Γ di $f(x)$ secondo il vettore $\vec{v}(4;-2)$.

Figura 10



Abbiamo pertanto $f_1(x) = 4\ln x$ e, applicando la formula del volume dei solidi di rotazione, otteniamo:

$$V = \pi\int_{1}^{4}(4\ln x)^2dx = 16\pi\int_{1}^{4}\ln^2 x dx.$$

Calcoliamo per parti l'integrale $\int \ln^2 x dx$.

$$\int 1\cdot\ln^2 x dx = x\ln^2 x-\int x\frac{2\ln x}{x}dx = x\ln^2 x-2\int \ln x dx = x\ln^2 x-2\left[x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx\right] =$$
$$= x\ln^2 x-2x\ln x+2x+c.$$

Abbiamo allora:

$$V = 16\pi[x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x]_1^4 = 16\pi(4\ln^2 4 - 8\ln 4 + 6) = 32\pi(2\ln^2 4 - 4\ln 4 + 3).$$

Questionario

1. Una funzione suriettiva da A a B ha per dominio A e per codominio B. Dato che l'insieme A ha un elemento in più rispetto a B, due tra i sei elementi di A devono avere la stessa immagine in B. Il numero di modi in cui possiamo selezionare tale coppia di elementi di A, è pari al numero di combinazioni semplici di 6 oggetti di classe 2:

$$C_{6,2} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15.$$

Dopo aver fissato la coppia di elementi con la stessa immagine, il numero di modi in cui è possibile associare agli elementi di A gli elementi di B è pari al numero di permutazioni semplici di 5 oggetti:

$$P_5 = 5! = 120.$$

Pertanto il numero complessivo di funzioni suriettive da A a B che possiamo definire è pari a:

$$P_5 \cdot C_{6,2} = 1800.$$

2. Il limite, che si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, può essere risolto con vari metodi.

- Con le formule di bisezione e di duplicazione,

$$\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}, \quad 2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x,$$

otteniamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x + \operatorname{sen} x}{1-\cos x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} + 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2} - 2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)}{\cancel{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\left(\operatorname{sen}\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)} = -1.$$

- Con i limiti notevoli,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

e dividendo numeratore e denominatore per x, otteniamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x + \operatorname{sen} x}{1-\cos x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{x} + \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{\frac{1-\cos x}{x} - \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{0+1}{0-1} = -1.$$

- Applicando il teorema di De L'Hospital, otteniamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x + \operatorname{sen} x}{1-\cos x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{D[1-\cos x + \operatorname{sen} x]}{D[1-\cos x - \operatorname{sen} x]} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x} = \frac{0+1}{0-1} = -1.$$

- Ricorrendo al principio di sostituzione degli infinitesimi, e operando quindi le sostituzioni

  $\operatorname{sen} x \approx x \quad \text{e} \quad 1-\cos x \approx \dfrac{x^2}{2}$,

  otteniamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\operatorname{sen} x}{1-\cos x-\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+x}{\frac{x^2}{2}-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\left(\frac{x}{2}+1\right)}{\cancel{x}\left(\frac{x}{2}-1\right)}=-1.$$

3. Osserviamo che la quantità venduta:

- è positiva, o nulla, se:

  $500-25p \geq 0 \quad \rightarrow \quad p \leq 20,$

  cioè se il prezzo unitario non supera € 20;

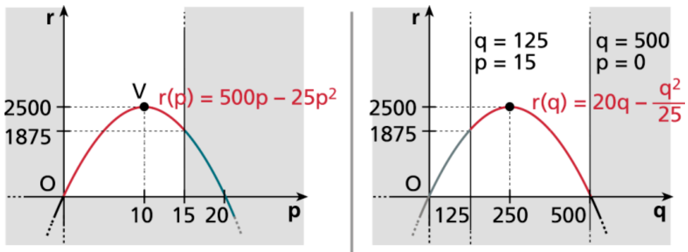
- assume il valore massimo $q=500$ se $p=0$.

Il ricavo è dato dal prodotto qp del prezzo unitario p per la quantità venduta q; sostituendo a q la sua espressione in funzione di p, e tenendo conto della limitazione, otteniamo:

$$r(p)=qp=500p-25p^2, \qquad \text{con } 0 \leq p \leq 15.$$

$r(p)$ descrive un arco di parabola con concavità verso il basso e ascissa compresa fra 0 e 15 (figura 11*a*).

Figura 11



a. Ricavo in funzione del prezzo unitario.

b. Ricavo in funzione della quantità venduta.

Le coordinate del vertice della parabola sono: $p_V=-\dfrac{b}{2a}=10, \qquad r_V=r(10)=2500.$

Dato che $p_V \leq 15$, il vertice rappresenta il punto in cui il ricavo è massimo.
Il ricavo massimo è dunque pari a € 2500,00 e si ottiene in corrispondenza del prezzo unitario di vendita di € 10,00; la quantità venduta che dà il massimo ricavo è 250.
La funzione che dà il ricavo in funzione della quantità venduta si ottiene ancora dal prodotto qp; esprimendo p in funzione di q, otteniamo:

$$q=500-25p \quad \rightarrow \quad p=20-\frac{1}{25}q, \qquad r(q)=qp=20q-\frac{1}{25}q^2.$$

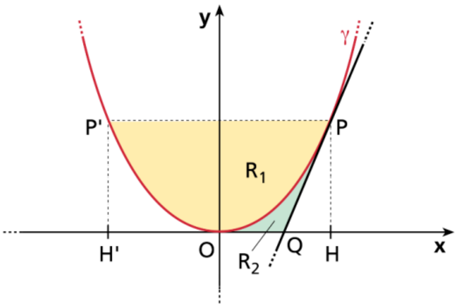
Tracciamo il grafico (figura 11*b*) tenendo conto delle limitazioni:

Se $p = 0,\ q = 500$; se $p = 15,\ q = 125$; quindi q è compreso fra 125 e 500.

Ritroviamo che il ricavo massimo si ha in corrispondenza di $q = 250$.

4. Disegniamo la generica parabola di equazione $y = kx^2$, con $k > 0$, assieme alla retta tangente nel punto P e alla parallela all'asse x (figura 12).

Figura 12



Il segmento parabolico individuato dalla corda PP' è indicato con R_1 in figura, mentre il triangolo curvilineo è indicato con R_2.

Il generico punto P ha coordinate $P(a;\ ka^2)$, con $a > 0$.

L'area di un segmento parabolico, per la formula di Archimede, è pari ai $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo circoscritto, quindi l'area di R_1 è data da:

$$A_1 = \frac{2}{3} \cdot \overline{PP'} \cdot \overline{PH} = \frac{2}{3} \cdot 2a \cdot ka^2 = \frac{4}{3} ka^3.$$

Possiamo calcolare l'area di R_2 per differenza: dall'area delimitata dal grafico di γ nell'intervallo $[0; a]$ sottraiamo l'area del triangolo QHP.
Determiniamo innanzi tutto le coordinate di Q.
Retta tangente a γ in P:

$$y - y_P = m \cdot (x - x_P) \quad \rightarrow \quad y - ka^2 = 2ka \cdot (x - a) \quad \rightarrow \quad y = 2kax - ka^2,$$

dove $m = y'(x_P) = y'(a) = 2ka$.
Coordinate del punto Q:

$$\begin{cases} y = 2kax - ka^2 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2kax = ka^2 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{2} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow Q\left(\frac{a}{2}; 0\right).$$

L'area di R_2 vale dunque:

$$A_2 = \int_0^a kx^2 dx - \frac{1}{2} \cdot \left(a - \frac{a}{2}\right) \cdot ka^2 = \left[\frac{kx^3}{3}\right]_0^a - \frac{ka^3}{4} = \frac{ka^3}{3} - \frac{ka^3}{4} = \frac{ka^3}{12}.$$

Il rapporto fra le due aree è:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{4ka^3}{3} \cdot \frac{12}{ka^3} = 16.$$

Dato che il rapporto è costante al variare delle coordinate di P, il limite richiesto è 16.

5. La funzione $f(x)$, essendo ovunque continua e derivabile, è in particolare continua nell'intervallo chiuso [0; 1] e derivabile nell'intervallo aperto]0; 1[. Sono dunque soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange, quindi esiste $c \in$]0; 1[tale che:

$$f'(c) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} \quad \rightarrow \quad f'(c) = f(1)-f(0).$$

Poiché $f'(x) < e^x \ \forall x \in \mathbf{R}$ e $c \in]0; 1[$, risulta:

$$f'(c) < e^c < e \quad \rightarrow \quad f(1)-f(0) < e.$$

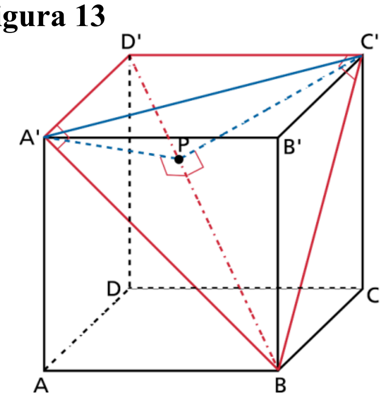
La disuguaglianza si può dimostrare anche per altra via.
Poiché $f'(x) < e^x \ \forall x \in \mathbf{R}$, risulta:

$$\int_0^1 f'(x)dx < \int_0^1 e^x dx \quad \rightarrow \quad [f(x)]_0^1 < [e^x]_0^1 \quad \rightarrow \quad f(1)-f(0) < e-1 < e.$$

In particolare, vale la disuguaglianza più restrittiva $f(1)-f(0) < e-1$.

6. I triangoli $A'D'B$ e $C'D'B$, rettangoli rispettivamente in A' e C', sono congruenti perché hanno l'ipotenusa in comune e i cateti ordinatamente congruenti. Sono quindi congruenti anche le altezze relative all'ipotenusa, che cadono sullo stesso punto P (figura 13).

Figura 13



$D'B$ è dunque perpendicolare alle rette $A'P$ e PC', pertanto è perpendicolare al piano $A'PC'$ che le contiene: tale piano è perciò una sezione normale del diedro convesso di facce $A'D'B$ e $C'D'B$.

Applichiamo ora il teorema del coseno al triangolo $A'PC'$ per determinare l'ampiezza dell'angolo $A'\hat{P}C'$:

$$\overline{A'C'}^2 = \overline{A'P}^2 + \overline{C'P}^2 - 2\overline{A'P}\cdot\overline{C'P}\cos A'\hat{P}C',$$
$$\overline{A'C'}^2 = 2\overline{A'P}^2 - 2\overline{A'P}^2\cos A'\hat{P}C',$$

$$\cos A'\hat{P}C' = \frac{2\overline{A'P}^2 - \overline{A'C'}^2}{2\overline{A'P}^2}.$$

Esprimiamo tutti gli elementi in funzione della lunghezza *a* dello spigolo del cubo:

$$\overline{A'C'} = \overline{A'B} = a\sqrt{2}; \quad \overline{A'P} = \frac{\overline{A'B}\cdot\overline{A'D'}}{\overline{BD'}} = \frac{a\sqrt{2}\cdot a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}a.$$

Calcoliamo l'ampiezza del diedro:

$$\cos A'\hat{P}C' = \frac{2\cdot\frac{6}{9}a^2 - 2a^2}{2\cdot\frac{6}{9}a^2} = -\frac{1}{2}, \qquad A'\hat{P}C' = \frac{2}{3}\pi.$$

7. La funzione data ha per dominio $\mathbf{R}$ e le sue restrizioni ai tre intervalli indicati sono continue. La funzione, quindi, è continua in $\mathbf{R}$ se lo è nei punti $x = 0$ e $x = 2$.
   Condizione per la continuità in $x = 0$ (dato che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$):

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad \lim_{x\to 0^-}(x^2 + p^2) = f(0) \quad \rightarrow \quad p^2 = p \quad \rightarrow \quad p = 0 \ \vee \ p = 1.$$

   Condizione per la continuità in $x = 2$ (dato che $\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$):

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad \lim_{x\to 2^-} p = f(2) \quad \rightarrow \quad p = \frac{2+q}{3} \quad \rightarrow \quad q = 3p - 2.$$

   Abbiamo due casi:

   - $p = 0 \quad \rightarrow \quad q = -2;$
   - $p = 1 \quad \rightarrow \quad q = 1.$

   Le coppie ordinate di valori $(p; q)$ per i quali la funzione è continua sono dunque: $(0; -2)$, $(1; 1)$.

8. Data una funzione *f* continua in $\mathbf{R}$, la sua funzione integrale di punto iniziale *a* è:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, questa funzione integrale è derivabile e risulta:

$$F'(x) = f(x).$$

Fissiamo dunque a piacere un punto iniziale *a* e applichiamo all'integrale dato le proprietà di additività e di scambio degli estremi di integrazione dell'integrale definito:

$$g(x) = \int_x^{2x} f(t)dt = \int_x^a f(t)dt + \int_a^{2x} f(t)dt = -\int_a^x f(t)dt + \int_a^{2x} f(t)dt.$$

Calcoliamo la derivata di $g(x)$, osservando che il secondo addendo è una funzione composta:

$$g'(x) = -f(x) + f(2x) \cdot \mathrm{D}[2x] = -f(x) + 2f(2x).$$

Ora calcoliamo i risultati richiesti, tenendo conto dei dati noti del problema:

$$g(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0;$$
$$g'(0) = -f(0) + 2f(2 \cdot 0) = -\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2};$$
$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + 2 \cdot 1 = \frac{7}{4}.$$

9. Condizione necessaria, ma non sufficiente, perché una funzione sia derivabile in un punto è la continuità in tale punto. In $x = 1$ abbiamo:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^3 - 2x) = -1;$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \ln x = 0.$$

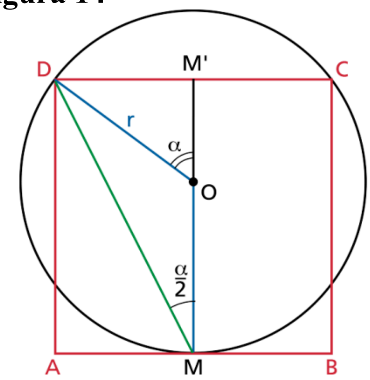
In $x = 1$ la funzione presenta una discontinuità (di I specie), quindi non è derivabile e la proposizione è falsa.
Possiamo dimostrare la non derivabilità in $x = 1$ anche partendo dal rapporto incrementale.
Consideriamo separatamente il rapporto incrementale sinistro e destro, e calcoliamo il limite, per $h \to 0^-$, del rapporto incrementale sinistro.

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{[(1+h)^3 - 2(1+h)] - \ln 1}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{-1 + h + 3h^2 + h^3}{h} = \lim_{h \to 0^-} \left(-\frac{1}{h} + 1 + 3h + h^2\right) = +\infty.$$

La funzione non ammette derivata sinistra in $x = 1$ e quindi non è ivi derivabile. Infatti condizione necessaria e sufficiente perché una funzione sia derivabile in un punto è che ammetta la derivata destra e sinistra e che esse siano coincidenti. L'errore nella proposizione sta nell'identificare la derivata sinistra (o destra) in un punto x_0 con il limite della derivata, calcolata in un intorno sinistro (o destro) di x_0, per x tendente a x_0 da sinistra (o da destra), anziché con il limite, sinistro o destro, del rapporto incrementale.

10. Per il teorema della corda, posto $\overline{DC} = l$, si ha $l = 2r \operatorname{sen} \alpha$.

Figura 14



Per il secondo teorema dei triangoli rettangoli, nel triangolo $DM'M$ (figura 14) è

$$\overline{DM'} = \overline{M'M} \operatorname{tg} D\hat{M}M',$$

e cioè:

$$\frac{l}{2} = l \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \quad \to \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}.$$

Per le formule parametriche è:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5}.$$

Sostituendo nella relazione iniziale si ha

$$l = 2r \cdot \frac{4}{5},$$

da cui:

$$\frac{r}{l} = \frac{5}{8}.$$