ANNO SCOLASTICO 2012 - 13

SIMULAZIONE DELLA PROVA DI MATEMATICA DELL'ESAME DI STATO

INDIRIZZO: SCIENTIFICO CORSO SPERIMENTALE

Risoluzione

Problema 1

Determiniamo le caratteristiche valide per tutte le funzioni della famiglia.

- Dominio: $D = \mathbf{R}$.
- Derivata prima: $y' = k - e^{2x} + (1-x)2e^{2x} = k + (1-2x)e^{2x}$.
- Derivata seconda: $y'' = -2e^{2x} + (1-2x)2e^{2x} = -4xe^{2x}$.

Tutte le funzioni della famiglia sono continue e derivabili indefinitamente.

a) I punti di intersezione comuni ai grafici di tutte le funzioni sono quelli le cui coordinate soddisfano l'uguaglianza $y = kx + (1-x)e^{2x} \quad \forall k \in \mathbf{R}$. Ciò significa che l'equazione

$$kx + (1-x)e^{2x} - y = 0$$

è indeterminata rispetto all'incognita *k*. Trattandosi di un'equazione di primo grado in un'incognita, essa è indeterminata se e solo se i suoi coefficienti sono entrambi nulli, ossia:

$$\begin{cases} x = 0 \\ (1-x)e^{2x} - y = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}.$$

I grafici di tutte le funzioni passano pertanto per il punto $A(0;1)$. Verifichiamo che tale punto è anche l'unico flesso per ciascuna funzione.
Studiamo il segno della derivata seconda:

$$y'' = -4xe^{2x} > 0 \quad \rightarrow \quad x < 0.$$

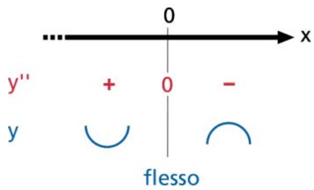


Figura 1

La concavità è positiva per $x < 0$, negativa per $x > 0$: il punto *A* è l'unico punto di flesso $\forall k \in \mathbf{R}$.

b) Poiché tutte le funzioni sono continue in $\mathbf{R}$, nessuna presenta asintoti verticali.
Ricerchiamo eventuali asintoti orizzontali e obliqui analizzando il comportamento delle funzioni per *x* tendente a $-\infty$ e a $+\infty$.
Il calcolo del limite $\lim_{x\to-\infty}[kx + (1-x)e^{2x}]$ presenta la difficoltà della discussione del segno del parametro *k*; partiamo perciò dalla ricerca degli asintoti obliqui.

Esaminiamo la situazione per $x \to -\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{kx + (1-x)e^{2x}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(k + \frac{1-x}{x}e^{2x}\right) = k;$$

$$q = \lim_{x\to-\infty}[y(x) - kx] = \lim_{x\to-\infty}[kx + (1-x)e^{2x} - kx] = \lim_{x\to-\infty}(1-x)e^{2x}.$$

Questo limite si presenta nella forma indeterminata $\infty \cdot 0$; riconduciamola alla forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ e applichiamo il teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to-\infty}(1-x)e^{2x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1-x}{e^{-2x}}; \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{D}[1-x]}{\mathrm{D}[e^{-2x}]} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{-2e^{-2x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}e^{2x} = 0 \quad \to$$
$$\to \quad \lim_{x\to-\infty}(1-x)e^{2x} = 0.$$

La generica funzione ha dunque come asintoto obliquo, per $x \to -\infty$, la retta di equazione:

$$y = kx.$$

Nel caso $k = 0$, l'asintoto è orizzontale e coincide con l'asse delle ascisse.
Esaminiamo ora la situazione per $x \to +\infty$:

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(k + \frac{1-x}{x}e^{2x}\right) = -\infty \quad \to \quad \text{nessun asintoto obliquo per } x \to +\infty.$$

Il risultato di questo limite permette di escludere anche l'asintoto orizzontale per $x \to +\infty$; infatti:

$$\lim_{x\to+\infty}[kx + (1-x)e^{2x}] = \lim_{x\to+\infty} x\left(k + \frac{(1-x)e^{2x}}{x}\right) = +\infty \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Allora l'unico asintoto della generica funzione della famiglia è la retta di equazione $y = kx$. Essa coincide con la retta $y = -\frac{1}{2}x$ se $k = -\frac{1}{2}$.
Determiniamo le eventuali intersezioni tra il grafico della generica funzione e il corrispondente asintoto:

$$\begin{cases} y = kx + (1-x)e^{2x} \\ y = kx \end{cases} \to \begin{cases} kx = kx + (1-x)e^{2x} \\ y = kx \end{cases} \to \begin{cases} x = 1 \\ y = k \end{cases}.$$

Il grafico della generica funzione e il corrispondente asintoto si intersecano quindi in un solo punto di coordinate (1; k).

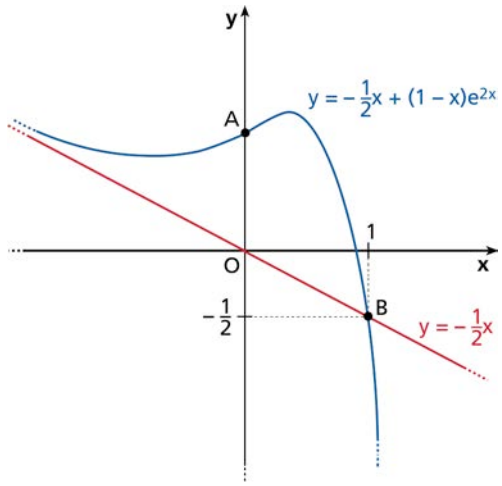
c) Se $k = -\frac{1}{2}$, la funzione diventa: $y = -\frac{1}{2}x + (1-x)e^{2x}$.

Dai punti precedenti sappiamo già che la funzione:

- ha dominio $D = \mathbf{R}$;
- ha un solo punto di flesso $A(0;\ 1)$, con concavità verso l'alto per $x < 0$ e verso il basso per $x > 0$;
- ha asintoto obliquo di equazione $y = -\frac{1}{2}x$ per $x \to -\infty$;
- tende a $-\infty$ per $x \to +\infty$;
- interseca l'asintoto obliquo nel punto $B\left(1; -\frac{1}{2}\right)$.

Con questi elementi possiamo già disegnare un grafico probabile della funzione (figura 2).

Figura 2



Possiamo anche ipotizzare che la funzione abbia un minimo relativo e un massimo relativo.
Per verificarlo, studiamo la derivata prima:

$$y' = -\frac{1}{2} + (1-2x)e^{2x}.$$

Studiamo il segno di y'.

$$y' \geq 0 \to -\frac{1}{2} + (1-2x)e^{2x} \geq 0 \to (1-2x)e^{2x} \geq \frac{1}{2}.$$

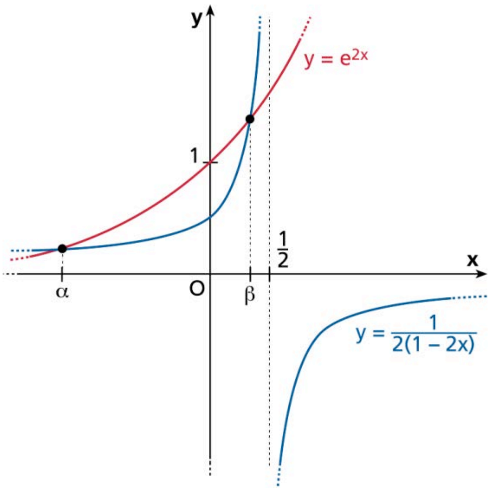
Se $1 - 2x > 0$ $\left(\text{cioè se } x < \frac{1}{2}\right)$, possiamo scrivere:

$$e^{2x} \geq \frac{1}{2(1-2x)}.$$

Risolviamo graficamente questa disequazione (figura 3), considerando le funzioni:

$$y = e^{2x},$$
$$y = \frac{1}{2(1-2x)}, \text{ funzione omografica di centro } \left(\frac{1}{2}; 0\right).$$

Figura 3

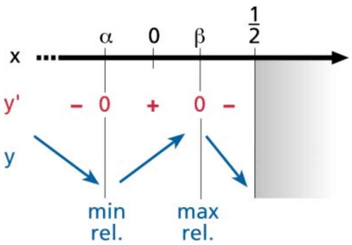


Dal grafico deduciamo che per $\alpha \le x \le \beta$, con $\alpha < 0$ e $0 < \beta < \frac{1}{2}$, risulta:

$$e^{2x} \ge \frac{1}{2(1-2x)} \quad \to \quad y' \ge 0.$$

Possiamo quindi disegnare il grafico dei segni della derivata prima (figura 4).

Figura 4

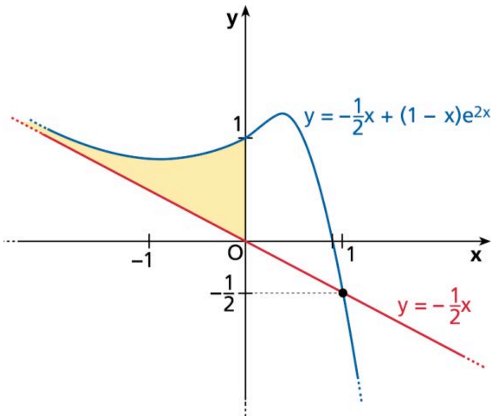


La funzione ha dunque un minimo relativo di ascissa negativa e un massimo relativo di ascissa compresa fra 0 e $\frac{1}{2}$.

Per $x > \frac{1}{2}$, la funzione ha sempre la concavità verso il basso, quindi non ha né minimi né massimi relativi.

d) La regione di piano di cui dobbiamo calcolare l'area è quella evidenziata nella figura 5.

Figura 5



L'area è data dal seguente integrale improprio:

$$S = \int_{-\infty}^{0}\left[-\frac{1}{2}x + (1-x)e^{2x} - \left(-\frac{1}{2}x\right)\right]dx = \int_{-\infty}^{0}(1-x)e^{2x}dx = \lim_{\delta\to-\infty}\int_{\delta}^{0}(1-x)e^{2x}dx.$$

Eseguiamo il calcolo con il metodo di integrazione per parti:

$$S_\delta = \int_{\delta}^{0}(1-x)e^{2x}dx = \left[(1-x)\frac{e^{2x}}{2}\right]_{\delta}^{0} + \frac{1}{2}\int_{\delta}^{0}e^{2x}dx = \frac{1}{2} - \frac{(1-\delta)e^{2\delta}}{2} + \frac{1}{4}\left[e^{2x}\right]_{\delta}^{0} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{(1-\delta)e^{2\delta}}{2} + \frac{1}{4} - \frac{e^{2\delta}}{4} = \frac{3}{4} - \frac{3-2\delta}{4}e^{2\delta}.$$

Nel passaggio al limite per $\delta \to -\infty$, il secondo addendo dà luogo a una forma indeterminata $\infty \cdot 0$; trasformiamola in una forma $\frac{\infty}{\infty}$ e applichiamo il teorema di De L'Hospital:

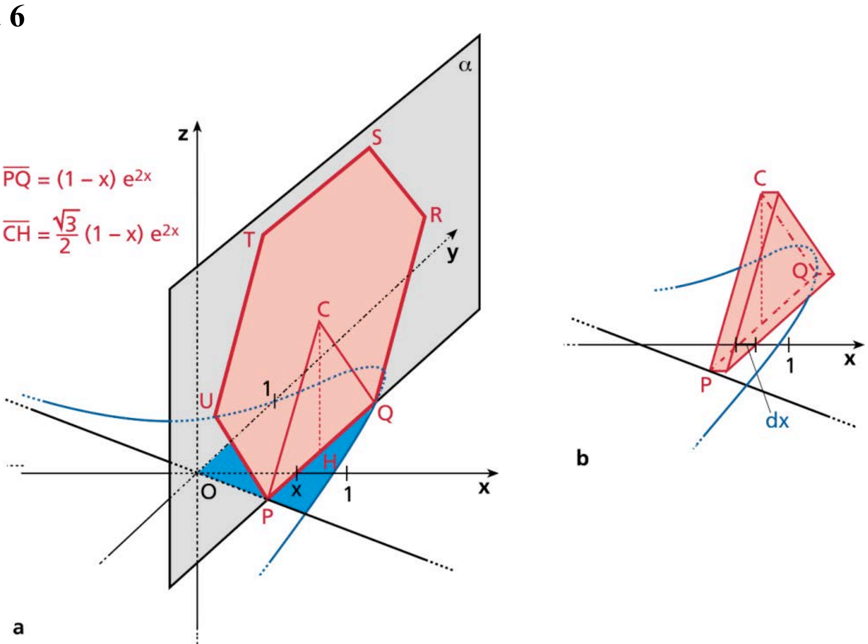
$$\lim_{\delta\to-\infty}\frac{3-2\delta}{4}e^{2\delta} = \lim_{\delta\to-\infty}\frac{3-2\delta}{4e^{-2\delta}}; \quad \lim_{\delta\to-\infty}\frac{-2}{-8e^{-2\delta}} = 0 \quad \to \quad \lim_{\delta\to-\infty}\frac{3-2\delta}{4}e^{2\delta} = 0.$$

L'area della regione indicata è pertanto data da:

$$S = \lim_{\delta\to-\infty} S_\delta = \frac{3}{4}.$$

e) Nel piano $(x; y)$ di un riferimento $O\,(x; y; z)$ tracciamo il grafico della funzione ed evidenziamo l'area di base del solido. Intersechiamo tale area con un piano α perpendicolare all'asse x e disegniamo l'esagono regolare *PQRSTU*, sezione dello stesso solido (figura 6*a*).

Figura 6



L'elemento infinitesimo di volume è dato da:

$$dV = S_{es}dx = 6\cdot\frac{1}{2}\overline{PQ}\cdot\overline{HC}\cdot dx = \frac{3\sqrt{3}}{2}\overline{PQ}^2dx = \frac{3\sqrt{3}}{2}(1-x)^2e^{4x}dx.$$

(Nella figura 6*b* è rappresentata la parte di volume infinitesimo generata dal triangolo equilatero *PQC*.)
Il volume richiesto è la somma degli infiniti volumi infinitesimi compresi fra $x=0$ e $x=1$, cioè è dato dall'integrale definito:

$$V = \int_0^1 \frac{3\sqrt{3}}{2}(1-x)^2e^{4x}dx = \frac{3\sqrt{3}}{2}\int_0^1 (1-x)^2e^{4x}dx.$$

Calcoliamo l'integrale con il metodo di integrazione per parti:

$$\int_0^1 (1-x)^2e^{4x}dx = \left[(1-x)^2\frac{e^{4x}}{4}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(-2)(1-x)e^{4x}}{4}dx =$$
$$= -\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left\{\left[(1-x)\frac{e^{4x}}{4}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-e^{4x}}{4}dx\right\} = -\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{4}+\left[\frac{e^{4x}}{16}\right]_0^1\right\} =$$
$$= -\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{e^4-1}{32} = \frac{e^4-13}{32}.$$

Il volume del solido è dunque: $V = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{e^4-13}{32} = \frac{3\sqrt{3}(e^4-13)}{64}.$

Problema 2

a) Nella generica funzione omografica di equazione

$$y = \frac{ax+b}{cx+d},$$

poiché è necessariamente $c \neq 0$, possiamo porre $c=1$; quindi, poiché il centro della funzione omografica ha coordinate

$$C\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right) \quad \rightarrow \quad C(-d;a),$$

affinché il centro sia nel punto (1; 1) deve essere $a=1$ e $d=-1$. Inoltre, poiché *P* appartiene al grafico di $f'(x)$, è $b=-2$, pertanto

$$f'(x) = \frac{x-2}{x-1}.$$

Determiniamo $f(x)$ come primitiva di $f'(x)$:

$$f(x) = \int \frac{x-2}{x-1}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{x-1}\right) dx = x - \ln|x-1| + k.$$

La funzione $f(x)$ è, per ipotesi, definita per $x > 1$, dunque:

$$f(x) = x - \ln(x-1) + k;$$

inoltre, siccome il grafico della funzione interseca l'asse delle ascisse in P, si ha $f(2) = 0$, ovvero:

$$2 - \ln 1 + k = 0 \quad \rightarrow \quad k = -2.$$

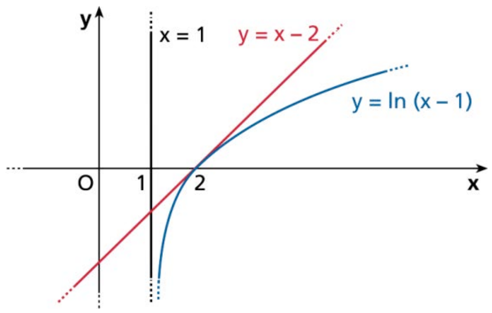
Pertanto:

$$f(x) = x - 2 - \ln(x-1).$$

b) Studiamo la funzione.

- Dominio: $]1; +\infty[$.
- Parità: la funzione non è né pari né dispari.
- Intersezione con gli assi. Dato il dominio, non esiste alcuna intersezione con l'asse delle ordinate, mentre per quanto riguarda l'intersezione con l'asse delle ascisse bisogna risolvere l'equazione:
  $$x - 2 - \ln(x-1) = 0 \quad \rightarrow \quad x - 2 = \ln(x-1).$$
  Risolviamo graficamente l'equazione: poniamo $y = x - 2$ e $y = \ln(x-1)$, rappresentiamo le due funzioni e troviamo i punti comuni.

  Figura 7

  Dal grafico delle due funzioni $y = x - 2$ e $y = \ln(x-1)$ si deduce che la prima è la retta tangente alla seconda nel punto P, quindi l'equazione ha come unica soluzione (doppia) $x = 2$.

- Segno. $f(x) > 0$ se:
  $$x - 2 - \ln(x-1) > 0 \quad \rightarrow \quad x - 2 > \ln(x-1);$$
  dal grafico precedente deduciamo che $x - 2 > \ln(x-1)$ per $x \neq 2$, quindi nel suo dominio la funzione è sempre positiva, tranne che per $x = 2$.

- Limiti.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} [x-2-\ln(x-1)] = +\infty,$$

quindi la retta di equazione $x=1$ è un asintoto verticale (destro).
Inoltre:

$$\lim_{x\to+\infty} [x-2-\ln(x-1)] = +\infty,$$

quindi non esiste l'asintoto orizzontale. Se esistesse l'asintoto obliquo, esso avrebbe equazione $y = mx + q$, dove:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{[x-2-\ln(x-1)]}{x} = 1$$

e

$$q = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} [x-2-\ln(x-1)-x] = \lim_{x\to+\infty} [-2-\ln(x-1)] = -\infty.$$

Poiché q non ha valore finito, non esiste nemmeno l'asintoto obliquo.

- Crescenza. Dal testo e dal punto a) sappiamo che:

$$f'(x) = \frac{x-2}{x-1}.$$

Risolvendo $f'(x) > 0$, otteniamo che la funzione è decrescente in]1; 2[e crescente in $]2; +\infty[$. Di conseguenza, il punto $x = 2$ in cui $f'(x)$ si annulla è un punto di minimo.

- Concavità. Poiché

$$f'(x) = \frac{x-2}{x-1} = 1 - \frac{1}{x-1},$$

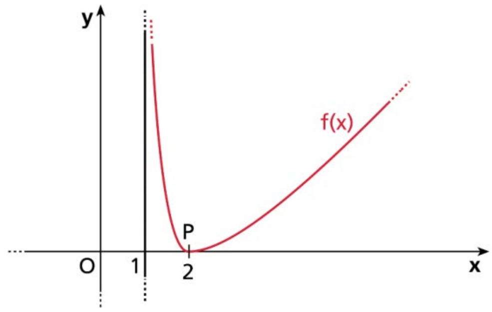
la derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{1}{(x-1)^2},$$

che nel dominio della funzione è sempre positiva: la funzione, pertanto, volge sempre la concavità verso l'alto.

Tracciamo il grafico γ di $f(x)$.

Figura 8



c) L'equazione

$$f(x) = e - 2$$

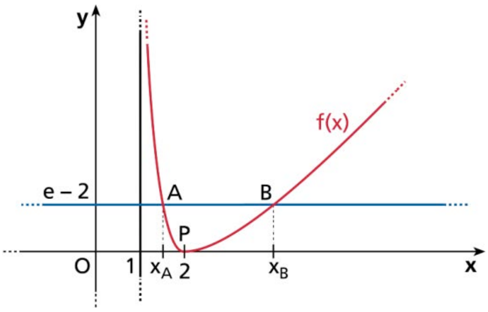
equivale a:

$$x-2-\ln(x-1) = e-2 \quad \rightarrow \quad x - e - \ln(x-1) = 0.$$

Dal punto di vista grafico risolvere l'equazione equivale a trovare le ascisse dei punti di intersezione della funzione con la retta di equazione:

$$y = e - 2.$$

Figura 9



Dal grafico osserviamo che una soluzione (x_A) è compresa in [1; 2].
Indichiamo con $g(x)$ la funzione:

$$g(x) = x - e - \ln(x - 1).$$

Essendo $\lim_{x \to 1^+} g(x) = g(1^+) > 0$ e $g(2) < 0$, con il metodo di bisezione possiamo determinare x_A con l'approssimazione voluta.

Compiliamo la tabella con le iterazioni previste dal metodo di bisezione, partendo dall'intervallo [1,001; 2].

n	a_n	b_n	m_n	$g(m_n)$
0	1,001	2	1,5	– 0,53
1	1,001	1,5	1,25	– 0,08
2	1,001	1,25	1,13	0,45
3	1,13	1,25	1,19	0,13
4	1,19	1,25	1,22	0,02
5	1,22	1,25	–	–

Abbiamo determinato che x_A appartiene all'intervallo [1,22; 1,25], quindi la soluzione è $x_A = 1,2...$

d) Per trovare l'area della regione finita di piano compresa tra la curva, l'asse delle ascisse e la retta di equazione $x = 1$, innanzi tutto calcoliamo l'integrale indefinito. Per risolvere una parte dell'integrale indefinito applichiamo il metodo di integrazione per parti.

$$\int [x - 2 - \ln(x-1)]dx = \frac{x^2}{2} - 2x - x\ln(x-1) + \int \frac{x}{x-1}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x - x\ln(x-1) + x + \ln(x-1) + k = \frac{x^2}{2} - x + (1-x)\ln(x-1) + k.$$

Quindi, poiché

$$\int_t^2 [x-2-\ln(x-1)]dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + (1-x)\ln(x-1)\right]_t^2 =$$
$$= 2-2-\frac{t^2}{2}+t-(1-t)\ln(t-1) = t-\frac{t^2}{2}-(1-t)\ln(t-1),$$

l'area richiesta è data da:

$$\int_1^2 [x-2-\ln(x-1)]dx = \lim_{t\to 1^+}\int_t^2 [x-2-\ln(x-1)]dx =$$
$$= \lim_{t\to 1^+}\left[t-\frac{t^2}{2}-(1-t)\ln(t-1)\right].$$

Osserviamo che nel calcolo del limite si ha $\lim_{t\to 1^+}\left(t-\frac{t^2}{2}\right)=\frac{1}{2}$, mentre $\lim_{t\to 1^+}[(1-t)\ln(t-1)]$ porta a una forma indeterminata del tipo $0\cdot\infty$.

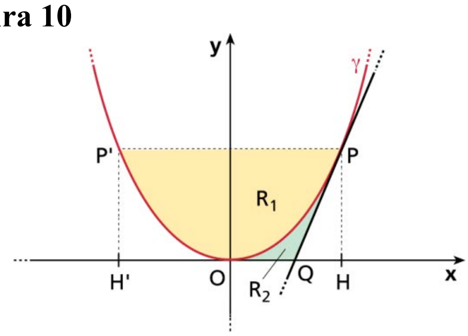
Possiamo però scrivere $\lim_{t\to 1^+}[(1-t)\ln(t-1)] = \lim_{t\to 1^+}\frac{\ln(t-1)}{\frac{1}{1-t}}$ e quindi, applicando il teorema di De L'Hospital, concludere che:

$$\lim_{t\to 1^+}\left[t-\frac{t^2}{2}-(1-t)\ln(t-1)\right] = \lim_{t\to 1^+}\left(t-\frac{t^2}{2}\right) - \lim_{t\to 1^+}\frac{\ln(t-1)}{\frac{1}{1-t}} = \frac{1}{2} - \lim_{t\to 1^+}\frac{\frac{1}{t-1}}{\frac{1}{(1-t)^2}} = \frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}.$$

Questionario

1. Disegniamo la generica parabola di equazione $y = kx^2$, con $k > 0$, assieme alla retta tangente nel punto P e alla parallela all'asse x (figura 10).

Figura 10



Il segmento parabolico individuato dalla corda PP' è indicato con R_1 in figura, mentre il triangolo curvilineo è indicato con R_2.

Il generico punto P ha coordinate $P(a; ka^2)$, con $a > 0$.

L'area di un segmento parabolico, per la formula di Archimede, è pari ai $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo circoscritto, quindi l'area di R_1 è data da:

$$A_1 = \frac{2}{3}\cdot\overline{PP'}\cdot\overline{PH} = \frac{2}{3}\cdot 2a\cdot ka^2 = \frac{4}{3}ka^3.$$

Possiamo calcolare l'area di R_2 per differenza: dall'area delimitata dal grafico di γ nell'intervallo $[0;a]$ sottraiamo l'area del triangolo QHP.
Determiniamo innanzi tutto le coordinate di Q.
Retta tangente a γ in P:

$$y - y_P = m\cdot(x - x_P) \quad\rightarrow\quad y - ka^2 = 2ka\cdot(x-a) \quad\rightarrow\quad y = 2kax - ka^2,$$

dove $m = y'(x_P) = y'(a) = 2ka.$
Coordinate del punto Q:

$$\begin{cases} y = 2kax - ka^2 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2kax = ka^2 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{2} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow Q\left(\frac{a}{2};0\right).$$

L'area di R_2 vale dunque:

$$A_2 = \int_0^a kx^2dx - \frac{1}{2}\cdot\left(a-\frac{a}{2}\right)\cdot ka^2 = \left[\frac{kx^3}{3}\right]_0^a - \frac{ka^3}{4} = \frac{ka^3}{3} - \frac{ka^3}{4} = \frac{ka^3}{12}.$$

Il rapporto fra le due aree è:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{4ka^3}{3}\cdot\frac{12}{ka^3} = 16.$$

Dato che il rapporto è costante al variare delle coordinate di P, il limite richiesto è 16.

2. Studiamo dominio, codominio, periodicità e derivabilità.

- Dominio e codominio.
  Per ogni $x \in \mathbf{R}$ è $-1 \le \operatorname{sen} x \le 1$, quindi esiste $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x)$ ed è $-\frac{\pi}{2} \le \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} x) \le \frac{\pi}{2}$; pertanto il dominio della funzione è $\mathbf{R}$ e il codominio, dato che y è una composizione di funzioni continue, è l'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

- Periodicità.
  La funzione seno ha periodo 2π, mentre la funzione arcoseno non è periodica. La funzione composta data, pertanto, ha periodo 2π.

- Derivabilità.

  Se $\operatorname{sen} x \neq \pm 1$, cioè se $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ \forall k \in \mathbf{Z}$, la derivata è:

  $$y' = \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}} = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}} = \frac{\cos x}{|\cos x|}.$$

  Per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ è quindi $y' = \pm 1$.
  In particolare:

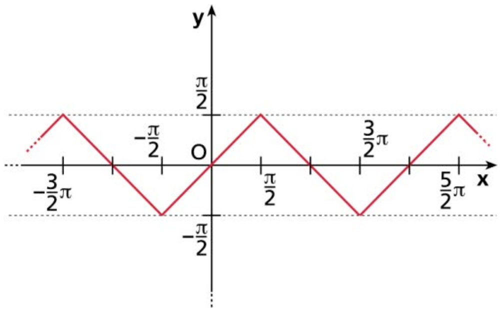
  $$y' = 1 \quad \text{se} \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[;$$
  $$y' = -1 \quad \text{se} \quad x \in \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right[.$$

Deduciamo che in ognuno di tali intervalli il grafico della funzione coincide con un segmento parallelo alla bisettrice del I e III quadrante o del II e IV quadrante.
Nei punti $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ la funzione non è derivabile, ma è continua ed esistono, finite, la derivata destra e sinistra. Possiamo determinarle calcolando i limiti destro e sinistro di y', per esempio:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} y' = -1, \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} y' = 1.$$

Concludiamo che i punti $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ sono punti angolosi.
Utilizziamo le informazioni ottenute per disegnare il grafico della funzione nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$ che poi prolunghiamo, tenendo conto della periodicità con periodo 2π, su tutto $\mathbf{R}$.
Otteniamo il seguente grafico (figura 11).

Figura 11



3. Dobbiamo verificare, in accordo con le ipotesi del teorema di Rolle, che $f(x)$ sia continua in $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$, derivabile in $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right[$ e che $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\pi\right)$.
   $f(x)$ è continua per ogni $x \neq a$.

Imponiamo poi che $f(x)$ sia continua in $x = a$. Tenuto conto che $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) = 0$, deve essere:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 0 \to \frac{4a^2}{\pi^2} - \frac{8a}{\pi} + 3 = 0 \to 4a^2 - 8a\pi + 3\pi^2 = 0 \to a = \frac{\pi}{2} \vee a = \frac{3}{2}\pi .$$

Solo il primo valore è accettabile, in quanto interno all'intervallo richiesto, quindi la funzione è continua per $a = \frac{\pi}{2}$ e diventa:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi}\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) & \text{se } x \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{4x^2}{\pi^2} - \frac{8x}{\pi} + 3 & \text{se } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

La funzione ottenuta è derivabile per $x \neq \frac{\pi}{2}$; nel punto $x = \frac{\pi}{2}$ è derivabile se le derivate destra e sinistra sono uguali. Tenuto conto della continuità, si ha:

- derivata sinistra:

$$f'_-\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f'(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} -\frac{4}{\pi}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{4}{\pi};$$

- derivata destra:

$$f'_+\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f'(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \left(\frac{8x}{\pi^2} - \frac{8}{\pi}\right) = -\frac{4}{\pi}.$$

Le due derivate sono uguali, quindi la funzione è derivabile in $x = \frac{\pi}{2}$.

Infine, osserviamo che $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$.

La funzione data soddisfa quindi le ipotesi del teorema di Rolle in $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$ per $a = \frac{\pi}{2}$.

4. Una funzione suriettiva da A a B ha per dominio A e per codominio B. Dato che l'insieme A ha un elemento in più rispetto a B, due tra i sei elementi di A devono avere la stessa immagine in B. Il numero di modi in cui possiamo selezionare tale coppia di elementi di A è pari al numero di combinazioni semplici di 6 oggetti di classe 2:

$$C_{6,2} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15.$$

Dopo aver fissato la coppia di elementi con la stessa immagine, il numero di modi in cui è possibile associare agli elementi di A gli elementi di B è pari al numero di permutazioni semplici di 5 oggetti:

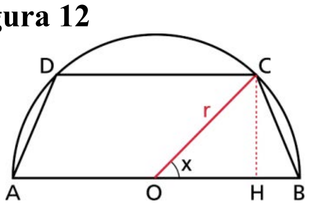
$$P_5 = 5! = 120.$$

Pertanto il numero complessivo di funzioni suriettive da A a B che possiamo definire è pari a:

$$P_5 \cdot C_{6,2} = 1800.$$

5. Dato che ciascun punto del bersaglio ha la medesima probabilità di essere centrato, calcoliamo la probabilità richiesta come rapporto tra l'area della parte esterna al trapezio e l'area del semicerchio.
Consideriamo dunque un trapezio isoscele $ABCD$ inscritto nella semicirconferenza di raggio r e poniamo $C\hat{O}B = x$ (figura 12). Le limitazioni per x sono: $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Figura 12



Indichiamo con H il piede della perpendicolare ad AB condotta da C; abbiamo $\overline{CD} = 2\overline{OH}$.
Applichiamo al triangolo COH il primo teorema fondamentale dei triangoli rettangoli e ricaviamo:

$$\overline{CH} = r \operatorname{sen} x; \quad \overline{OH} = r \cos x.$$

L'area del trapezio in funzione dell'angolo x è quindi data da:

$$A(x) = \frac{(\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot \overline{CH}}{2} = \frac{(2r + 2r\cos x) r \operatorname{sen} x}{2} = r^2 \operatorname{sen} x (1 + \cos x).$$

$A(x)$ è continua e derivabile nell'intervallo $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ delle limitazioni per x. Per individuarne il massimo assoluto, calcoliamo $A'(x)$ e studiamone il segno:

$$A'(x) = r^2[\cos x(1 + \cos x) - \operatorname{sen}^2 x] = r^2(\cos x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = r^2(2\cos^2 x + \cos x - 1).$$

In $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, la derivata si annulla per:

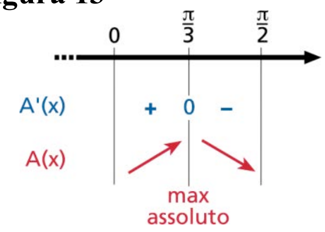
$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \rightarrow \cos x = -1 \vee \cos x = \frac{1}{2}.$$

$\cos x = -1 \rightarrow x = \pi$ non accettabile;

$\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{3}.$

Il segno di $A'(x)$ e la crescenza di $A(x)$ sono riportate nel seguente grafico (figura 13).

Figura 13



L'area massima del trapezio si ha quindi per $x = \frac{\pi}{3}$ e vale:

$$A_{max} = A\left(\frac{\pi}{3}\right) = r^2 \text{sen}\frac{\pi}{3}\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2.$$

La probabilità richiesta, calcolata come rapporto fra l'area della parte esterna al trapezio e quella del semicerchio A_{sc}, è quindi pari a:

$$p = \frac{A_{sc} - A_{max}}{A_{sc}} = 1 - \frac{A_{max}}{A_{sc}} = 1 - \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2}{\frac{\pi}{2}r^2} = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0,17.$$

6. Data una funzione f continua in $\mathbf{R}$, la sua funzione integrale di punto iniziale a è:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, questa funzione integrale è derivabile e risulta:

$$F'(x) = f(x).$$

Fissiamo dunque a piacere un punto iniziale a e applichiamo all'integrale dato le proprietà di additività e di scambio degli estremi di integrazione dell'integrale definito:

$$g(x) = \int_x^{2x} f(t)dt = \int_x^a f(t)dt + \int_a^{2x} f(t)dt = -\int_a^x f(t)dt + \int_a^{2x} f(t)dt.$$

Calcoliamo la derivata di $g(x)$, osservando che il secondo addendo è una funzione composta:

$$g'(x) = -f(x) + f(2x)\cdot \mathrm{D}[2x] = -f(x) + 2f(2x).$$

Ora calcoliamo i risultati richiesti, tenendo conto dei dati noti del problema:

$$g(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0;$$

$$g'(0) = -f(0) + 2f(2\cdot 0) = -\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2};$$

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(2\cdot\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + 2\cdot 1 = \frac{7}{4}.$$

7. Il dominio di f è dato da:

$$e^x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad e^x > 1 \quad \rightarrow \quad x > 0.$$

Eventuali asintoti si trovano studiando il comportamento di f agli estremi del dominio $]0; +\infty[$.
Nell'estremo sinistro abbiamo:

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(e^x - 1) = -\infty.$$

La retta $x = 0$, cioè l'asse y, è asintoto verticale (destro).
Nell'estremo destro abbiamo:

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(e^x - 1) = +\infty.$$

Non c'è asintoto orizzontale. Stabiliamo se esiste l'asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$, cominciando con il calcolare il coefficiente angolare m:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^x - 1)}{x}.$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$; proviamo a risolverla applicando il teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(e^x - 1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x - 1}}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x(1 - e^{-x})} = 1.$$

Pertanto $m = 1$.
Cerchiamo ora il termine noto q:

$$q = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to +\infty} [\ln(e^x - 1) - x].$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $+\infty - \infty$; per eliminarla utilizziamo l'identità $x = \ln e^x$ e le proprietà del logaritmo:

$$\lim_{x \to +\infty} [\ln(e^x - 1) - x] = \lim_{x \to +\infty} [\ln(e^x - 1) - \ln e^x] = \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{e^x - 1}{e^x} = \ln 1 = 0.$$

Pertanto la retta $y = x$ è asintoto obliquo per x tendente a $+\infty$.

8. La funzione $f(x)$, essendo ovunque continua e derivabile, è in particolare continua nell'intervallo chiuso [0; 1] e derivabile nell'intervallo aperto]0; 1[. Sono dunque soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange, quindi esiste $c \in]0; 1[$ tale che:

$$f'(c)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0} \quad \to \quad f'(c)=f(1)-f(0).$$

Poiché $f'(x)<e^x\ \forall x\in\mathbf{R}$ e $c\in]0;1[$,risulta:

$$f'(c)<e^c<e \quad \to \quad f(1)-f(0)<e.$$

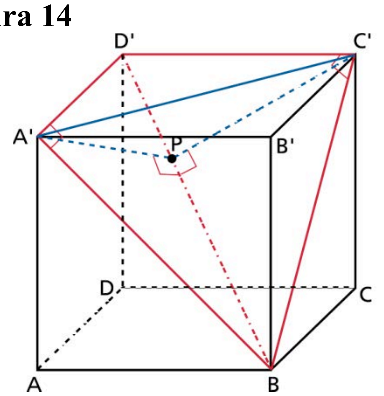
La disuguaglianza si può dimostrare anche per altra via.
Poiché $f'(x)<e^x\ \forall x\in\mathbf{R}$, risulta:

$$\int_0^1 f'(x)dx<\int_0^1 e^x dx \quad \to \quad [f(x)]_0^1<[e^x]_0^1 \quad \to \quad f(1)-f(0)<e-1<e.$$

In particolare, vale la disuguaglianza più restrittiva $f(1)-f(0)<e-1$.

9. I triangoli $A'D'B$ e $C'D'B$, rettangoli rispettivamente in A' e C', sono congruenti perché hanno l'ipotenusa in comune e i cateti ordinatamente congruenti. Sono quindi congruenti anche le altezze relative all'ipotenusa, che cadono sullo stesso punto *P* (figura 14).

Figura 14



$D'B$ è dunque perpendicolare alle rette $A'P$ e PC', pertanto è perpendicolare al piano $A'PC'$ che le contiene: tale piano è perciò una sezione normale del diedro convesso di facce $A'D'B$ e $C'D'B$.

Applichiamo ora il teorema del coseno al triangolo $A'PC'$ per determinare l'ampiezza dell'angolo $A'\hat{P}C'$:

$$\overline{A'C'}^2=\overline{A'P}^2+\overline{C'P}^2-2\overline{A'P}\cdot\overline{C'P}\cos A'\hat{P}C',$$

$$\overline{A'C'}^2=2\overline{A'P}^2-2\overline{A'P}^2\cos A'\hat{P}C',$$

$$\cos A'\hat{P}C'=\frac{2\overline{A'P}^2-\overline{A'C'}^2}{2\overline{A'P}^2}.$$

Esprimiamo tutti gli elementi in funzione della lunghezza *a* dello spigolo del cubo:

$$\overline{A'C'}=\overline{A'B}=a\sqrt{2}; \quad \overline{A'P}=\frac{\overline{A'B}\cdot\overline{A'D'}}{\overline{BD'}}=\frac{a\sqrt{2}\cdot a}{a\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}a.$$

Calcoliamo l'ampiezza del diedro:

$$\cos A'\hat{P}C' = \frac{2\cdot\frac{6}{9}a^2 - 2a^2}{2\cdot\frac{6}{9}a^2} = -\frac{1}{2}, \quad A'\hat{P}C' = \frac{2}{3}\pi.$$

10. Possiamo riscrivere la funzione nel seguente modo:

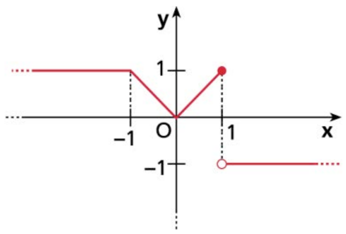
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \ x < -1 \\ -x & \text{se } \ -1 \le x < 0 \\ x & \text{se } \ 0 \le x \le 1 \\ -1 & \text{se } \ x > 1 \end{cases}$$

Osserviamo che, in ciascuno degli intervalli specificati nella definizione, la funzione è continua, e quindi gli eventuali punti di discontinuità sono solo $x = -1, x = 0$ e $x = 1$. Abbiamo:

$$\lim_{x\to -1} f(x) = 1 = f(-1); \ \lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0); \ \lim_{x\to 1^+} f(x) = -1; \ \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 1.$$

Pertanto la funzione è continua ovunque tranne che in $x = 1$.
Il grafico della funzione è riportato in figura 15.

Figura 15



Dal grafico deduciamo anche che la funzione non è derivabile in $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$.

Verifichiamo analiticamente quanto dedotto dal grafico:

- $f'_-(-1) = \lim_{x\to -1^-} f'(x) = 0$, $f'_+(-1) = \lim_{x\to -1^+} f'(x) = -1$, le derivate destra e sinistra in $x = -1$ sono diverse;
- $f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -1$, $f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$, le derivate destra e sinistra in $x = 0$ sono diverse;
- la funzione non è continua in $x = 1$, quindi non è neppure derivabile in tale punto.