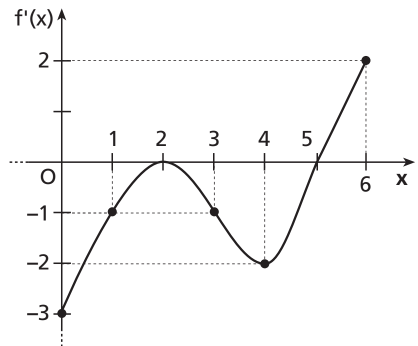
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2012

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Della funzione f, definita per $0 \leq x \leq 6$, si sa che è dotata di derivata prima e seconda e che il grafico della sua derivata $f'(x)$, disegnato a lato, presenta due tangenti orizzontali per $x = 2$ e $x = 4$. Si sa anche che $f(0) = 9$, $f(3) = 6$ e $f(5) = 3$.



▲ **Figura 1.**

1. Si trovino le ascisse dei punti di flesso di f motivando le risposte in modo esauriente.
2. Per quale valore di x la funzione f presenta il suo minimo assoluto? Sapendo che $\int_0^6 f'(t)dt = -5$ per quale valore di x la funzione f presenta il suo massimo assoluto?
3. Sulla base delle informazioni note, quale andamento potrebbe avere il grafico di f?
4. Sia g la funzione definita da $g(x) = xf(x)$. Si trovino le equazioni delle rette tangenti ai grafici di f e di g nei rispettivi punti di ascissa $x = 3$ e si determini la misura, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto che esse formano.

PROBLEMA 2

Siano f e g le funzioni definite da $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln x$.

1. Fissato un sistema cartesiano Oxy, si disegnino i grafici di f e g e si calcoli l'area della regione R che essi delimitano tra $x = \frac{1}{2}$ e $x = 1$.
2. La regione R, ruotando attorno all'asse x, genera il solido S e, ruotando intorno all'asse y, il solido T. Si scrivano, spiegandone il perché, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e di T.
3. Fissato $x_0 > 0$, si considerino le rette r e s tangenti ai grafici di f e di g nei rispettivi punti di ascissa x_0. Si dimostri che esiste un solo x_0 per il quale r e s sono parallele. Di tale valore x_0 si calcoli un'approssimazione arrotondata ai centesimi.
4. Sia $h(x) = f(x) - g(x)$. Per quali valori di x la funzione $h(x)$ presenta, nell'intervallo chiuso $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, il minimo e il massimo assoluti? Si illustri il ragionamento seguito.

QUESTIONARIO

1 Si calcoli

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2^{3x} - 3^{4x}}{x^2}.$$

2 Una moneta da 1 euro (il suo diametro è 23,25 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle esagonali (regolari) di lato 10 cm. Qual è la probabilità che la moneta vada a finire internamente a una mattonella (cioè non tagli i lati degli esagoni)?

3 Sia $f(x) = 3^x$. Per quale valore di x, approssimato a meno di 10^{-3}, la pendenza della retta tangente alla curva nel punto $(x; f(x))$ è uguale a 1?

4 L'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali sono insiemi equipotenti? Si giustifichi la risposta.

5 Siano dati nello spazio n punti $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$. Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due? Quanti i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata)? Quanti i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia complanare)?

6 Si dimostri che la curva di equazione $y = x^3 + ax + b$ ha uno e un solo punto di flesso rispetto a cui è simmetrica.

7 È dato un tetraedro regolare di spigolo l e altezza h. Si determini l'ampiezza dell'angolo α formato da l e da h.

8 Un'azienda industriale possiede tre stabilimenti (A, B e C). Nello stabilimento A si produce la metà dei pezzi e di questi il 10% sono difettosi. Nello stabilimento B si produce un terzo dei pezzi, e il 7% sono difettosi. Nello stabilimento C si producono i pezzi rimanenti, e il 5% sono difettosi. Sapendo che un pezzo è difettoso, con quale probabilità esso proviene dallo stabilimento A?

9 Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti A e B, situati dalla stessa parte rispetto a una retta r, nel determinare il cammino minimo che congiunge A con B toccando r. Si risolva il problema nel modo che si preferisce.

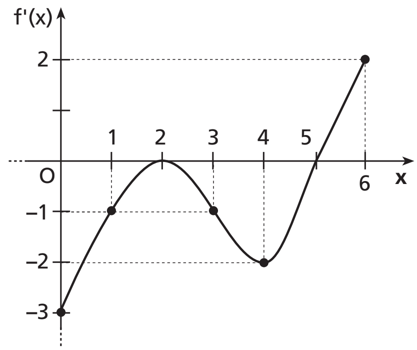
10 Si provi che fra tutti i coni circolari retti circoscritti a una sfera di raggio r, quello di minima area laterale ha vertice che dista $r\sqrt{2}$ dalla superficie sferica.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

1. La funzione f è derivabile due volte nell'intervallo $]0; 6[$. Dal grafico della derivata prima di f (figura 2) si deduce che la derivata seconda di f cambia segno nell'intorno dei punti di ascissa $x = 2$ e $x = 4$ che pertanto sono le ascisse dei due punti di flesso di f. Inoltre:

- $f'(2) = 0$ e per $0 < x < 5$ con $x \neq 2$ risulta $f'(x) < 0$, pertanto è soddisfatta la condizione sufficiente per un flesso orizzontale della funzione $f(x)$ nel punto di ascissa $x = 2$;
- $f'(4) < 0$ e risulta $f''(x) < 0$ per $2 < x < 4$ e $f''(x) > 0$ per $4 < x < 5$, pertanto è soddisfatta la condizione sufficiente per un flesso obliquo ascendente della funzione $f(x)$ nel punto di ascissa $x = 4$.



▲ **Figura 2.**

In sintesi, la funzione $f(x)$ ha un flesso orizzontale nel punto $x = 2$, ha un flesso obliquo ascendente nel punto $x = 4$.

2. La funzione f è continua nell'intervallo $0 \leq x \leq 6$ e pertanto, per il teorema di Weierstrass, in tale intervallo ammette il massimo e il minimo assoluto. Osserviamo dalla figura 2 per $0 \leq x \leq 6$:

- per $0 < x < 5$: $f'(x) \leq 0$, ovvero la funzione f è non crescente;
- per $5 < x < 6$: $f'(x) > 0$, cioè la funzione f è crescente.

Allora $x = 5$ è minimo relativo e anche assoluto, con $f(5) = 3$.
Dal segno della derivata prima si deduce che esistono due massimi relativi agli estremi dell'intervallo ovvero per $x = 0$ e per $x = 6$. Valutiamo la loro immagine in f per stabilire qual è massimo assoluto. Dalle ipotesi è noto che $f(0) = 9$. Determiniamo $f(6)$ applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale, essendo noto $\int_0^6 f'(t)dt = -5$:

$$\int_0^6 f'(t)dt = f(6) - f(0) \rightarrow -5 = f(6) - 9 \rightarrow f(6) = 4.$$

Pertanto il massimo assoluto della funzione f è in $x = 0$ con $f(0) = 9$.

3. Sintetizziamo le informazioni note sulla funzione $f(x)$ e riportiamole su un piano cartesiano:

- $f(0) = 9$, $f(3) = 6$ e $f(5) = 3$;
- per $0 < x < 5$, $f(x)$ è non crescente con flesso orizzontale F_1 in $x = 2$;
- per $5 < x < 6$, è crescente;
- in $x = 5$ ha il suo minimo assoluto con $f(5) = 3$, $M(5; 3)$;
- in $x = 0$ ha massimo assoluto con $f(0) = 9$, $M_1(0; 9)$;
- in $x = 6$ ha massimo relativo con $f(6) = 4$, $M_2(6; 4)$;
- in $x = 4$ ha un flesso obliquo ascendente F_2.

Nella figura 3 è rappresentato il possibile grafico della funzione $f(x)$.

4. È noto che, data una funzione generica $y = h(x)$, l'equazione della retta tangente r al grafico di h nel punto $(x_0; y_0)$, quando la tangente esiste e non è parallela all'asse y, è:

$y - y_0 = h'(x_0)(x - x_0)$, con coefficiente angolare $m_r = h'(x_0)$.

Sappiamo che $f(3) = 6$ e $f'(3) = 1$, pertanto la retta s tangente a f nel punto $(3; 6)$ ha equazione:

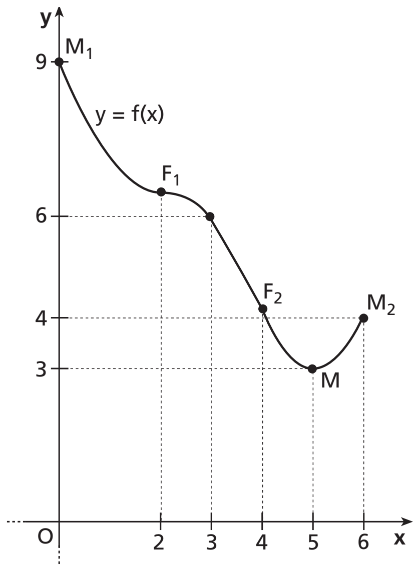
$y = -x + 9$ con $m_s = -1$.

Per le regole di derivazione $g'(x) = f(x) + xf'(x)$. Per la funzione $g(x) = xf(x)$, sostituendo $x = 3$, si ottiene:

$g(3) = 18$ e $g'(3) = f(3) + 3 \cdot f'(3) = 6 + 3 \cdot (-1) = 3$.

Pertanto la retta t tangente a g nel punto $(3; 18)$ ha equazione:

$y = 3x + 9$ con $m_t = 3$.



▲ **Figura 3.**

Determiniamo la tangente goniometrica dell'angolo γ acuto formato dalle rette s e t:

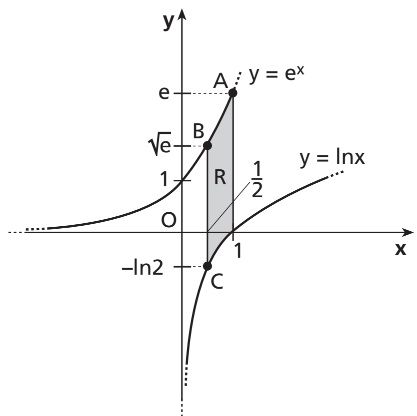
$$\operatorname{tg}\gamma = \left|\frac{m_s - m_t}{1 + m_s m_t}\right| \to \operatorname{tg}\gamma = \left|\frac{-1-3}{1-3}\right| = 2.$$

Ricaviamo il corrispondente angolo in gradi sessagesimali:

$\gamma = \operatorname{arctg} 2 = 63{,}43\ldots° \simeq 63°\ 26'$.

PROBLEMA 2

1. Le funzioni $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln x$ sono rispettivamente la funzione esponenziale e logaritmica in base e. Nella figura 4 è rappresentata la regione di piano R delimitata dalle due funzioni e da $x = \frac{1}{2}$ e $x = 1$. Il punto A ha coordinate $x_A = 1$ e $y_A = f(1) = e$, il punto B, $x_B = \frac{1}{2}$ e $y_B = f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$, il punto C, $x_C = \frac{1}{2}$ e $y_C = g\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$.



▲ **Figura 4.**

Determiniamo l'area della regione R calcolando il seguente integrale:

$$\mathcal{A}(R) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (e^x - \ln x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} e^x dx - \int_{\frac{1}{2}}^{1} (\ln x)dx =$$

$$= [e^x]_{\frac{1}{2}}^{1} - \int_{\frac{1}{2}}^{1} (\ln x)dx = e - \sqrt{e} - \int_{\frac{1}{2}}^{1} (\ln x)dx =$$

integriamo per parti l'integrale dell'ultimo membro:

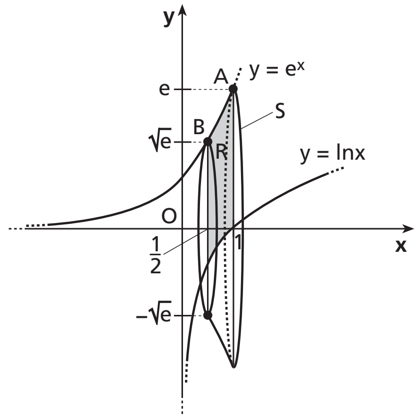
$$= e - \sqrt{e} - [x\ln x]_{\frac{1}{2}}^{1} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x \cdot \frac{1}{x} dx = e - \sqrt{e} - \left(0 - \frac{1}{2} \cdot \ln\frac{1}{2}\right) + [x]_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= e - \sqrt{e} - \frac{1}{2} \cdot \ln 2 + 1 - \frac{1}{2} =$$

$$= e - \sqrt{e} - \ln\sqrt{2} + \frac{1}{2}.$$

2. Ruotiamo la regione R intorno all'asse x (figura 5).
Il solido S che si ottiene è equivalente al solido ottenuto dalla rotazione dalla regione delimitata dalla funzione $f(x) = e^x$, dall'asse x e dalle rette $x = \frac{1}{2}$ e $x = 1$ (la limitazione data da $y = \ln x$ è inessenziale). Pertanto il volume del solido S vale:

$$V(S) = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} [f(x)]^2\, dx = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{2x}\, dx.$$



▲ **Figura 5.**

Scomponiamo la regione R nelle tre zone R_1, R_2, R_3 e facciamole ruotare intorno all'asse y (figura 6).
Si ottengono tre solidi di rotazione T_1, T_2, T_3 la cui somma è equivalente al solido T di rotazione richiesto. Pertanto vale:

$$V(T) = V(T_1) + V(T_2) + V(T_3).$$

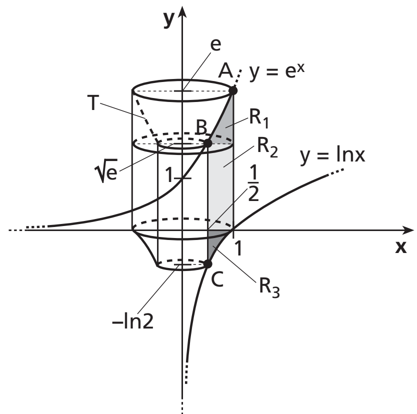
Calcoliamo $V(T_1)$ come differenza tra il volume del cilindro di raggio di base 1 e altezza $e - \sqrt{e}$ e il volume di rotazione della funzione inversa di $y = e^x$ ovvero $x = \ln y$ con $y \in [\sqrt{e}; e]$:

$$V(T_1) = \pi \cdot 1^2 \cdot (e - \sqrt{e}) - \pi \int_{\sqrt{e}}^{e} (\ln y)^2\, dy =$$

$$= \pi(e - \sqrt{e}) - \pi \int_{\sqrt{e}}^{e} (\ln y)^2\, dy.$$

Determiniamo $V(T_2)$ come differenza di volume tra due cilindri di altezza $\sqrt{e}$ e raggi di base pari a 1 e $\frac{1}{2}$:

$$V(T_2) = \pi \cdot 1^2 \cdot \sqrt{e} - \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{e} = \frac{3}{4}\pi\sqrt{e}.$$



▲ **Figura 6.**

Calcoliamo $V(T_3)$ come differenza tra il volume di rotazione della funzione inversa di $y = \ln x$ ovvero $x = e^y$ nell'intervallo $[-\ln 2; 0]$ e il cilindro di raggio $\frac{1}{2}$ e altezza $\ln 2$:

$$V(T_3) = \pi \int_{-\ln 2}^{0} e^{2y}\, dy - \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \ln 2 = \pi \int_{-\ln 2}^{0} e^{2y}\, dy - \frac{1}{4}\pi \ln 2.$$

Pertanto il volume del solido T vale:

$$V(T) = V(T_1) + V(T_2) + V(T_3) = \pi(e - \sqrt{e}) - \pi \int_{\sqrt{e}}^{e} (\ln y)^2\, dy + \frac{3}{4}\pi\sqrt{e} + \pi \int_{-\ln 2}^{0} e^{2y}\, dy - \frac{1}{4}\pi \ln 2 =$$

$$= \pi\left(e - \frac{1}{4}\sqrt{e} - \frac{1}{4}\ln 2\right) - \pi \int_{\sqrt{e}}^{e} (\ln y)^2\, dy + \pi \int_{-\ln 2}^{0} e^{2y}\, dy.$$

3. Il coefficiente angolare di una retta tangente al grafico di una funzione derivabile in un suo punto x_0, quando la tangente esiste e non è parallela all'asse y, è uguale alla sua derivata prima in quel punto. Fissato $x_0 > 0$, si considerino le rette r e s tangenti ai grafici di $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln x$ nei rispettivi punti di ascissa x_0. Affinché le rette siano parallele i coefficienti angolari devono essere uguali cioè:

$$f'(x_0) = g'(x_0) \rightarrow e^{x_0} = \frac{1}{x_0}.$$

Per dimostrare l'unicità di x_0 che rende vera l'uguaglianza consideriamo la funzione $t(x) = e^x - \frac{1}{x}$ per $x > 0$. La derivata prima è $t'(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$ pertanto la funzione è sempre crescente.

Inoltre $t\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2=-0{,}35\ldots<0$, mentre $t\left(\frac{2}{3}\right)=\sqrt[3]{e^2}-\frac{3}{2}=0{,}44\ldots>0$. Si deduce per il primo teorema di unicità dello zero che esiste un solo valore $x_0\in\left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[$ che rende nulla la funzione.

La derivata seconda è $t''(x)=e^x-\frac{2}{x^3}$: essa è crescente, $t''\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-16=-14{,}35\ldots$, $t''\left(\frac{2}{3}\right)=\sqrt[3]{e^2}-\frac{27}{4}=-4{,}80\ldots$, per cui in tale intervallo essa è continua e mantiene costante il suo segno.

Possiamo così applicare il metodo numerico delle tangenti per ricavare lo zero x_0 della funzione di partenza $t(x)=e^x-\frac{1}{x}$.

Ricordiamo la formula di ricorrenza di tale metodo e compiliamo la tabella sapendo che il punto di partenza della successione approssimante è l'estremo dell'intervallo in cui la funzione ha lo stesso segno della derivata seconda:

$$x_1=\frac{1}{2},$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{t(x_n)}{t'(x_n)}\to x_{n+1}=x_n-\frac{e^{x_n}-\frac{1}{x_n}}{e^{x_n}+\frac{1}{x_n^2}}.$$

n	x_n	$t(x_n)=e^{x_n}-\frac{1}{x_n}$	$t'(x_n)=e^{x_n}+\frac{1}{x_n^2}$	$x_{n+1}-x_n$
1	0,500	−0,351	5,649	
2	0,562	−0,024	4,919	0,062
3	0,567	0,000	4,872	0,005

Dalla tabella osserviamo che il valore cercato approssimato ai centesimi è $x_0\simeq 0{,}56$.

4. Consideriamo la funzione $h(x)=e^x-\ln x$ nell'intervallo $\left[\frac{1}{2};1\right]$: essa è continua pertanto per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo assoluti. Valutiamo i suoi valori agli estremi:

$$h\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}-\ln\frac{1}{2}=\sqrt{e}+\ln 2\simeq 2{,}342,$$

$$h(1)=e-\ln 1=e\simeq 2{,}718.$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$h'(x)=e^x-\frac{1}{x}.$$

Nel punto precedente del problema abbiamo dimostrato che questa funzione ammette un solo zero nel punto $x_0\simeq 0{,}56$, pertanto x_0 è un punto stazionario per $h(x)$. Inoltre $h'\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$ e $h'(1)=e-1>0$, quindi x_0 è un punto di minimo relativo. Valutiamo il valore approssimato della funzione in tale punto:

$$h(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0\simeq e^{0{,}56}-\ln 0{,}56\simeq 2{,}330.$$

Confrontando tale valore con $h\left(\frac{1}{2}\right)\simeq 2{,}342$, si può concludere che la funzione $h(x)$ ha massimo assoluto per $x=1$ e minimo assoluto per $x=x_0$.

QUESTIONARIO

1 Il limite $\lim_{x\to0^+}\frac{2^{3x}-3^{4x}}{x^2}$ porta alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Scriviamolo nel seguente modo:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{2^{3x}-3^{4x}}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{2^{3x}-3^{4x}}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{8^x-81^x}{x}\right)=$$

sommiamo e sottraiamo 1 al numeratore:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(\frac{8^x-1+1-81^x}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left[\frac{8^x-1}{x}-\frac{81^x-1}{x}\right]=$$

applichiamo il limite notevole $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$, con $a>0$:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}[\ln 8-\ln 81]=-\infty.$$

In alternativa si può risolvere il limite di partenza applicando il teorema di De L'Hospital, essendo soddisfatte le relative ipotesi:

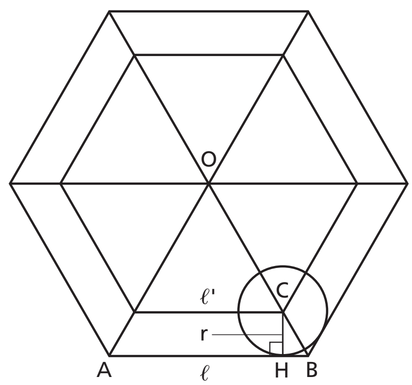
$$\lim_{x\to0^+}\frac{2^{3x}-3^{4x}}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{D(2^{3x}-3^{4x})}{D(x^2)}=\lim_{x\to0^+}\frac{2^{3x}\ln 8-3^{4x}\ln 81}{2x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln 8-\ln 81}{2x}=-\infty.$$

2 In figura è rappresentata una mattonella esagonale di lato l di 10 cm ($=100$ mm) e centro O. La moneta di raggio $r=\frac{23,25}{2}$ mm $=11,625$ mm cade internamente alla piastrella se il suo centro C cade nell'esagono di lato l' e centro O interno alla mattonella, con i lati paralleli a quelli della mattonella e distanti r da questi.

La distanza $\overline{CH}$ tra i lati corrispondenti dei due esagoni deve essere quindi r.

Consideriamo il triangolo rettangolo BCH: esso è metà di un triangolo equilatero e per questo risulta:

$$\overline{CH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BC}\to r=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BC}\to\overline{BC}=\frac{2\sqrt{3}}{3}r.$$



▲ **Figura 7.**

L'esagono interno ha quindi lato:

$$l'=\overline{OC}=\overline{OB}-\overline{BC}=l-\frac{2\sqrt{3}}{3}r.$$

Supponendo che la probabilità che la moneta cada in una regione sia proporzionale all'area della regione stessa, la probabilità p che la moneta vada a finire internamente a una mattonella è pari al rapporto tra le aree dei due esagoni simili ovvero al rapporto dei quadrati dei due corrispondenti lati:

$$p=\frac{l'^2}{l^2}=\left(\frac{l'}{l}\right)^2=\left(\frac{l-\frac{2\sqrt{3}}{3}r}{l}\right)^2=\left(1-\frac{2r\sqrt{3}}{3l}\right)^2.$$

Sostituiamo alle grandezze le corrispondenti misure:

$$p=\left(1-\frac{2\cdot 11,625\sqrt{3}}{3\cdot 100}\right)^2\simeq 0,7496=74,96\%.$$

3 La funzione $f(x)=3^x$ ha dominio $\mathbb{R}$ e in esso è derivabile. La pendenza della retta tangente alla curva nel punto $(x; f(x))$ è la funzione derivata nel punto x:

$$f'(x)=3^x\ln 3.$$

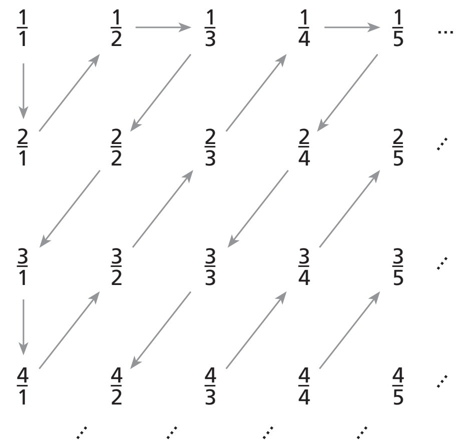
Poniamo $f'(x) = 1$ e risolviamo l'equazione esponenziale:

$$3^x \ln 3 = 1 \rightarrow 3^x = \frac{1}{\ln 3}.$$

Applicando a entrambi i membri il logaritmo in base 3 e successivamente la formula del cambiamento di base si ricava:

$$x = \log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right) \rightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{1}{\ln 3}\right)}{\ln 3} \rightarrow x = \frac{-\ln(\ln 3)}{\ln 3} \simeq -0{,}086.$$

4 Due insiemi si dicono equipotenti o equicardinali se tra essi esiste una corrispondenza biunivoca. Un insieme è numerabile se è equipotente all'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$. La numerabilità dell'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ fu dimostrata da G. Cantor (1845-1918). La sua dimostrazione si basa sul diagramma a fianco (figura 8) che stabilisce con il metodo della diagonalizzazione una corrispondenza biunivoca tra i razionali positivi $\mathbb{Q}^+$ e $\mathbb{N} - \{0\}$.
Seguendo le frecce si possono elencare i numeri razionali positivi, saltando le frazioni equivalenti che non rappresentano nuovi numeri razionali. Lo stesso procedimento può essere adottato per dimostrare la numerabilità di $\mathbb{Q}^-$. Poiché $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$ e l'unione di insiemi numerabili è numerabile si deduce che $\mathbb{Q}$ è numerabile.



▲ **Figura 8.**

5 Vedi lo svolgimento del quesito 5 della prova del corso di ordinamento 2012.

6 La funzione polinomiale $y = x^3 + ax + b$ è continua e derivabile nel suo dominio $\mathbb{R}$. Calcoliamo le funzioni derivata prima e seconda:

$$y' = 3x^2 + a; \quad y'' = 6x.$$

Analizziamo il segno della derivata seconda nel dominio:

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0; \quad y'' > 0 \Leftrightarrow x > 0; \quad y'' < 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

È pertanto soddisfatta la condizione sufficiente di flesso: la funzione ammette uno e un solo flesso nel punto $x = 0$ e ha coordinate $(0; b)$.
Costruiamo la trasformazione geometrica di simmetria centrale $(0; b)$:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = 2b - y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = 2b - y' \end{cases}$$

Sostituiamo nella funzione $y = x^3 + ax + b$:

$$2b - y' = -x'^3 - ax' + b \rightarrow y' = x'^3 + ax' + b.$$

La funzione è unita rispetto al suo punto di flesso che risulta quindi punto di simmetria.

7 Vedi lo svolgimento del quesito 7 della prova del corso di ordinamento 2012.

8 Siano dati gli eventi:

E = «pezzo difettoso»,
A = «pezzo prodotto nello stabilimento A»,
B = «pezzo prodotto nello stabilimento B»,
C = «pezzo prodotto nello stabilimento C».

Risulta:

$$p(A)=\frac{1}{2},\quad p(B)=\frac{1}{3},\quad p(C)=1-p(A)-p(B)=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

Determiniamo $p(E)$ applicando la formula di disintegrazione:

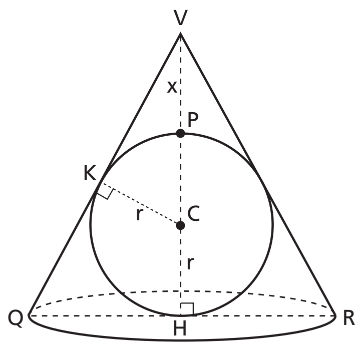
$$p(E)=p(A)\cdot p(E|A)+p(B)\cdot p(E|B)+p(C)\cdot p(E|C)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{100}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{100}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{100}=\frac{1}{20}+\frac{7}{300}+\frac{1}{120}=\frac{49}{600}.$$

Utilizzando il teorema di Bayes calcoliamo la probabilità che, trovato un pezzo difettoso, esso provenga dallo stabilimento A:

$$p(A|E)=\frac{p(A)\cdot p(E|A)}{p(E)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{100}}{\frac{49}{600}}=\frac{30}{49}=0{,}6122\ldots\simeq 61{,}22\%.$$

9 Vedi lo svolgimento del quesito 9 della prova del corso di ordinamento 2012.

10 È data la sfera di centro C e raggio r e un cono circolare retto di vertice V e raggio di base HR (figura 9).



▲ **Figura 9.**

Si pone $\overline{PV}=x$, con $x>0$.

Risulta $\overline{VH}=x+2r$ e $\overline{VC}=x+r$.

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo KCV e otteniamo:

$$\overline{KV}=\sqrt{\overline{VC}^2-\overline{KC}^2}=\sqrt{(x+r)^2-r^2}=\sqrt{x^2+2rx}.$$

Sfruttiamo ora la similitudine tra i triangoli rettangoli KCV e QHV:

$$\overline{QH}:\overline{KC}=\overline{VH}:\overline{KV}\rightarrow\overline{QH}=\frac{\overline{KC}\cdot\overline{VH}}{\overline{KV}}=\frac{r(x+2r)}{\sqrt{x^2+2rx}}.$$

Per il teorema delle tangenti risulta $\overline{QH}=\overline{QK}$ e quindi:

$$\overline{QV}=\overline{QK}+\overline{KV}=\frac{r(x+2r)}{\sqrt{x^2+2rx}}+\sqrt{x^2+2rx}=\frac{x^2+3rx+2r^2}{\sqrt{x^2+2rx}}.$$

Calcoliamo l'area laterale $A(x)$ del cono:

$$A(x)=\frac{1}{2}(2\pi\overline{QH}\cdot\overline{QV})=\pi\frac{r(x+2r)}{\sqrt{x^2+2rx}}\cdot\frac{x^2+3rx+2r^2}{\sqrt{x^2+2rx}}=\pi r\frac{x^2+3rx+2r^2}{x}=\pi r\left(x+3r+\frac{2r^2}{x}\right).$$

Minimizziamo tale area calcolando la derivata prima e studiandone il segno:

$$A'(x)=\pi r\left(1-\frac{2r^2}{x^2}\right)\rightarrow A'(x)=\pi r\left(\frac{x^2-2r^2}{x^2}\right).$$

Tenendo conto del limite geometrico $x>0$, risulta:

$A'(x)=0$ per $x=r\sqrt{2}$,
$A'(x)>0$ per $x>r\sqrt{2}$,
$A'(x)<0$ per $0<x<r\sqrt{2}$.

La funzione area laterale ha quindi minimo per $x=r\sqrt{2}$.