ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2011

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Si considerino le funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da:

$$f(x) = x^3 - 4x \quad \text{e} \quad g(x) = \operatorname{sen} \pi x.$$

1. Fissato un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy, si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g.
2. Si calcolino le ascisse dei punti di intersezione di G_f con la retta $y = -3$. Successivamente, si considerino i punti di G_g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo $[-6; 6]$ e se ne indichino le coordinate.
3. Sia R la regione del piano delimitata da G_f e G_g sull'intervallo $[0; 2]$. Si calcoli l'area di R.
4. La regione R rappresenta la superficie libera dell'acqua contenuta in una vasca. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y la misura della profondità dell'acqua nella vasca è data da $h(x) = 3 - x$. Quale integrale definito dà il volume dell'acqua? Supposte le misure in metri, quanti litri di acqua contiene la vasca?

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali da:

$$f(x) = (ax + b)e^{-\frac{x}{3}} + 3,$$

dove a e b sono due numeri reali che si chiede di determinare sapendo che f ammette un massimo nel punto d'ascissa 4 e che $f(0) = 2$.

1. Si provi che $a = 1$ e $b = -1$.
2. Si studi su $\mathbb{R}$ la funzione $f(x) = (x - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3$, e se ne tracci il grafico Γ nel sistema di riferimento Oxy.
3. Si calcoli l'area della regione di piano del primo quadrante delimitata da Γ, dall'asse y e dalla retta $y = 3$.
4. Il profitto di un'azienda, in milioni di euro, è stato rappresentato nella tabella sottostante designando con x_i l'anno di osservazione e con y_i il corrispondente profitto.

Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65

Si cerca una funzione che spieghi il fenomeno dell'andamento del profitto giudicando accettabile la funzione g definita su $\mathbb{R}^+$ se per ciascun x_i, oggetto dell'osservazione, si ha: $|g(x_i) - y_i| \leq 10^{-1}$. Si verifichi, con l'aiuto di una calcolatrice, che è accettabile la funzione f del punto 2 e si dica, giustificando la risposta, se è vero che, in tal caso, l'evoluzione del fenomeno non potrà portare a profitti inferiori ai 3 milioni di euro.

QUESTIONARIO

1 Un serbatoio ha la stessa capacità del cilindro di massimo volume inscritto in una sfera di raggio 60 cm. Qual è la capacità in litri del serbatoio?

2 Si trovi il punto della curva $y=\sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate (4; 0).

3 Sia R la regione delimitata dalla curva $y=x^3$, dall'asse x e dalla retta $x=2$ e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y. Si calcoli il volume di W.

4 Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi n.

5 Si trovi l'area della regione delimitata dalla curva $y=\cos x$ e dall'asse x, da $x=1$ a $x=2$ radianti.

6 Si calcoli:

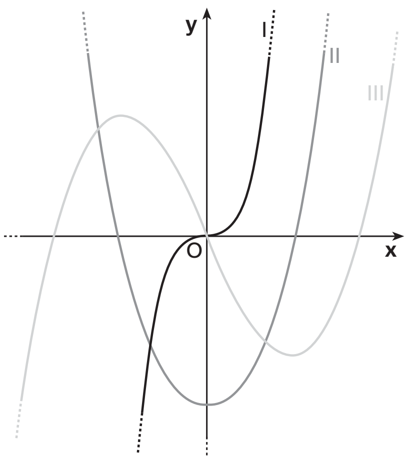
$$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}{x-a}.$$

7 Si provi che l'equazione: $x^{2011}+2011x+12=0$ ha una sola radice compresa fra -1 e 0.

8 In che cosa consiste il problema della quadratura del cerchio? Perché è citato così spesso?

9 Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

10 Nella figura sotto, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici.
Uno di essi è il grafico di una funzione f, un altro lo è della funzione derivata f' e l'altro ancora di f''.
Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?
Si motivi la risposta.



	f	f'	f''
A	I	II	III
B	I	III	II
C	II	III	I
D	III	II	I
E	III	I	II

◀ **Figura 1.**

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

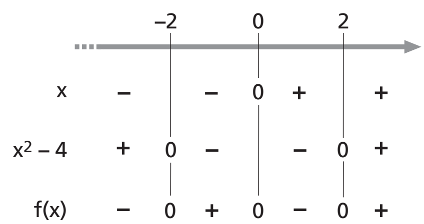
PROBLEMA 1

1. Studiamo la funzione $f(x) = x^3 - 4x$. Essa è polinomiale e ha dominio $\mathbb{R}$; $f(-x) = -x^3 + 4x = -f(x)$, pertanto la funzione è dispari cioè simmetrica rispetto all'origine; tenendo conto che $f(x) = x(x^2 - 4)$ essa interseca gli assi cartesiani nei punti (0; 0), (2; 0), (−2; 0). Valutiamo il segno della funzione ponendo $x(x^2 - 4) > 0$:

$$x > 0,$$
$$x^2 - 4 > 0 \quad \rightarrow \quad x < -2 \vee x > 2.$$

Dal quadro dei segni (figura 2) si deduce:

$$f(x) > 0 \quad \text{per } -2 < x < 0 \vee x > 2,$$
$$f(x) < 0 \quad \text{per } x < -2 \vee 0 < x < 2.$$



▲ **Figura 2.**

Valutiamo il comportamento della funzione agli estremi del dominio: non esistono asintoti verticali poiché la funzione non ha punti di discontinuità; inoltre risulta:

$$\lim_{x \to \pm\infty} (x^3 - 4x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x^3 - 4x)}{x} = +\infty,$$

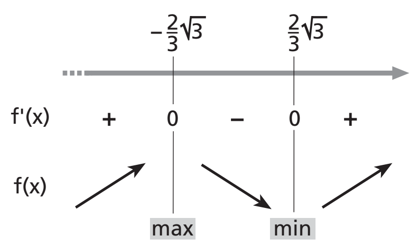
pertanto la funzione non ha asintoti orizzontali, né obliqui.
Studiamo la derivata prima e il suo segno:

$$f'(x) = 3x^2 - 4,$$

$$f'(x) > 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 4 > 0 \quad \rightarrow \quad x < -\frac{2\sqrt{3}}{3} \vee x > \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \vee x = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$f'(x) < 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 4 < 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{2\sqrt{3}}{3} < x < \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$



▲ **Figura 3.**

Dal quadro del segno della derivata prima (figura 3) si trova che la funzione ha un massimo per $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e un minimo per $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Le corrispondenti ordinate valgono:

$$f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{8\sqrt{3}}{9} + \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{9}, \qquad f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{16\sqrt{3}}{9},$$

gli estremi relativi della funzione sono quindi:

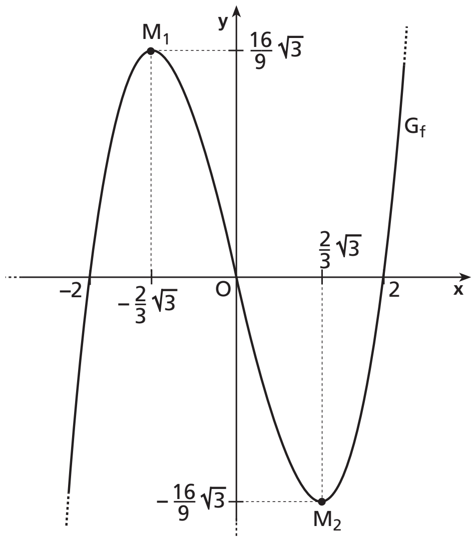
$$M_1\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{16\sqrt{3}}{9}\right), M_2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; -\frac{16\sqrt{3}}{9}\right).$$

Calcoliamo infine la derivata seconda:

$$f''(x) = 6x.$$

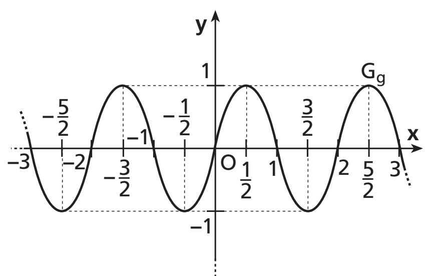
Essa si annulla per $x = 0$, è positiva per $x > 0$, negativa per $x < 0$: la funzione ha un flesso per $x = 0$, ha concavità verso l'alto per $x > 0$, verso il basso per $x < 0$.

Nella figura 4 è riportato il grafico G_f.



◀ **Figura 4.**

Consideriamo la funzione $g(x) = \operatorname{sen} \pi x$: il suo grafico G_g può essere ottenuto dalla funzione $y = \operatorname{sen} x$ tramite una contrazione orizzontale $x' = \dfrac{x}{\pi}$; poiché il periodo della funzione $y = \operatorname{sen} x$ è 2π, il periodo di $g(x) = \operatorname{sen} \pi x$ è $T = 2$. Rappresentiamo in figura 5 il suo grafico G_g.



◀ **Figura 5.**

2. Determiniamo le ascisse dei punti di intersezione di G_f con la retta $y = -3$, risolvendo il sistema:

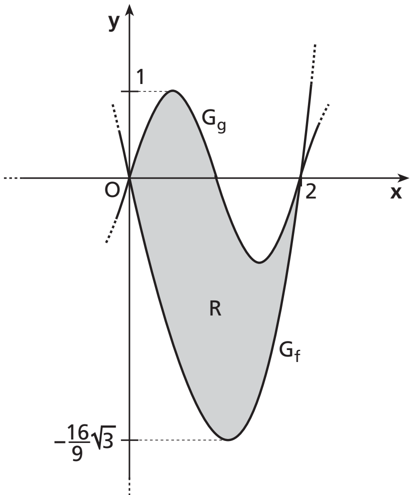
$$\begin{cases} y = x^3 - 4x \\ y = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^3 - 4x + 3 = 0 \\ y = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2 + x - 3) = 0 \\ y = -3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \\ y = -3 \end{cases}$$

Ricaviamo ora i punti di G_g a tangente orizzontale nell'intervallo $[-6; 6]$, deducendoli dal grafico di figura 5 e tenendo conto della periodicità 2 della funzione:

$$\begin{cases} x_k = \dfrac{1}{2} + k \\ y_k = (-1)^k \end{cases} \quad \text{con } -6 \leq k \leq 5,\ k \in \mathbb{Z}.$$

3. Rappresentiamo nello stesso sistema cartesiano i grafici G_f e G_g nell'intervallo [0; 2] (figura 6).

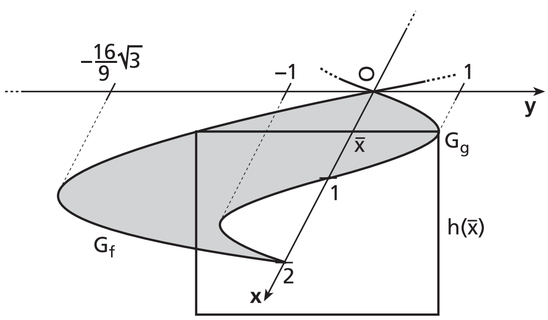


◀ **Figura 6.**

Calcoliamo la superficie S della regione R mediante l'integrale:

$$S=\int_0^2[g(x)-f(x)]dx=\int_0^2(\operatorname{sen}\pi x-x^3+4x)dx=\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x-\frac{x^4}{4}+2x^2\right]_0^2=-\frac{1}{\pi}-4+8+\frac{1}{\pi}=4.$$

4. Calcoliamo il volume della vasca sezionando il solido con piani $x=\bar{x}$, $0\leq\bar{x}\leq 2$ perpendicolari alla superficie dell'acqua (figura 7).



◀ **Figura 7.**

Per ogni piano si ottiene un rettangolo di altezza $h(\bar{x})=3-\bar{x}$ e base $|g(\bar{x})-f(\bar{x})|$; la superficie di tale rettangolo vale:

$$S(\bar{x})=|g(\bar{x})-f(\bar{x})|\cdot h(\bar{x})=|\operatorname{sen}\pi\bar{x}-\bar{x}^3+4\bar{x}|\cdot(3-\bar{x}).$$

Poiché nell'intervallo considerato $g(x)\geq f(x)$, possiamo tralasciare il valore assoluto.
Il volume V della vasca può essere così calcolato mediante l'integrale:

$$V=\int_0^2[\operatorname{sen}\pi\bar{x}-\bar{x}^3+4\bar{x}](3-\bar{x})d\bar{x}=3\int_0^2\operatorname{sen}\pi\bar{x}d\bar{x}-\int_0^2 x\operatorname{sen}\pi\bar{x}d\bar{x}+\int_0^2[-\bar{x}^3+4\bar{x}](3-\bar{x})d\bar{x}=$$

$$=3\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi\bar{x}\right]_0^2-\int_0^2\bar{x}\operatorname{sen}\pi\bar{x}d\bar{x}+\int_0^2(\bar{x}^4-3\bar{x}^3-4\bar{x}^2+12\bar{x})d\bar{x}=$$

$$=3(-1+1)-\int_0^2\bar{x}\operatorname{sen}\pi\bar{x}d\bar{x}+\left[\frac{\bar{x}^5}{5}-\frac{3\bar{x}^4}{4}-\frac{4\bar{x}^3}{3}+6\bar{x}^2\right]_0^2=$$

svolgiamo per parti l'integrale contenuto ancora nell'espressione:

$$= -\left[-\frac{\bar{x}}{\pi}\cos\pi\bar{x}\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{\pi}\cos\pi\bar{x}d\bar{x} + \left[\frac{2^5}{5} - \frac{3\cdot 2^4}{4} - \frac{4\cdot 2^3}{3} + 6\cdot 2^2\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi} - \left[\frac{1}{\pi^2}\operatorname{sen}\pi\bar{x}\right]_0^2 + \left(\frac{32}{5} - 12 - \frac{32}{3} + 24\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{116}{5}.$$

In unità di misura, tenendo conto che 1 dm^3 equivale a 1 L:

$$V = \left(\frac{2}{\pi} + \frac{116}{15}\right)m^3 = \left(\frac{2}{\pi} + \frac{116}{15}\right)\cdot 10^3\ \mathrm{L} \simeq 8369{,}95\ \mathrm{L}.$$

PROBLEMA 2

1. Data la funzione $f(x) = (ax + b)e^{-\frac{x}{3}} + 3$ definita in $\mathbb{R}$, imponiamo $f(0) = 2$:

$$b + 3 = 2 \quad \to \quad b = -1,$$

pertanto $f(x) = (ax - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3$.

Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = ae^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}(ax - 1) \quad \to \quad f'(x) = e^{-\frac{x}{3}}\left(a - \frac{1}{3}ax + \frac{1}{3}\right).$$

Condizione necessaria affinché nel punto $x = 4$ vi sia un estremante è che $f'(4) = 0$:

$$f'(4) = 0 \quad \to \quad e^{-\frac{4}{3}}\left(a - \frac{4}{3}a + \frac{1}{3}\right) = 0 \quad \to \quad a = 1.$$

Assunto $f(x) = (x - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3$, essa ammette in $x = 4$ un massimo se $f''(4) < 0$. Verifichiamolo calcolando la derivata seconda:

$$f'(x) = \frac{e^{-\frac{x}{3}}}{3}(-x + 4), \qquad f''(x) = -\frac{e^{-\frac{x}{3}}}{9}(-x + 7),$$

$$f''(4) = -\frac{e^{-\frac{4}{3}}}{9}(-4 + 7) = -\frac{e^{-\frac{4}{3}}}{3} < 0;$$

pertanto la funzione ammette massimo per $x = 4$.

2. Studiamo la funzione $f(x) = (x - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3$ per tracciare il corrispondente grafico Γ.
Essa ha dominio $\mathbb{R}$ e non presenta simmetrie. Come è noto dal punto 1 del problema, interseca l'asse delle ordinate nel punto (0; 2). Per trovare le intersezioni con l'asse x sarebbe necessario risolvere l'equazione $(x - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3 = 0$ ma questa non è risolubile per via analitica. Per lo stesso motivo non si può affrontare il problema del segno della funzione.
Valutiamo il comportamento della funzione agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3\right] =$$

si tratta di una forma indeterminata del tipo $+\infty \cdot 0$, eliminabile applicando il teorema di De l'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3\right] = 3 + \lim_{x\to+\infty}\frac{x - 1}{e^{\frac{x}{3}}} = 3 + \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{e^{\frac{x}{3}}} = 3.$$

Pertanto la funzione ha asintoto orizzontale $y = 3$ per $x \to +\infty$.

Per $x \to -\infty$ risulta:

$$\lim_{x \to -\infty} \left[(x-1)e^{-\frac{x}{3}} + 3 \right] = -\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{(x-1)e^{-\frac{x}{3}} + 3}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{x}{3}} + \frac{3}{x} \right] = +\infty,$$

allora la funzione non ha asintoto né orizzontale né obliquo sinistro.

Dal punto 1 è nota la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{e^{-\frac{x}{3}}}{3}(-x+4),$$

con:

$$\begin{aligned} &f'(x) > 0 \ \text{ per } x < 4, \ \text{ funzione crescente,} \\ &f'(x) = 0 \ \text{ per } x = 4, \ \text{ punto stazionario,} \\ &f'(x) < 0 \ \text{ per } x > 4, \ \text{ funzione decrescente.} \end{aligned}$$

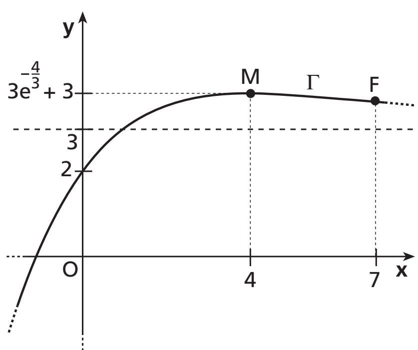
Il punto $x = 4$ è pertanto l'unico estremante della funzione con coordinate $M\left(4; 3e^{-\frac{4}{3}} + 3\right)$.

Ricordiamo la derivata seconda, valutiamo il suo segno e la concavità:

$$f''(x) = -\frac{e^{-\frac{x}{3}}}{9}(-x+7),$$

$$\begin{aligned} &f''(x) > 0 \ \text{ per } x > 7, \ \text{ concavità verso l'alto,} \\ &f''(x) = 0 \ \text{ per } x = 7, \ \text{ punto di flesso,} \\ &f''(x) < 0 \ \text{ per } x < 7, \ \text{ concavità verso il basso.} \end{aligned}$$

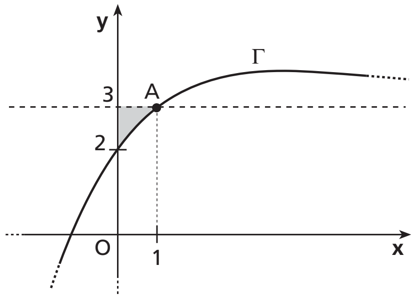
Il grafico Γ ha flesso nel punto $F\left(7; 6e^{-\frac{7}{3}} + 3\right)$; in figura 8 ne è rappresentato il suo andamento.



◀ **Figura 8.**

3. Evidenziamo la regione di piano del primo quadrante delimitata da Γ, dall'asse y e dalla retta $y = 3$ e determiniamo le coordinate del punto intersezione A (figura 9):

$$\begin{cases} y = (x-1)e^{-\frac{x}{3}} + 3 \\ y = 3 \end{cases} \to \begin{cases} (x-1)e^{-\frac{x}{3}} + 3 = 3 \\ y = 3 \end{cases} \to \begin{cases} (x-1)e^{-\frac{x}{3}} = 0 \\ y = 3 \end{cases} \to \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \to A(1; 3)$$



◀ **Figura 9.**

La superficie della zona evidenziata si calcola secondo l'integrale:

$$S=\int_0^1[3-f(x)]dx=\int_0^1\left[3-(x-1)e^{-\frac{x}{3}}-3\right]dx=-\int_0^1(x-1)e^{-\frac{x}{3}}dx=-\int_0^1 xe^{-\frac{x}{3}}dx+\left[-3e^{-\frac{x}{3}}\right]_0^1=$$

calcoliamo l'integrale dell'ultimo membro per parti:

$$=-\left[-3xe^{-\frac{x}{3}}\right]_0^1-3\int_0^1 e^{-\frac{x}{3}}dx-3e^{-\frac{1}{3}}+3=3e^{-\frac{1}{3}}+9\left[e^{-\frac{x}{3}}\right]_0^1-3e^{-\frac{1}{3}}+3=9e^{-\frac{1}{3}}-6.$$

Pertanto la superficie della regione vale $S=9e^{-\frac{1}{3}}-6$.

4. Verifichiamo se la funzione $f(x)$ del punto 2 del problema, per $x>0$ soddisfa la condizione richiesta, ovvero $|f(x_i)-y_i|\leq 10^{-1}$. Completiamo la tabella di partenza calcolando per ogni anno $f(x_i)$ e $|f(x_i)-y_i|$ (arrotondando alla terza cifra decimale).

Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65
$f(x_i)$	2	3	3,513	3,736	3,791	3,756	3,677
$\lvert f(x_i)-y_i\rvert$	0,030	0,020	0,023	0,026	0,009	0,004	0,027

Osservando i valori dell'ultima riga della tabella, la funzione $f(x)$ soddisfa la condizione richiesta e possiamo quindi assumerla come accettabile.
Nondimeno, benché $f(x)>3$ per $x>1$, non possiamo sostenere che l'evoluzione del fenomeno non potrà portare a profitti inferiori ai 3 milioni di euro. Infatti, considerando per esempio l'anno 2020, ovvero per $x=16$, si calcola:

$$f(16)=15e^{-\frac{16}{3}}+3\simeq 3{,}072.$$

Assunta valida la condizione $|f(x_i)-y_i|\leq 10^{-1}$, si ricava:

$$|f(16)-y_{16}|\leq 10^{-1}\ \rightarrow\ f(16)-10^{-1}\leq y_{16}\leq f(16)+10^{-1}\ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 3{,}072-0{,}1\leq y_{16}\leq 3{,}072+0{,}1\ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ 2{,}972\leq y_{16}\leq 3{,}172.$$

Pertanto non abbiamo la certezza che y_{16} sia non inferiore a 3 e che quindi il profitto sia non inferiore ai 3 milioni di euro.

QUESTIONARIO

1 Consideriamo un cilindro inscritto in una sfera di raggio $PO = 60$ cm (figura 10).

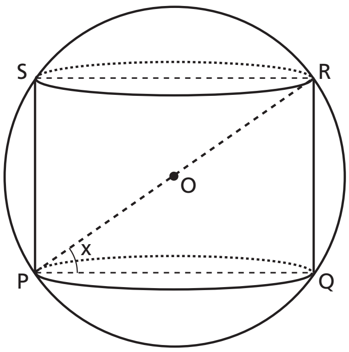


Figura 10.

Il segmento PR è un diametro della sfera e misura 120 cm. Per semplicità tralasciamo provvisoriamente le unità di misura. Indichiamo con x l'angolo $R\hat{P}Q$, dove $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Per i teoremi trigonometrici dei triangoli rettangoli risulta:

$$QR = 120 \operatorname{sen} x, \quad PQ = 120 \cos x.$$

Calcoliamo il volume $V(x)$ del cilindro inscritto:

$$V(x) = \pi \cdot \left(\frac{PQ}{2}\right)^2 \cdot QR,$$

sostituiamo:

$$V(x) = \pi \cdot \left(\frac{120 \cos x}{2}\right)^2 \cdot 120 \operatorname{sen} x \;\rightarrow\; V(x) = 432\,000\pi \cos^2 x \operatorname{sen} x \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; V(x) = 432\,000\pi(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x), \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Calcoliamo la derivata prima $V'(x)$ e studiamone il segno nell'intervallo $0 < x < \frac{\pi}{2}$, tenendo conto che in tale intervallo il seno e il coseno sono positivi e compresi tra 0 e 1:

$$V'(x) = 432\,000\pi(\cos x - 3\cos x \operatorname{sen}^2 x) \;\rightarrow\; V'(x) = 432\,000\pi \cos x(1 - 3\operatorname{sen}^2 x),$$

$$V'(x) > 0 \quad \text{per } 0 < x < \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$V'(x) = 0 \quad \text{per } x = \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$V'(x) < 0 \quad \text{per } \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Pertanto la funzione $V(x)$ è dotata di massimo assoluto nel punto $x = \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3}$. Il corrispondente volume ha valore in cm^3:

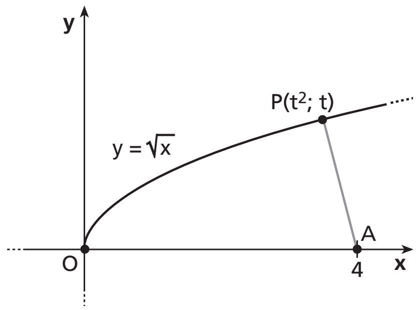
$$V_{max} = V\left(\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 432\,000\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{9}\right) \text{cm}^3 = 432\,000 \cdot \frac{2}{9} \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \text{ cm}^3 = 96\,000\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

Tenendo conto che 1 cm^3 equivale a 10^{-3} L, la capacità in litri del serbatoio iniziale risulta:

$$V = V_{max} = 96\,000\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3 = 96\pi\sqrt{3} \text{ L} \simeq 522{,}37 \text{ L}.$$

2 La funzione reale $y = \sqrt{x}$ ha dominio $[0; +\infty]$ e codominio $[0; +\infty]$; ha grafico corrispondente alla funzione di equazione $x = y^2$ con $y \geq 0$.
Si tratta di un ramo di parabola con vertice nell'origine degli assi cartesiani e asse di simmetria nell'asse delle ascisse (figura 11).
Considerato il punto $A(4; 0)$ e un generico punto $P(t^2; t)$, con $t \geq 0$, appartenente al ramo di parabola, determiniamo la distanza AP in funzione del parametro t:

$$AP = \sqrt{(4 - t^2)^2 + t^2} = \sqrt{t^4 - 7t^2 + 16}.$$



▲ **Figura 11.**

Posto per semplicità $AP = d(t)$, studiamo gli estremanti di tale funzione calcolandone la derivata prima e il suo segno nell'intervallo $t \geq 0$:

$$d'(t) = \frac{2t^3 - 7t}{\sqrt{t^4 - 7t^2 + 16}},$$

$$d'(t) > 0 \quad \text{per } t > \sqrt{\frac{7}{2}},$$

$$d'(t) = 0 \quad \text{per } t = \sqrt{\frac{7}{2}},$$

$$d'(t) < 0 \quad \text{per } 0 < t < \sqrt{\frac{7}{2}}.$$

Risulta allora che la distanza $d(t)$ è minima per $t = \sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

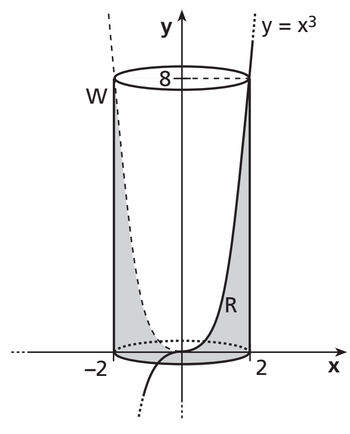
Il corrispondente punto $\overline{P}$ sulla curva la cui distanza dal punto A è minima, ha coordinate $\overline{P}\left(\frac{7}{2}; \frac{\sqrt{14}}{2}\right)$.

3 Consideriamo la regione R di piano delimitata della funzione cubica $y = x^3$, dall'asse x e dalla retta $x = 2$; ruotando tale regione intorno all'asse y si ottiene il solido W (figura 12).
Il volume del solido W si ottiene per differenza tra il volume V_C del cilindro con raggio di base 2 e altezza 8 e il volume V del solido di rotazione del ramo di curva di equazione $x = \sqrt[3]{y}$ intorno all'asse y:

$$V_C = \pi \cdot 2^2 \cdot 8 = 32\pi,$$

$$V = \pi \int_0^8 (\sqrt[3]{y})^2 dy = \pi \left[\frac{y^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} \right]_0^8 = \frac{3}{5}\pi \cdot 8^{\frac{8}{3}} = \frac{3}{5}\pi \cdot 32 = \frac{96}{5}\pi,$$

$$W = V_C - V = 32\pi - \frac{96}{5}\pi = \frac{64}{5}\pi.$$



▲ **Figura 12.**

4 È richiesto di risolvere l'equazione con le combinazioni semplici:

$$C_{n,4} = C_{n,3}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Le condizioni da considerare per l'incognita sono:

$$\begin{cases} n \geq 4 \\ n \geq 3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad n \geq 4, \; n \in \mathbb{N}.$$

Esplicitiamo le combinazioni utilizzando la formula $C_{n,k} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$, con $k \leq n$; otteniamo:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} \quad \to \quad \frac{n-3}{4} = 1 \quad \to \quad n = 7.$$

Considerando le condizioni per l'incognita, la soluzione $n = 7$ è accettabile.

5 Rappresentiamo nella figura 13 la regione delimitata dalla curva $y = \cos x$, dall'asse x, dalle rette $x = 1$ rad e $x = 2$ rad.

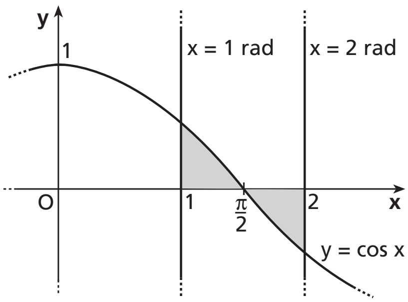


Figura 13.

L'area A della regione delimitata si ottiene suddividendo l'intervallo [1; 2] in due sottointervalli $\left[1; \dfrac{\pi}{2}\right]$ e $\left[\dfrac{\pi}{2}; 2\right]$ in modo che la funzione mantenga in ciascuno di essi lo stesso segno:

$$A = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \left(-\int_{\frac{\pi}{2}}^{2} \cos x dx\right) = [\operatorname{sen} x]_1^{\frac{\pi}{2}} - [\operatorname{sen} x]_{\frac{\pi}{2}}^{2} = 1 - \operatorname{sen} 1 - \operatorname{sen} 2 + 1 = 2 - \operatorname{sen} 1 - \operatorname{sen} 2.$$

6 Dato il $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a}$, calcolando il limite del numeratore e del denominatore, otteniamo la forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$. Essendo verificate tutte le ipotesi di De l'Hospital applichiamo il corrispondente teorema:

$$\lim_{x \to a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1} = 1 + \operatorname{tg}^2 a.$$

Osserviamo che $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a}$ rappresenta il limite del rapporto incrementale della funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ nel punto $x = a$ e che pertanto tale limite va a indicare la derivata della funzione in tale punto. Risulta allora:

$$\lim_{x \to a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a} = f'(a) = 1 + \operatorname{tg}^2 a.$$

7 Associamo all'equazione $x^{2011} + 2011x + 12 = 0$ la funzione $f(x) = x^{2011} + 2011x + 12$. Osserviamo che:

$f(-1) = -1 - 2011 + 12 = 2000 < 0,$
$f(0) = 12 > 0.$

Nell'intervallo $[-1; 0]$ la funzione è continua, pertanto per il teorema di esistenza degli zeri esiste almeno un punto $c \in]-1; 0[$ in cui essa si annulla. Inoltre la funzione è derivabile nell'intervallo $]-1; 0[$; calcoliamo la derivata prima e studiamone il segno:

$$f'(x) = 2011x^{2010} + 2011,$$
$$f'(x) > 0,\ x \in]-1; 0[.$$

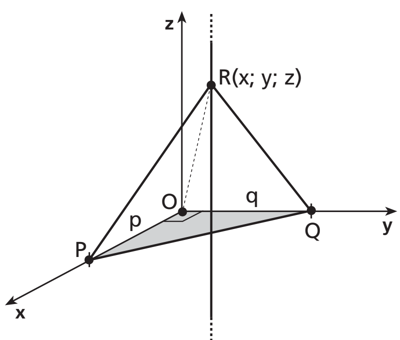
Pertanto vale il primo teorema di unicità dello zero: esiste ed è unico un punto $x = c$ in cui la funzione si annulla.
Ne segue che l'equazione di partenza ha una sola radice compresa tra -1 e 0.

8 Il problema della quadratura del cerchio consiste nel costruire con la sola tecnica euclidea di riga e compasso il quadrato equivalente a un cerchio di raggio dato. Tale questione interessò già Ippocrate da Chio intorno al 440 a.C., il quale si dedicò alla quadratura della *lunula* (figura piana limitata da due archi di circonferenza) e fino alla seconda metà dell'Ottocento molti matematici tentarono di risolvere invano questo problema.
Se r è il raggio di una circonferenza si tratta di costruire un quadrato di lato l di pari area. In formule:

$$l^2 = \pi r^2 \quad \rightarrow \quad l = r\sqrt{\pi}.$$

La difficoltà sta nel poter costruire con riga e compasso un segmento di misura proporzionale a $\sqrt{\pi}$.
Solo nel 1882 il matematico tedesco Ferdinand Lindemann (1852-1939) dimostrò l'impossibilità di tale costruzione. Tenendo conto che i numeri costruibili con riga e compasso costituiscono un sottoinsieme dei numeri algebrici e che i numeri trascendenti non possono essere costruiti con tale tecnica, egli dimostrò che il numero π, e quindi $\sqrt{\pi}$, erano numeri trascendenti.

9 Studiamo il problema secondo un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy (figura 14).



◀ **Figura 14.**

Il triangolo rettangolo POQ è retto in O, appartiene al piano $z = 0$ e ha vertici di coordinate $P(p; 0; 0)$, $Q(0; q; 0)$.
Sia $R(x; y; z)$ un punto dello spazio che soddisfi le proprietà del luogo geometrico $\overline{RP} = \overline{RO} = \overline{RQ}$; risulta:

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (y-q)^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Elevando al quadrato i membri delle uguaglianze e sviluppando i prodotti notevoli, otteniamo:

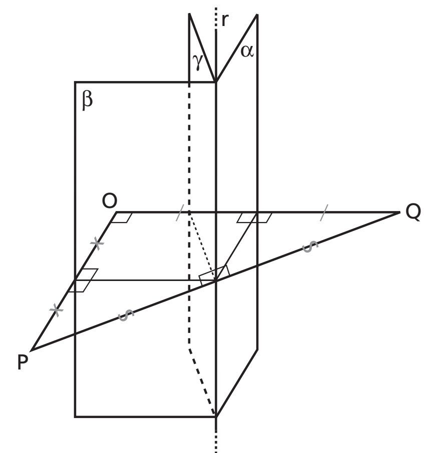
$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 - 2qy + q^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

La doppia uguaglianza è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} -2px + p^2 = -2qy + q^2 \\ -2qy + q^2 = 0 \\ -2\,px + p^2 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{p}{2} \\ y = \dfrac{q}{2} \end{cases}$$

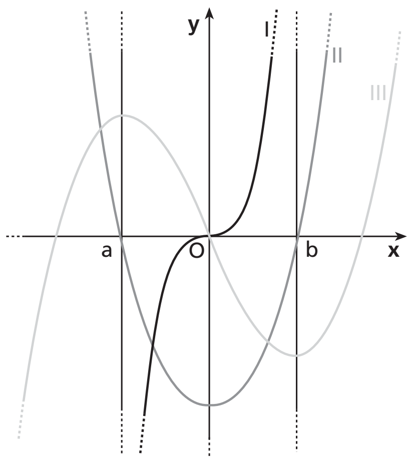
Le soluzioni del sistema, luogo geometrico richiesto, rappresentano le equazioni della retta perpendicolare al piano $z = 0$ del triangolo, passante per il punto medio $\left(\frac{p}{2}; \frac{q}{2}; 0\right)$ dell'ipotenusa *PQ* del triangolo stesso.

Osserviamo che il problema poteva essere risolto attraverso la geometria euclidea dimostrativa (figura 15).
Infatti, se consideriamo un lato del triangolo, per esempio *OQ*, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai punti *O* e *Q* è il piano assiale α, ovvero il piano perpendicolare a *OQ* e passante per il suo punto medio. In maniera analoga si individuano i piani assiali β e γ per i restanti lati *OP* e *PQ*. L'intersezione di questi tre piani è una retta *r*, perpendicolare al piano del triangolo e passante per il punto medio dell'ipotenusa *PQ*. Tale retta è pertanto il luogo dei punti equidistanti dai vertici del triangolo rettangolo.



▲ **Figura 15.**

10 Indichiamo con $x = a$ $(a < 0)$ e $x = b$ $(b > 0)$ gli zeri del grafico II e tracciamo le corrispondenti rette (figura 16).



◀ **Figura 16.**

Osserviamo che il grafico I è strettamente crescente in $\mathbb{R}$, pertanto la sua derivata prima deve essere non negativa in tale insieme. Ciò permette di escludere le alternative A e B, secondo cui la derivata prima (grafico II o grafico III) è negativa in un certo intervallo.

Consideriamo l'alternativa C: il grafico II ha concavità rivolta verso l'alto in $\mathbb{R}$; ciò implica la positività della derivata seconda. Questo fa così escludere l'alternativa in esame dove per $x < 0$ la derivata seconda (grafico I) è negativa.
Ugualmente si può escludere l'alternativa E: per $x > 0$ il grafico III ha concavità rivolta verso l'alto, mentre la sua derivata seconda (grafico II) è negativa per $0 < x < b$.
Valutiamo ora l'alternativa D: il grafico II, derivata prima della funzione, ha ordinata positiva per

$x < a \vee x > b$, nulla per $x = a$ e $x = b$, ha ordinata negativa per $a < x < b$.

Ciò è sufficiente per dedurre che la funzione è crescente per $x < a \vee x > b$, ha massimo e minimo relativo rispettivamente per $x = a$ e $x = b$, è decrescente per $a < x < b$. Tali proprietà sono compatibili con il grafico III. Analogamente, il grafico I, derivata seconda della funzione, ha ordinata positiva per $x > 0$, nulla per $x = 0$, ordinata negativa per $x < 0$.
Ciò implica che la corrispondente funzione ha concavità rivolta verso l'alto per $x > 0$, verso il basso per $x < 0$, ha flesso per $x = 0$. Tali caratteristiche sono ancora compatibili con il grafico III. Pertanto si assume esatta l'alternativa D.