ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2011

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Sia f la funzione definita sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali da $f(x) = x + \ln 4 + \dfrac{2}{e^x + 1}$ e sia Γ la sua rappresentazione grafica nel sistema di riferimento Oxy.

1. Si determini il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ e a $-\infty$. Si calcoli $f(x) + f(-x)$ e si spieghi perché dal risultato si può dedurre che il punto $A(0; 1 + \ln 4)$ è centro di simmetria di Γ.
2. Si provi che, per tutti i reali m, l'equazione $f(x) = m$ ammette una e una sola soluzione in $\mathbb{R}$. Sia α la soluzione dell'equazione $f(x) = 3$; per quale valore di m il numero $-\alpha$ è soluzione dell'equazione $f(x) = m$?
3. Si provi che, per tutti gli x reali, è: $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$. Si provi altresì che la retta r di equazione $y = x + \ln 4$ e la retta s di equazione $y = x + 2 + \ln 4$ sono asintoti di Γ e che Γ è interamente compresa nella striscia piana delimitata da r e da s.
4. Posto $I(\beta) = \int_0^\beta [f(x) - x - \ln 4]dx$, si calcoli: $\lim_{\beta \to +\infty} I(\beta)$. Qual è il significato geometrico del risultato ottenuto?

PROBLEMA 2

Per il progetto di una piscina, un architetto si ispira alle funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da:

$$f(x) = x^3 - 16x \quad \text{e} \quad g(x) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x.$$

1. Si studino le funzioni f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy. Si considerino i punti del grafico di g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo $[-10; 10]$ e se ne indichino le coordinate.
2. L'architetto rappresenta la superficie libera dell'acqua nella piscina con la regione R delimitata dai grafici di f e di g sull'intervallo $[0; 4]$. Si calcoli l'area di R.
3. Ai bordi della piscina, nei punti di intersezione del contorno di R con le rette $y = -15$ e $y = -5$, l'architetto progetta di collocare dei fari per illuminare la superficie dell'acqua.
   Si calcolino le ascisse di tali punti (è sufficiente un'approssimazione a meno di 10^{-1}).
4. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y, la misura della profondità dell'acqua nella piscina è data da $h(x) = 5 - x$. Quale sarà il volume d'acqua nella piscina? Quanti litri d'acqua saranno necessari per riempire la piscina se tutte le misure sono espresse in metri?

QUESTIONARIO

1 Silvia, che ha frequentato un indirizzo sperimentale di liceo scientifico, sta dicendo a una sua amica che la geometria euclidea non è più vera perché per descrivere la realtà del mondo che ci circonda occorrono modelli di geometria non euclidea. Silvia ha ragione? Si motivi la risposta.

2 Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate $(4; 0)$.

3 Sia R la regione delimitata, per $x \in [0; \pi]$, dalla curva $y = \operatorname{sen} x$ e dall'asse x e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y. Si calcoli il volume di W.

4 Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi n.

5 In una delle sue opere G. Galilei fa porre da Salviati, uno dei personaggi, la seguente questione riguardante l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali («i numeri tutti»). Dice Salviati: «...se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?». Come si può rispondere all'interrogativo posto e con quali argomentazioni?

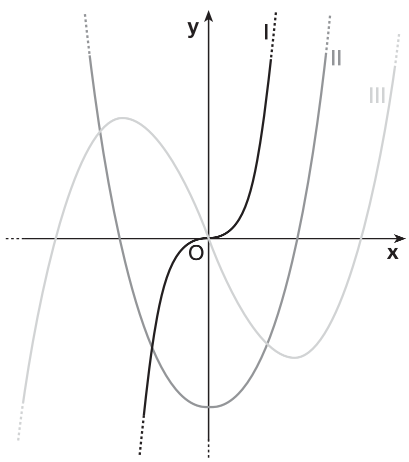
6 Di tutti i coni inscritti in una sfera di raggio 10 cm, qual è quello di superficie laterale massima?

7 Un test d'esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta fra quattro alternative. Qual è la probabilità che, rispondendo a caso alle dieci domande, almeno due risposte risultino corrette?

8 In che cosa consiste il problema della quadratura del cerchio? Perché è citato così spesso?

9 Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

10 Nella figura sotto, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici.
Uno di essi è il grafico di una funzione f, un altro lo è della funzione derivata f' e l'altro ancora di f''.
Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?
Si motivi la risposta.



	f	f'	f''
A	I	II	III
B	I	III	II
C	II	III	I
D	III	II	I
E	III	I	II

◀ **Figura 1.**

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2011

PROBLEMA 1

1. La funzione $f(x) = x + \ln 4 + \dfrac{2}{e^x + 1}$ di grafico Γ ha dominio $\mathbb{R}$. Determiniamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to +\infty}\left(x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1}\right) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty}\left(x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1}\right) = -\infty.$$

Calcoliamo $f(x) + f(-x)$:

$$f(x) + f(-x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} + \left(-x + \ln 4 + \frac{2}{e^{-x} + 1}\right) = 2\ln 4 + 2\left(\frac{1}{e^x + 1} + \frac{e^x}{1 + e^x}\right) =$$
$$= 2(\ln 4 + 1).$$

Dal risultato si deduce che:

$$\frac{f(x) + f(-x)}{2} = \ln 4 + 1 \quad \text{e} \quad \frac{x + (-x)}{2} = 0.$$

Pertanto il punto $(\ln 4 + 1;\, 0)$ è medio tra i due punti $(x;\, f(x))$ e $(-x;\, f(-x))$ appartenenti al grafico Γ, con $x \in \mathbb{R}$.
Segue allora che il punto $A(\ln 4 + 1;\, 0)$ è centro di simmetria per il grafico Γ per definizione di simmetria centrale di una curva rispetto a un punto. Il punto A è il punto intersezione con l'asse y.

2. Data l'equazione $f(x) = m$, consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - m$, con m reale. La funzione g è continua in $\mathbb{R}$; agli estremi del suo dominio i limiti valgono:

$$\lim_{x \to +\infty}\left(x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} - m\right) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty}\left(x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} - m\right) = -\infty.$$

Pertanto, fissato m, esisterà un intervallo limitato e chiuso ai cui estremi la funzione assume segno opposto. Allora vale il teorema di esistenza degli zeri: esiste almeno un punto in tale intervallo in cui la funzione $g(x) = f(x) - m$ si annulla e quindi $f(x) = m$.
Inoltre la funzione è derivabile in $\mathbb{R}$ per qualsiasi valore di m e risulta:

$$g'(x) = 1 + 2\left[-\frac{e^x}{(e^x + 1)^2}\right] = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}.$$

Se ne deduce che la funzione è strettamente crescente in $\mathbb{R}$; per il primo teorema di unicità dello zero, per tutti i reali m, la funzione $g(x) = f(x) - m$ ammette uno e un solo zero in $\mathbb{R}$ e quindi l'equazione $f(x) = m$ ammette una e una sola radice in $\mathbb{R}$.
Se α è la soluzione dell'equazione $f(x) = 3$, per sostituzione risulta:

$$f(\alpha) = 3.$$

Inoltre, per quanto visto al punto 1 del problema, vale:

$$f(\alpha) + f(-\alpha) = 2(\ln 4 + 1) \qquad \to \qquad f(-\alpha) = 2(\ln 4 + 1) - f(\alpha) = 2(\ln 4 + 1) - 3 = 2\ln 4 - 1.$$

Si deduce allora che $-\alpha$ è soluzione di $f(x) = m$ quando $m = 2\ln 4 - 1$.

3. Dalla relazione del punto 1, $f(x)+f(-x)=2(\ln 4+1)$, esplicitiamo $f(x)$ e sostituiamo l'espressione corrispondente a $f(-x)$:

$$f(x)=2(\ln 4+1)-f(-x)=$$
$$=2(\ln 4+1)-\left(-x+\ln 4+\frac{2}{e^{-x}+1}\right)=2\ln 4+2+x-\ln 4-\frac{2e^x}{e^x+1}=x+2+\ln 4-\frac{2e^x}{e^x+1}.$$

Per tutti gli x reali vale allora:

$$f(x)=x+2+\ln 4-\frac{2e^x}{e^x+1}.$$

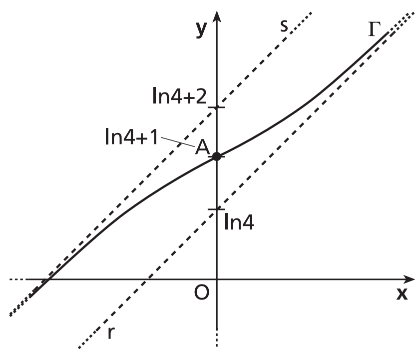
Determiniamo ora gli eventuali asintoti obliqui della funzione f espressa nella forma appena trovata $f(x)=x+2+\ln 4-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$; calcoliamo i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2+\ln 4-\dfrac{2e^x}{e^x+1}}{x}=1,\qquad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-1\cdot x)=\ln 4;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2+\ln 4-\dfrac{2e^x}{e^x+1}}{x}=1,\qquad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-1\cdot x)=2+\ln 4.$$

La funzione ha asintoto obliquo destro r di equazione $y=x+\ln 4$, asintoto obliquo sinistro s di equazione $y=x+2+\ln 4$.
Rappresentiamo nella figura 2 il grafico Γ della funzione.
Confrontiamo ora l'equazione di f scritta nella forma $f(x)=x+\ln 4+\dfrac{2}{e^x+1}$, con l'equazione della retta r, $y_r=x+\ln 4$, risulta:

$$x+\ln 4+\frac{2}{e^x+1}>x+\ln 4,\ \forall x\in\mathbb{R}\quad\rightarrow\quad f(x)>y_r.$$



▲ **Figura 2.**

Analogamente raffrontiamo l'equazione di f scritta nella forma $f(x)=x+2+\ln 4-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$, con l'equazione della retta s, $y_s=x+2+\ln 4$, si ricava:

$$x+2+\ln 4-\frac{2e^x}{e^x+1}<x+2+\ln 4,\ \forall x\in\mathbb{R}\quad\rightarrow\quad f(x)>y_s.$$

In conclusione il grafico Γ è interamente compreso nella striscia piana delimitata da r e da s.

4. Consideriamo l'integrale $I(\beta)=\int_0^\beta [f(x)-x-\ln 4]dx$, con $\beta>0$, sostituendo l'espressione della funzione $f(x)=x+\ln 4+\dfrac{2}{e^x+1}$:

$$I(\beta)=\int_0^\beta\left[x+\ln 4+\frac{2}{e^x+1}-x-\ln 4\right]dx=\int_0^\beta\frac{2}{e^x+1}\,dx.$$

Calcoliamo il limite dell'integrale:

$$\lim_{\beta\to+\infty} I(\beta)=\lim_{\beta\to+\infty}\int_0^\beta\frac{2}{e^x+1}\,dx=$$

poniamo $t = e^x$, da cui $\dfrac{dt}{t} = dx$:

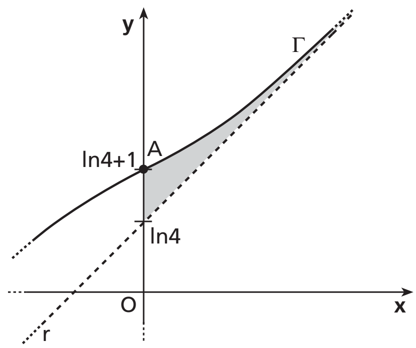
$$= \lim_{\beta\to+\infty} 2\int_0^{e^\beta} \frac{1}{t(t+1)}\,dt =$$

poiché $\dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+1}$, risulta:

$$= \lim_{\beta\to+\infty} 2\int_1^{e^\beta}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \lim_{\beta\to+\infty} 2[\ln t - \ln(t+1)]_1^{e^\beta} = 2\lim_{\beta\to+\infty}\left[\ln\frac{t}{t+1}\right]_1^{e^\beta} =$$

$$= 2\lim_{\beta\to+\infty} \ln\frac{e^\beta}{e^\beta+1} + 2\ln 2 = 2\ln 2 = \ln 4.$$

Il limite $\lim\limits_{\beta\to+\infty} I(\beta)$, con $I(\beta) = \int_0^\beta [f(x) - x - \ln 4]dx$, rappresenta l'area della regione di piano compresa tra l'asse y, il grafico Γ e la retta r (figura 3). Tale superficie misura quindi ln 4.



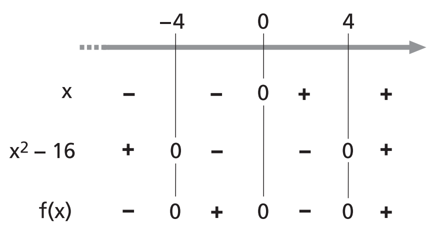
▲ **Figura 3.**

PROBLEMA 2

1. Studiamo la funzione $f(x) = x^3 - 16x$: ha dominio nel campo reale; $f(-x) = -x^3 + 16x = -f(x)$, pertanto il corrispondente grafico è simmetrico rispetto all'origine del sistema cartesiano; le intersezioni con gli assi sono (0; 0), (4; 0), (−4; 0). Valutiamo il segno della funzione ponendo $x(x^2 - 16) > 0$:

$x > 0$,
$x^2 - 16 > 0 \quad\to\quad x < -4 \vee x > 4$.

▶ **Figura 4.**



Dal quadro del segno (figura 4) si deduce:

$f(x) > 0$ per $-4 < x < 0 \vee x > 4$,
$f(x) < 0$ per $x < -4 \vee 0 < x < 4$.

Valutiamo il comportamento della funzione agli estremi del dominio: non esistono asintoti verticali poiché la funzione non ha punti di discontinuità; inoltre risulta:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(x^3 - 16x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3 - 16x}{x} = +\infty,$$

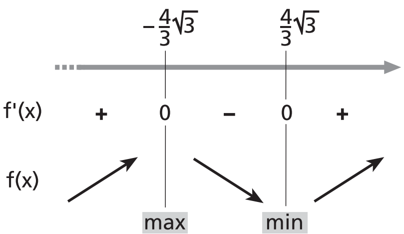
pertanto la funzione non ha asintoti orizzontali, né obliqui.
Studiamo la derivata prima e il suo segno:

$$f'(x) = 3x^2 - 16,$$

$$f'(x) > 0 \quad\to\quad 3x^2 - 16 > 0 \quad\to\quad x < -\frac{4\sqrt{3}}{3} \vee x > \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$f'(x) = 0 \quad\to\quad 3x^2 - 16 = 0 \quad\to\quad x = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \vee x = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$f'(x) < 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 16 < 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{4\sqrt{3}}{3} < x < \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$



◀ **Figura 5.**

Dal quadro del segno della derivata prima (figura 5) si ricava che la funzione ha un massimo per $x = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$ e un minimo per $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Le corrispondenti ordinate valgono:

$$f\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{64\sqrt{3}}{9} + \frac{192\sqrt{3}}{3} = \frac{128\sqrt{3}}{9}, \quad f\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{128\sqrt{3}}{9},$$

gli estremi relativi della funzione sono quindi:

$$M_1\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{128\sqrt{3}}{9}\right), \; M_2\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, -\frac{128\sqrt{3}}{9}\right).$$

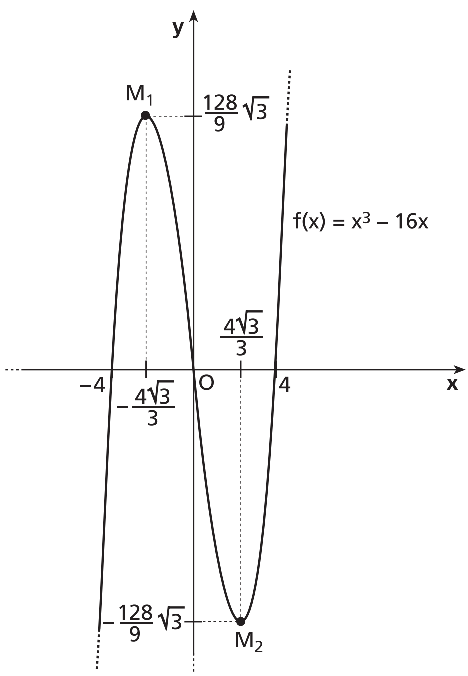
Calcoliamo infine la derivata seconda:

$$f''(x) = 6x.$$

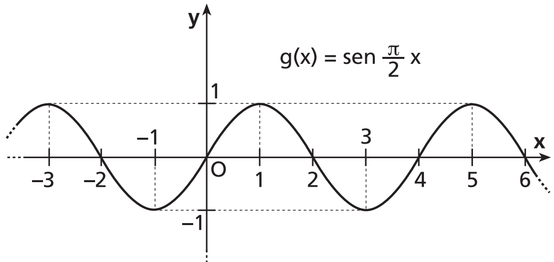
Essa si annulla per $x = 0$, è positiva per $x > 0$, negativa per $x < 0$: la funzione ha un flesso per $x = 0$, ha concavità verso l'alto per $x > 0$, verso il basso per $x < 0$.

Nella figura 6 è riportato il grafico di $f(x) = x^3 - 16x$.

Consideriamo la funzione $g(x) = \text{sen}\frac{\pi}{2}x$: il suo grafico si ottiene dalla funzione $y = \text{sen}\, x$ tramite una contrazione orizzontale $x' = \frac{x}{\frac{\pi}{2}}$; poiché il periodo della funzione $y = \text{sen}\, x$ è 2π, il periodo di $g(x) = \text{sen}\frac{\pi}{2}x$ è $T = 4$. Rappresentiamo in figura 7 il suo grafico.



▲ **Figura 6.**

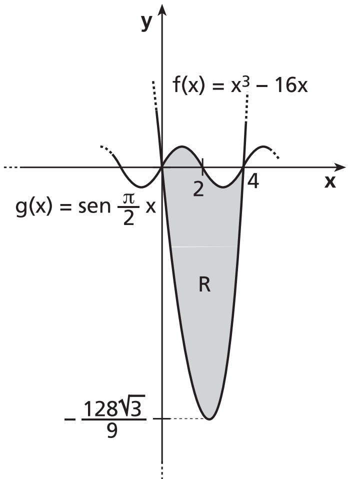


◀ **Figura 7.**

Ricaviamo ora i punti del grafico di g a tangente orizzontale nell'intervallo $[-10; 10]$, deducendoli dal grafico di figura 7 e tenendo conto della periodicità $T=4$ della funzione:

$$\begin{cases} x_k = 2k+1 \\ y_k = (-1)^k \end{cases} \quad \text{con } -5 \le k \le 4,\ k \in \mathbb{Z}.$$

2. Rappresentiamo nello stesso sistema cartesiano i grafici delle funzioni f e g e indichiamo con R la regione delimitata nell'intervallo $[0; 4]$ (figura 8).



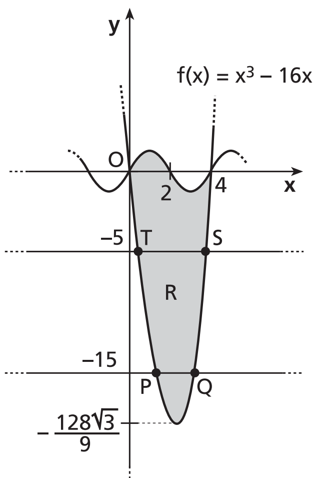
◀ **Figura 8.**

Calcoliamo la superficie S della regione R mediante l'integrale:

$$S = \int_0^4 [g(x) - f(x)]dx =$$

$$= \int_0^4 \left(\text{sen}\frac{\pi}{2}x - x^3 + 16x \right) dx = \left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x - \frac{x^4}{4} + 8x^2 \right]_0^4 = -\frac{2}{\pi} - 64 + 128 + \frac{2}{\pi} = 64.$$

3. Tracciamo le rette $y=-15$ e $y=-5$ che intersecano il contorno della regione R nei punti P, Q, S, T (figura 9).



◀ **Figura 9.**

Determiniamo le ascisse dei punti P e Q, risolvendo il seguente sistema per $0 < x < 4$:

$$\begin{cases} y = x^3 - 16x \\ y = -15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^3 - 16x + 15 = 0 \\ y = -15 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2 + x - 15) = 0 \\ y = -15 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} (x-1)\left(x - \dfrac{-1-\sqrt{61}}{2}\right)\left(x - \dfrac{-1+\sqrt{61}}{2}\right) = 0 \\ y = -15 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -15 \end{cases} \vee \begin{cases} x - \dfrac{-1-\sqrt{61}}{2} \text{ non accettabile} \\ y = -15 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{-1+\sqrt{61}}{2} \\ y = -15 \end{cases}$$

Pertanto risulta:

$$x_P = 1, \quad x_Q = \frac{-1+\sqrt{61}}{2}.$$

Le ascisse dei punti S e T, con $0 < x < 4$ soddisfano il sistema:

$$\begin{cases} y = x^3 - 16x \\ y = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^3 - 16x + 5 = 0 \\ y = -5 \end{cases}$$

L'equazione $x^3 - 16x + 15 = 0$ non ha soluzioni razionali, pertanto procediamo con l'analisi numerica secondo un'approssimazione a meno di 10^{-1}, deducendo dal grafico che esistono due radici x_T e x_S.
Posto $p(x) = x^3 - 16x + 5$, osserviamo che $p(0) = 5$ e $p(1) = -10$, segue che $0 < x_T < 1$; applichiamo il metodo di bisezione, partendo dai valori $a_0 = 0$ e $b_0 = 1$.

a	$p(a)$	b	$p(b)$	$\frac{a+b}{2}$	$p\left(\frac{a+b}{2}\right)$
0	5	1	− 10	0,5	− 2,875
0	5	0,5	− 2,875	0,25	1,016
0,25	1,016	0,5	− 2,875	0,375	0,947
0,25	1,016	0,375	− 0,947	0,3125	0,031

Si trova quindi che $x_T = 0{,}3$ a meno di 10^{-1}.
Ricerchiamo ora il valore approssimato di x_S, osservando che $p(3) = -16$ e $p(4) = 5$, segue che $3 < x_S < 4$; riapplichiamo il metodo di bisezione, partendo dai valori $a_0 = 3$ e $b_0 = 4$.

a	$p(a)$	b	$p(b)$	$\frac{a+b}{2}$	$p\left(\frac{a+b}{2}\right)$
3	− 16	4	5	3,5	− 8,125
3,5	− 8,125	4	5	3,75	− 2,266
3,75	− 2,266	4	5	3,875	1,186
3,75	− 2,266	3,875	1,186	3,813	− 0,571

Dalla tabella ricaviamo così che un valore approssimato della radice è $x_S = 3{,}8$ con un errore minore di 0,1.

4. Calcoliamo il volume della piscina sezionando il solido con piani $x = \overline{x}$, $0 \leq \overline{x} \leq 4$ perpendicolari alla superficie dell'acqua (figura 10).

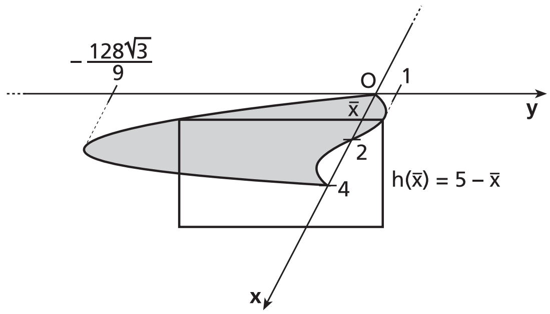


Figura 10.

Per ogni piano si ottiene un rettangolo di altezza $h(\overline{x}) = 5 - x$ e base $g(\overline{x}) - f(\overline{x})$; l'area di tale rettangolo vale:

$$(g(\overline{x}) - f(\overline{x})) \cdot h(\overline{x}) = \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\overline{x} - x^3 + 16\overline{x}\right) \cdot (5 - \overline{x}).$$

Il volume V della vasca può essere così calcolato mediante l'integrale:

$$V = \int_0^4 \left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\overline{x} - \overline{x}^3 + 16\overline{x}\right](5 - \overline{x})d\overline{x} = 5\int_0^4 \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\overline{x}d\overline{x} - \int_0^4 \overline{x}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\overline{x}d\overline{x} + \int_0^4 [-\overline{x}^3 + 16\overline{x}](5 - \overline{x})d\overline{x} =$$

$$= 5\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}\overline{x}\right]_0^4 - \int_0^4 \overline{x}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\overline{x}d\overline{x} + \int_0^4 (\overline{x}^4 - 5\overline{x}^3 - 16\overline{x}^2 + 80\overline{x})d\overline{x} =$$

$$= 5(-1 + 1) - \int_0^4 \overline{x}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\overline{x}d\overline{x} + \left[\frac{\overline{x}^5}{5} - \frac{5\overline{x}^4}{4} - \frac{16\overline{x}^3}{3} + 40\overline{x}^2\right]_0^4 =$$

svolgiamo per parti l'integrale contenuto ancora nell'espressione:

$$= -\left[-\frac{2\overline{x}}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}\overline{x}\right]_0^4 - \int_0^4 \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}\overline{x}\,d\overline{x} + \left[\frac{4^5}{5} - \frac{5 \cdot 4^4}{4} - \frac{16 \cdot 4^3}{3} + 40 \cdot 4^2\right] =$$

$$= \frac{8}{\pi} - \left[\frac{4}{\pi^2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\overline{x}\right]_0^4 + \left(\frac{1024}{5} - 320 - \frac{1024}{3} + 640\right) = \frac{8}{\pi} + \frac{2752}{15}.$$

In unità di misura, tenendo conto che 1 dm^3 equivale a 1 L:

$$V = \left(\frac{8}{\pi} + \frac{2752}{15}\right)m^3 = \left(\frac{8}{\pi} + \frac{2752}{15}\right) \cdot 10^3 \text{ L} \simeq 16013{,}15 \text{ L}.$$

QUESTIONARIO

1 A partire dal XVIII secolo, molti filosofi e matematici si dedicarono a un'analisi critica della geometria euclidea aprendo un dibattito sulla validità del V postulato e sulla possibilità di dimostrarlo in base agli altri quattro. Tale discussione portò nell'arco di un secolo alla costruzione delle geometrie non euclidee, cioè di geometrie basate su un sistema assiomatico diverso da quello di Euclide. Nella prima metà del XIX secolo i matematici Bolyai e Lobačevskij posero le basi della geometria non euclidea detta *iperbolica*, sostituendo il V postulato con la sua negazione (*per un punto passano almeno due rette parallele a una retta data*). In particolare, Lobačevskij attribuiva alla geometria i caratteri di una scienza empirica, in cui l'esperienza gioca un ruolo importante per definire le effettive proprietà dello spazio. I suoi calcoli astronomici relativi al triangolo Terra-Sole-Sirio lo portarono a pensare che, benché il modello euclideo risultasse soddisfacente nella rappresentazione della realtà fisica dei nostri sensi, esso potesse diventare inadeguato e falso per descrivere il mondo fisico nella sua globalità.

Oltre alla geometria iperbolica furono costruite altre geometrie non euclidee, dotate di coerenza e completezza, dette geometria *sferica* e geometria *ellittica*. Ciò portò i fisici a rivedere lo spazio fisico, fino ad allora interpretato secondo il modello euclideo. La relatività generale di Einstein stabiliva l'esistenza di un rapporto tra spazio e materia molto diverso da quello della teoria newtoniana: la presenza di materia può deformare lo spazio; lo spazio può essere globalmente curvo e deve presentare curvature a livello locale. Mentre le osservazioni più recenti (esperimento *Boomerang* del 2000) sembrano dimostrare che lo spazio ha una struttura globalmente euclidea, le osservazioni di un'eclisse di Sole e la curvatura dei raggi luminosi ha confermato nel 1919 l'esistenza delle deformazioni locali einsteiniane. In conclusione non è esatto dire che la geometria euclidea non è più vera o che un modello è più esatto di altri: esistono solo modelli che meglio rappresentano le situazioni locali.

2 Vedi lo svolgimento del quesito 2 della prova del corso di ordinamento 2011.

3 In figura 11 è rappresentato il solido W ottenuto dalla rotazione intorno all'asse y della regione delimitata dalla curva $y = \operatorname{sen} x$ e dall'asse x, per $x \in [0; \pi]$.

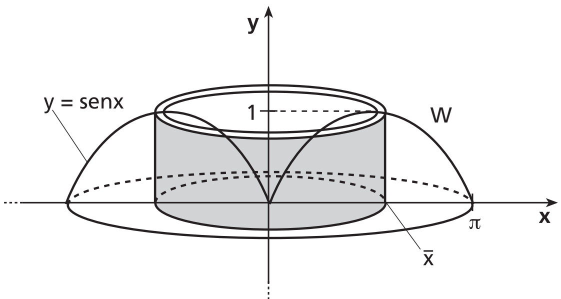


Figura 11.

Consideriamo il cilindro di raggio $\overline{x}$, $0 < \overline{x} < \pi$, e altezza $\operatorname{sen}\overline{x}$. Esso ha superficie laterale $S(\overline{x}) = 2\pi\overline{x} \cdot \operatorname{sen}\overline{x}$.
Il volume del solido W può essere calcolato tramite il seguente integrale risolto per parti:

$$V = \int_0^{\pi} S(\overline{x})\,d\overline{x} = \int_0^{\pi} 2\pi\overline{x} \cdot \operatorname{sen}\overline{x}\,d\overline{x} = 2\pi\left(\Big[-\overline{x}\cos\overline{x}\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos\overline{x}\,d\overline{x}\right) = 2\pi(\pi + 0) = 2\pi^2.$$

4 Vedi lo svolgimento del quesito 4 della prova del corso di ordinamento 2011.

5 Consideriamo l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$; sia A l'insieme dei quadrati dei numeri naturali:

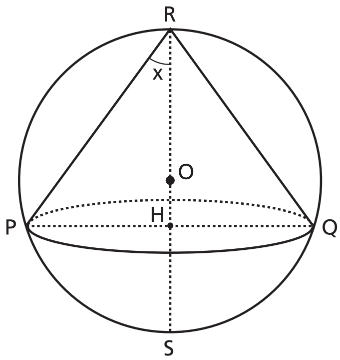
$$A = \{q \in \mathbb{N} \mid q = n^2,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

L'insieme A è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{N}$ ovvero $A \subset \mathbb{N}$, i due insiemi sono ordinati per inclusione ma sono infiniti.
Ugualmente si può definire una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e A:

$$n \mapsto n^2,$$

ovvero a un numero naturale corrisponde uno e un solo numero, suo quadrato. L'insieme di partenza $\mathbb{N}$ e quello di arrivo A sono ordinati per cardinalità. Pertanto affermare che i numeri naturali sono in numero maggiore che i corrispondenti quadrati è falso.

6 Consideriamo una sfera di raggio $OR = 10$ cm e un cono a esso inscritto (figura 12).



◀ **Figura 12.**

Il segmento RS è un diametro della sfera e misura 20 cm. Per semplicità tralasciamo, per il momento, l'unità di misura. Indichiamo con x l'angolo $P\hat{R}S$, dove $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Per i teoremi trigonometrici dei triangoli rettangoli risulta:

$$\overline{PR} = \overline{RS} \cdot \cos x = 20 \cos x, \qquad \overline{PH} = \overline{PR} \cdot \operatorname{sen} x = 20 \operatorname{sen} x \cos x.$$

Calcoliamo la superficie laterale $S(x)$ del cono inscritto:

$$S(x) = \pi \cdot \overline{PH} \cdot \overline{PR},$$

sostituiamo:

$$S(x) = \pi(20 \operatorname{sen} x \cos x \cdot 20 \cos x) = 400\pi \cos^2 x \operatorname{sen} x = 400\pi(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Calcoliamo la derivata prima $S'(x)$ e studiamone il segno nell'intervallo $0 < x < \frac{\pi}{2}$, tenendo conto che in tale intervallo il seno e il coseno sono positivi e compresi tra 0 e 1:

$$S'(x) = 400\pi(\cos x - 3 \cos x \operatorname{sen}^2 x) = 400\pi \cos x(1 - 3\operatorname{sen}^2 x),$$

$$S'(x) > 0 \quad \text{per } 0 < x < \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$S'(x) = 0 \quad \text{per } x = \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$S'(x) < 0 \quad \text{per } \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Pertanto la funzione $S(x)$ è dotata di massimo assoluto nel punto $x = \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Il cono di superficie laterale massima ha apotema, raggio di base e altezza rispettivamente:

$$\overline{PR} = 20 \cos\left(\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 20\sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{20}{3}\sqrt{6} \text{ cm},$$

$$\overline{PH} = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{20}{3}\sqrt{6} = \frac{40}{3}\sqrt{2} \text{ cm},$$

$$\overline{RH} = \sqrt{\overline{PR}^2 - \overline{PH}^2} = \sqrt{\frac{2400}{9} - \frac{800}{9}} = \frac{40}{3} \text{ cm}.$$

7 Consideriamo gli eventi:

E_0 = “nessuna risposta esatta”,
E_1 = “una sola risposta è esatta”,
E = “almeno due risposte sono esatte”.

Determiniamo le seguenti probabilità:

$$p(E_0) = \frac{3^{10}}{4^{10}}, \qquad p(E_1) = 10\frac{3^9}{4^{10}} = \frac{5}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^9.$$

L’evento E risulta l’evento contrario della somma logica degli eventi incompatibili $E_0 \cup E_1$, pertanto la probabilità vale:

$$p(E) = 1 - p(E_0 \cup E_1) = 1 - (p(E_0) + p(E_1)) = 1 - \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{10} + \frac{5}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^9\right] \simeq 0{,}76.$$

8 Vedi lo svolgimento del quesito 8 della prova del corso di ordinamento 2011.

9 Vedi lo svolgimento del quesito 9 della prova del corso di ordinamento 2011.

10 Vedi lo svolgimento del quesito 10 della prova del corso di ordinamento 2011.