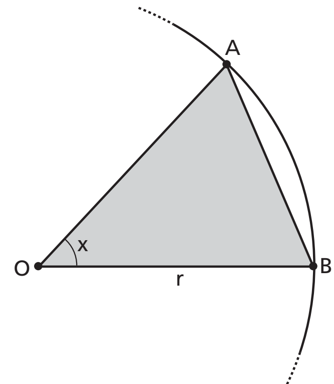
# ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
# CORSO DI ORDINAMENTO • 2009

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

## PROBLEMA 1

È assegnato il settore circolare $A\widehat{O}B$ di raggio $r$ e ampiezza $x$ ($r$ e $x$ sono misurati, rispettivamente, in *metri* e *radianti*).

1. Si provi che l'area $S$ compresa fra l'arco e la corda $AB$ è espressa, in funzione di $x$, da
$$S(x) = \frac{1}{2} r^2 (x - \operatorname{sen} x) \text{ con } x \in [0; 2\pi].$$
2. Si studi come varia $S(x)$ e se ne disegni il grafico (avendo posto $r = 1$).
3. Si fissi l'area del settore $A\widehat{O}B$ pari a 100 $m^2$. Si trovi il valore di $r$ per il quale è minimo il perimetro di $A\widehat{O}B$ e si esprima il corrispondente valore di $x$ in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).
4. Sia $r = 2$ e $x = \frac{\pi}{3}$. Il settore $A\widehat{O}B$ è la base di un solido $W$ le cui sezioni ottenute con piani ortogonali a $OB$ sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di $W$.




▶ **Figura 1.**

## PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si tracci il grafico $G_f$ della funzione $f(x) = \ln x$ (logaritmo naturale).

1. Sia $A$ il punto d'intersezione con l'asse $y$ della tangente a $G_f$ in un suo punto $P$. Sia $B$ il punto d'intersezione con l'asse $y$ della parallela per $P$ all'asse $x$. Si dimostri che, qualsiasi sia $P$, il segmento $AB$ ha lunghezza costante. Vale la stessa proprietà per il grafico $G_g$ della funzione $g(x) = \log_a x$ con $a$ reale positivo diverso da 1?
2. Sia $\delta$ l'inclinazione sull'asse $x$ della retta tangente a $G_g$ nel suo punto di ascissa 1. Per quale valore della base è $\delta = 45°$? E per quale valore di $a$ è $\delta = 135°$?
3. Sia $D$ la regione del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, da $G_f$ e dalla retta d'equazione $y = 1$. Si calcoli l'area di $D$.
4. Si calcoli il volume del solido generato da $D$ nella rotazione completa attorno alla retta d'equazione $x = -1$.

## QUESTIONARIO

**1** Si trovi la funzione $f(x)$ la cui derivata è $\operatorname{sen} x$ e il cui grafico passa per il punto $(0; 2)$.

**2** Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Tra le possibili applicazioni (o funzioni) di $A$ in $B$, ce ne sono di suriettive? Di iniettive? Di biiettive?

**3** Per quale o quali valori di $k$ la curva d'equazione $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ ha una sola tangente orizzontale?

**4** «Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni». Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.

**5** Si considerino le seguenti espressioni:

$$\frac{0}{1}, \frac{0}{0}, \frac{1}{0}, 0^0.$$

A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

**6** Si calcoli: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

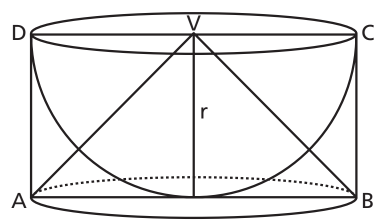
**7** Si dimostri l'identità $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$ con $n$ e $k$ naturali e $n > k$.

**8** Si provi che l'equazione:

$$x^{2009} + 2009x + 1 = 0.$$

ha una radice compresa fra $-1$ e $0$.

**9** Nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che si chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio $r$ e il cilindro a essa circoscritto. La scodella si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro. Si dimostri, utilizzando il principio di Cavalieri, che la scodella ha volume pari al cono di vertice $V$ in figura 2.




▶ **Figura 2.**

**10** Si determini il periodo della funzione $f(x) = \cos 5x$.

---

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

## PROBLEMA 1

**1.** Indichiamo con:

$S(\overset{\frown}{AOB})$ l'area del settore circolare $\overset{\frown}{AOB}$ di raggio $r$ e ampiezza $x$,

$S(AOB)$ l'area del triangolo isoscele $AOB$,

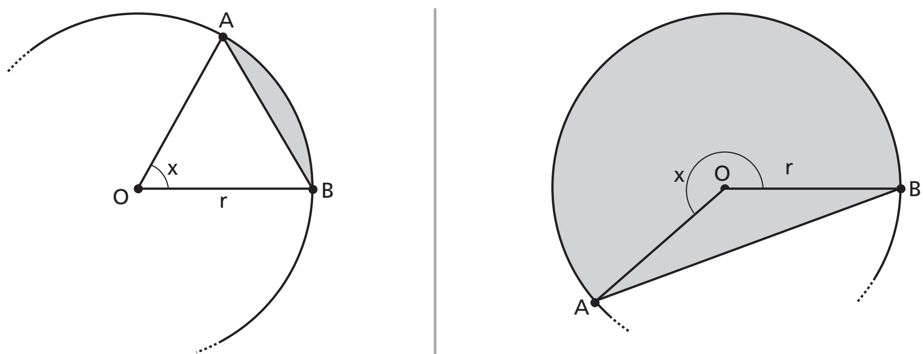
$S(x)$ la superficie compresa fra l'arco e la corda $AB$.

Differenziamo i casi in cui l'angolo $x$ del settore circolare è convesso o concavo (figura 3):

a) se $x$ è convesso $(0 \leq x < \pi)$ risulta $S(x) = S(\overset{\frown}{AOB}) - S(AOB)$;

b) se $x$ è concavo $(\pi \leq x \leq 2\pi)$ risulta $S(x) = S(\overset{\frown}{AOB}) + S(AOB)$.

▼ **Figura 3.**




**a.** Angolo x convesso. **b.** Angolo x concavo.

L'area del settore circolare di raggio $r$ e ampiezza $x$ è $S(\overset{\frown}{AOB}) = \dfrac{r^2 x}{2}$, mentre l'area del triangolo $AOB$, conoscendo due lati e l'angolo compreso, è per la trigonometria:

$$S(AOB) = \begin{cases} \dfrac{r^2 \operatorname{sen} x}{2} & \text{se } 0 \leq x < \pi \\[2ex] \dfrac{r^2 \operatorname{sen}(2\pi - x)}{2} = -\dfrac{r^2 \operatorname{sen} x}{2} & \text{se } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

Quindi la superficie $S(x)$ diventa:

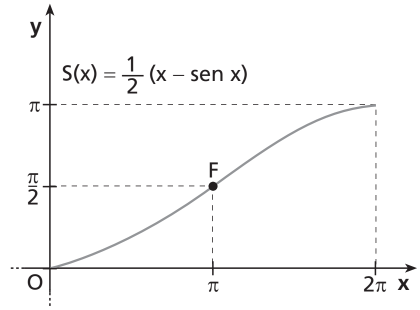
$$S(x) = \begin{cases} S(\overset{\frown}{AOB}) - S(AOB) & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ S(\overset{\frown}{AOB}) + S(AOB) & \text{se } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases} \quad \to \quad S(x) = \begin{cases} \dfrac{r^2 x}{2} - \dfrac{r^2 \operatorname{sen} x}{2} & \text{se } 0 \leq x < \pi \\[2ex] \dfrac{r^2 x}{2} - \dfrac{r^2 \operatorname{sen} x}{2} & \text{se } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases} \quad \to$$

$$S(x) = \frac{r^2 x - r^2 \operatorname{sen} x}{2} = \frac{1}{2} r^2 (x - \operatorname{sen} x) \text{ con } x \in [0;\, 2\pi].$$

**2.** Ponendo $r = 1$, diventa $S(x) = \dfrac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x)$. Tale funzione è continua nell'intervallo di definizione $[0; 2\pi]$; agli estremi del dominio risulta $S(0) = 0$, $S(2\pi) = \pi$; la sua derivata prima ha espressione: $S'(x) = \dfrac{1}{2}(1 - \cos x)$. Pertanto risulta $S'(x) > 0$ per $0 < x < 2\pi$ e $S'(0) = S'(2\pi) = 0$: la funzione è non decrescente e ha tangente orizzontale negli estremi dell'intervallo.

La derivata seconda vale $S''(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$: è positiva per $0 < x < \pi$, negativa per $\pi < x < 2\pi$, nulla per $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$; la curva ha pertanto un flesso $F\left(\pi; \frac{\pi}{2}\right)$. Nella figura 4 è rappresentato il grafico della funzione $S(x)$.

▶ **Figura 4.**

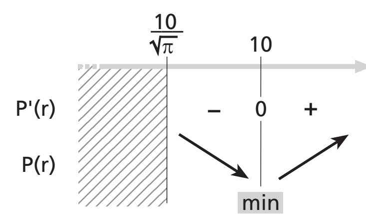



**3.** Posta l'area del settore circolare $S(A\widehat{O}B) = \frac{r^2 x}{2}$ uguale a 100 m², diventa $\frac{r^2 x}{2} = 100$, quindi $r = \sqrt{\frac{200}{x}}$ con $x \in \, ]0; 2\pi]$; risulta allora che, al variare di $x$ nell'intervallo, la variabile $r$ è inferiormente limitata ovvero $r \geq \frac{10}{\sqrt{\pi}}$.

Calcoliamo il perimetro $P$ del settore $A\widehat{O}B$ in funzione del raggio $r$, considerando che si può scrivere l'angolo $x$ in funzione del raggio $r$ ovvero $x = \frac{200}{r^2}$:

$$P = r + r + rx \quad \rightarrow \quad P(r) = 2r + r\frac{200}{r^2} = 2r + \frac{200}{r}.$$

▼ **Figura 5.**




Determiniamo la derivata prima di tale funzione e studiamone il segno:

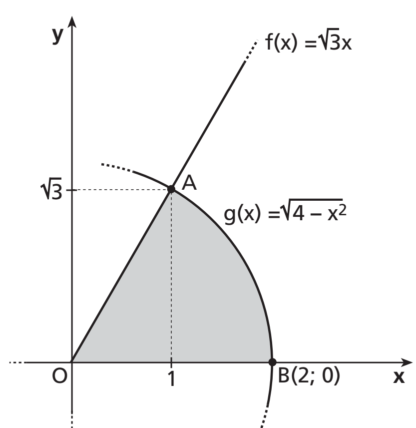
$$P'(r) = 2 - \frac{200}{r^2}; \; P'(r) > 0 \quad \rightarrow \quad r^2 > 100 \quad \rightarrow \quad r > 10.$$

In figura 5 è riportato il quadro dei segni.

La funzione ha un minimo per $r = 10$ m; in tal caso l'angolo corrispondente misura:

$$x = \frac{200}{10^2} = 2 \text{ rad} \simeq 57{,}3° \simeq 115°.$$

▼ **Figura 6.**




**4.** Posto $r = 2$ e $x = \frac{\pi}{3}$, fissiamo un sistema di riferimento ortogonale $Oxy$ contenente il settore in modo che $O$ coincida con l'origine; risulta allora che $B$ ha coordinate (2;0) e $A$ $(1;\sqrt{3})$ (figura 6).

La retta $OA$ ha equazione $f(x) = \sqrt{3}\,x$ mentre l'arco $AB$ è il grafico della funzione $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, per $x \in [1; 2]$.

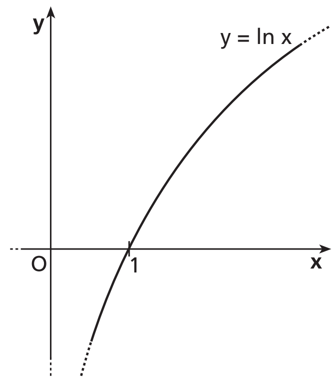
Poiché il solido $W$ ha come base il settore circolare e ha sezioni ortogonali a $OB$ quadrate, si ottiene il suo volume $V$ secondo la seguente formula:

$$V(W) = \int_0^1 [f(x)]^2 \, dx + \int_1^2 [g(x)]^2 \, dx =$$

$$= \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^2 (4 - x^2) dx = [x^3]_0^1 + \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = 1 + \left(8 - \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}.$$

## PROBLEMA 2

La funzione $f(x) = \ln x$ ha dominio $D = ]0; +\infty[$, interseca l'asse $x$ nel punto di coordinate (1; 0) ed è sempre crescente. Il corrispondente grafico $G_f$ di $f$ è riportato in figura 7.




▲ **Figura 7.**

**1.** Consideriamo un punto generico di $G_f$, $P(k; \ln k)$, con $k > 0$; tracciamo per esso la tangente $t$ alla curva che interseca l'asse $y$ nel punto $A$ e la retta parallela all'asse $x$ che interseca l'asse delle ordinate nel punto $B$; tale punto ha coordinate $B(0; \ln k)$ (figura 8).

Per determinare le coordinate di $A$, scriviamo l'equazione della retta $t$, che ha coefficiente angolare $f(x_P) = \dfrac{1}{k}$.

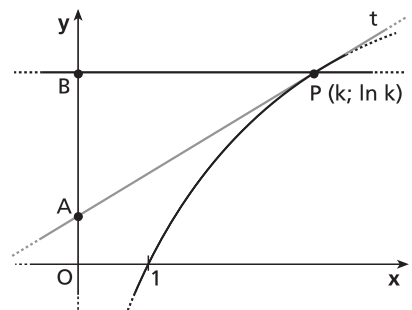
Quindi, l'equazione della retta $t$ è:

$$y - y_P = f'(x_P)(x - x_P) \to y - \ln k = \frac{1}{k}(x - k) \to$$

$$y = \frac{1}{k}x + \ln k - 1.$$

Tale retta interseca l'asse $y$ in $A(0; \ln k - 1)$, e la lunghezza del segmento $AB$ è:

$$\overline{AB} = |y_B - y_A| = |\ln k - \ln k + 1| = 1,$$




▶ **Figura 8.**

che, perciò, è costante.
Nel caso in cui la funzione considerata sia $g(x) = \log_a x$, si può procedere in modo analogo, trovando:

$g'(x_P) = \dfrac{1}{k}\log_a k$, coefficiente angolare della retta tangente nel punto $P$,

$y = \dfrac{1}{k}\log_a e \cdot x + \log_a e$, equazione della retta tangente $t$,

$A(0; \log_a k - \log_a e)$, $B(0; \log_a k)$.

La distanza tra $A$ e $B$ è ora:

$$\overline{AB} = |\log_a k - \log_a k + \log_a e| = |\log_a e|.$$

Possiamo concludere che, fissato il valore della base $a$ del logaritmo, la lunghezza di $AB$ rimane costante indipendentemente dalla scelta del punto $P$.
Osserviamo infine che, per $a = e$, ritroviamo il caso particolare $\overline{AB} = 1$.

**2.** Poiché per inclinazione si intende l'angolo che una retta forma col semiasse positivo delle $x$, si ha che il coefficiente angolare della retta tangente a $G_g$ nel suo punto di ascissa 1è tg $\delta$. Tale coefficiente corrisponde al valore della derivata prima della funzione calcolata nel punto $x = 1$:

$$g'(1) = \log_a e \quad \to \quad \text{tg}\,\delta = \log_a e.$$

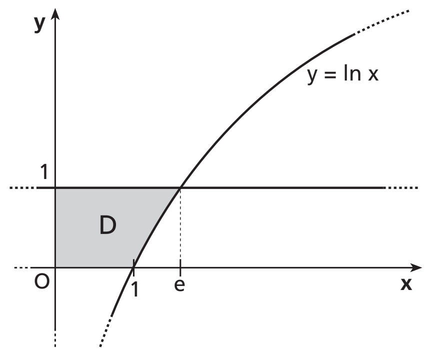
- Se $\delta = 45°$, allora tg $\delta = 1$. Quindi $1 = \log_a e$, cioè $a = e$ e il logaritmo risulta naturale;
- se $\delta = 135°$, allora tg $\delta = 1$. Quindi: $-1 = \log_a e$, cioè $a = \dfrac{1}{e}$.

**3.** La regione $D$ di cui calcolare l'area $A(D)$ è evidenziata nella figura 9.
Determiniamo tale superficie come differenza tra l'area del rettangolo di base $e$ e altezza 1 e l'area sottesa dalla funzione $f(x) = \ln x$ per $1 \leq x \leq e$:

$$A(D) = e \cdot 1 - \int_1^e \ln x \, dx$$

Integrando per parti si ottiene:

$$= e - [x \ln x - x]_1^e = e - (e - e + 1) = e - 1.$$

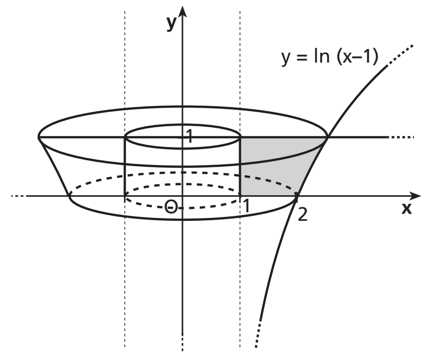


▶ **Figura 9.**

**4.** Operiamo sulla funzione $f$ la traslazione di vettore $\vec{v}$ (1;0) in modo che l'asse di rotazione coincida con l'asse $y$. La curva traslata ha equazione $y = \ln(x - 1)$ (figura 10).
Per calcolare il volume di rotazione della funzione $y = \ln(x-1)$ intorno all'asse $y$, è necessario determinare l'equazione della funzione inversa:

$$y = \ln(x - 1) \quad \rightarrow \quad e^y = x - 1 \quad \rightarrow \quad x = e^y + 1.$$

Il volume richiesto si ottiene sottraendo al volume del solido di rotazione il volume del cilindro interno di raggio di base 1 e altezza 1:



▲ **Figura 10.**

$$V = \pi \int_0^1 (e^y + 1)^2 \, dy - \pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi \int_0^1 (e^{2y} + 1 + 2e^y) dy - \pi = \pi \left[ \frac{e^{2y}}{2} + y + 2e^y \right]_0^1 - \pi =$$

$$= \pi \left( \frac{e^2}{2} + 1 + 2e - \frac{1}{2} - 2 - 1 \right) = \pi \left( \frac{e^2}{2} + 2e - \frac{5}{2} \right) = \frac{\pi}{2} (e^2 + 4e - 5).$$

## QUESTIONARIO

**1** Una funzione $f(x)$ si definisce primitiva di una funzione $g(x)$ quando è derivabile e risulta $f'(x) = g(x)$. L'insieme delle primitive di $g(x) = \operatorname{sen} x$ è:

$$f_k(x) = -\cos x + k, \text{ con } k \in \mathbb{R}.$$

Determiniamo il valore di $k$, imponendo al corrispondente grafico il passaggio per il punto (0;2):

$$f_k(0) = -1 + k = 2 \quad \rightarrow \quad k = 3.$$

Pertanto la funzione $f(x)$ la cui derivata è $\operatorname{sen} x$ e il cui grafico passa per il punto (0;2) è $f_3(x)$ ovvero:

$$f(x) = -\cos x + 3.$$

**2** Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice suriettiva quando ogni elemento del codominio $B$ è immagine di almeno un elemento di $A$. Poiché $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$, allora sono suriettive tutte le funzioni in cui due e solo due elementi di $A$ hanno uguale immagine in $B$.

Le possibili coppie di $A$ sono $\binom{4}{2} = 6$. Ogni coppia può essere associata ai 3 elementi di $B$ con un totale di $6 \cdot 3 = 18$ associazioni. Per ogni associazione i due elementi di $A$ non utilizzati (che hanno quindi immagine distinta in $B$) possono essere accoppiati in due modi diversi con i due elementi di $B$ rimasti. Quindi il numero totale di funzioni suriettive da $A$ a $B$ è $18 \cdot 2 = 36$.
Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice iniettiva quando ogni elemento di $B$ è immagine al più di un elemento di $A$. Poiché il numero degli elementi di $A$ è maggiore di quello di $B$, non esistono funzioni iniettive.
Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice biiettiva quando è sia iniettiva, che suriettiva. Poiché non esistono funzioni iniettive, allora non esistono nemmeno funzioni biiettive.

**3** Data la curva di equazione $y(x) = x^3 + kx^2 + 3x - 4$, la funzione derivata prima $y'(x) = 3x^2 + 2kx + 3$ è di secondo grado. Posta la derivata prima uguale a zero, si ottiene un'equazione di secondo grado. Affinché la curva ammetta una sola tangente orizzontale è necessario che il corrispondente discriminante sia nullo:

$$3x^2 + 2kx + 3 = 0, \frac{\Delta}{4} = 0 \quad \rightarrow \quad k^2 - 9 = 0 \quad \rightarrow \quad k = \pm 3.$$

Le curve richieste sono quindi due:

$$y = x^3 + 3x^2 + 3x - 4,$$

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x - 4.$$

**4** Un poliedro si dice regolare se le sue facce sono poligoni regolari congruenti e i suoi diedri sono congruenti. Pertanto gli angoli delle facce di ogni suo diedro devono essere angoli di poligoni regolari e devono essere almeno tre. Per un noto teorema di geometria solida, in ogni diedro la somma degli angoli delle facce deve essere strettamente minore di 360°. Se le facce del poliedro regolare fossero esagoni, l'angolo di ogni faccia di un diedro sarebbe di 120° e quindi la somma degli angoli di tre facce sarebbe uguale a 360°, il che è impossibile. L'affermazione quindi è falsa.

**5** Una frazione è una coppia ordinata di numeri interi, di cui il secondo è diverso da 0:

$$\frac{n}{d},\ \text{con } n,\ d \in \mathbb{Z},\ d \neq 0.$$

L'espressione $\frac{0}{1}$ equivale al valore numerico 0. Il reciproco di $\frac{0}{1}$, cioè $\frac{1}{0}$, è privo di significato e non corrisponde a nessun valore numerico. Ugualmente le espressioni $\frac{0}{0}$ e $0^0$ non corrispondono a nessun valore numerico e sono forme indeterminate.

**6** Consideriamo il limite $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

Raccogliamo $x^2$ al radicando del numeratore e portiamolo fuori dalla radice:

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}.$$

Poiché il limite va calcolato in un intorno di $-\infty$, risulta $x<0$, possiamo togliere al numeratore il valore assoluto alla $x$ cambiandone il segno:

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = -1.$$

**7** Data l'identità $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$ con $n$ e $k$ naturali e $n>k$, si esplicitano i coefficienti binomiali tramite la funzione fattoriale per entrambi i membri.

Primo membro:

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(n-k)}{(k+1)\cdot k!}$$

Secondo membro:

$$\binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot\frac{n-k}{k+1} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{n-k}{k+1} =$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(n-k)}{(k+1)\cdot k!}.$$

Poiché il primo membro è uguale al secondo membro, l'identità è verificata.

**8** Consideriamo la funzione $f(x) = x^{2009} + 2009x + 1$. Cercare le soluzioni reali dell'equazione di partenza equivale a determinare le intersezioni della funzione $f(x)$ con l'asse delle $x$. La funzione è continua in $\mathbb{R}$ ed esistono almeno due valori di $x$ in cui la funzione cambia di segno:

$$x_1 = -1,\quad f(-1) = (-1)^{2009} - 2009 + 1 = -1 - 2009 + 1 = -2009;$$

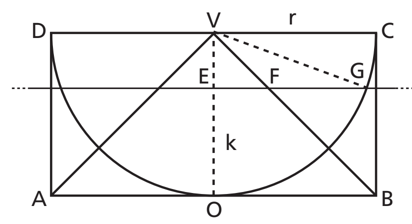
$$x_2 = 0,\qquad f(0) = 1.$$

Per il teorema di esistenza degli zeri, esiste almeno un punto $c$, interno all'intervallo $[-1; 0]$, in cui la funzione si annulla.
Calcoliamo la derivata prima di $f(x)$:

$$f'(x) = 2009x^{2008} + 2009.$$

Poiché la derivata è sempre positiva nell'intervallo, la funzione $f(x)$ è strettamente crescente; pertanto esiste una sola radice dell'equazione di partenza, compresa tra $-1$ e 0.

**9** Consideriamo il principio di Cavalieri: «due solidi hanno lo stesso volume (sono equivalenti) se si può fissare un piano in modo che ogni altro piano parallelo a esso tagli i due solidi in sezioni equivalenti». Consideriamo un piano parallelo alla base del cilindro distante $k$ da esso, con $0 \leq k \leq r$ (figura 11).



▶ **Figura 11.**

La sezione formata con il cono è un cerchio di raggio $EF$. Essendo $VEF$ un triangolo rettangolo isoscele, risulta $\overline{EF} = \overline{VE} = r - k$. Dunque il cerchio ha area:

$$A_1 = \pi(r - k)^2.$$

La sezione del piano con la scodella è una corona circolare di raggio esterno $r$ e raggio interno $EG$. Per il teorema di Pitagora risulta:

$$\overline{EG}^2 = \overline{VG}^2 - \overline{VE}^2 = r^2 - (k - r)^2 = 2kr - k^2.$$

L'area della sezione con la scodella è:

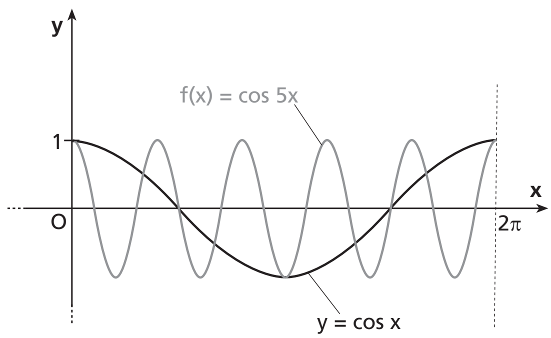
$$A_2 = \pi[r^2 - (2kr - k^2)] = \pi(r - k)^2.$$

Per il principio di Cavalieri, poiché $A_1 = A_2$, possiamo concludere che la scodella e il cono sono equivalenti.

**10** Osserviamo che la funzione $f(x) = \cos 5x$ si ottiene dalla funzione goniometrica elementare $y = \cos x$ tramite una contrazione rispetto all'asse $x$ di fattore $k = 5$. Ne segue che, essendo $2\pi$ il periodo di $y = \cos x$, il periodo di $f$ è $\frac{2\pi}{k}$ ovvero $\frac{2\pi}{5}$.

A tale conclusione si può giungere anche osservando i grafici delle due funzioni tra 0 e $2\pi$ (figura 12).

In tale grafico si può notare che in un periodo di $y = \cos x$ il grafico di $f(x) = \cos 5x$ si ripete uguale per 5 volte.



▲ **Figura 12.**