ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2009

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Sia f la funzione definita da:

$$f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$$

dove n è un intero positivo e $x \in \mathbb{R}$.

1. Si verifichi che la derivata di $f(x)$ è: $f'(x)=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}$.

2. Si dica se la funzione f ammette massimi e minimi (assoluti e relativi) e si provi che, quando n è dispari, $f(x) \leq 1$ per ogni x reale.

3. Si studi la funzione g ottenuta da f quando $n=2$ e se ne disegni il grafico.

4. Si calcoli $\int_0^2 g(x)dx$ e se ne dia l'interpretazione geometrica.

PROBLEMA 2

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si consideri la funzione f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita $f(x)=x^3+kx$, con k parametro reale.

1. Si dica come varia il grafico di f al variare di k (k positivo, negativo, o nullo).

2. Sia $g(x)=x^3$ e γ il suo grafico. Si dimostri che γ e la retta di equazione $y=1-x$ hanno un solo punto P in comune. Si determini l'ascissa di P approssimandola a meno di 0,1 con un metodo iterativo di calcolo.

3. Sia D la regione finita del primo quadrante delimitata da γ e dal grafico della funzione inversa di g. Si calcoli l'area di D.

4. La regione D è la base di un solido W le cui sezioni con piani perpendicolari alla bisettrice del primo quadrante sono tutte rettangoli di altezza 12. Si determini la sezione di area massima. Si calcoli il volume di W.

QUESTIONARIO

1 Siano: $0<a<b$ e $x \in [-b;\ b]$. Si provi che $\int_{-b}^{b}|x-a|\,dx=a^2+b^2$.

2 Sono dati gli insiemi $A=\{1, 2, 3, 4\}$ e $B=\{a, b, c\}$. Tra le possibili applicazioni (o funzioni) di A in B, ce ne sono di suriettive? Di iniettive? Di biiettive?

3 Una moneta da 2 euro (il suo diametro è 25,75 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di lato 10 cm. Qual è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella? (cioè non tagli i lati dei quadrati)

4 «Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni». Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.

5 Si considerino le seguenti espressioni:

$$\frac{0}{1}, \frac{0}{0}, \frac{1}{0}, 0^0.$$

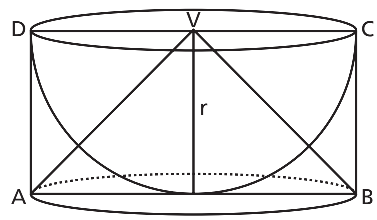
A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

6 Con l'aiuto di una calcolatrice, si applichi il procedimento iterativo di Newton all'equazione $\operatorname{sen} x = 0$, con punto iniziale $x_0 = 3$. Cosa si ottiene dopo due iterazioni?

7 Si dimostri l'identità $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$ con n e k naturali e $n > k$.

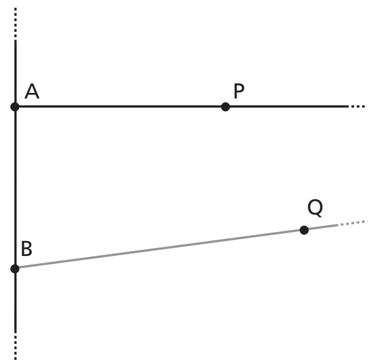
8 Alla festa di compleanno di Anna l'età media dei partecipanti è di 22 anni. Se l'età media degli uomini è 26 anni e quella delle donne è 19, qual è il rapporto tra il numero degli uomini e quello delle donne?

9 Nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che si chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio r e il cilindro a essa circoscritto. La scodella si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro. Si dimostri, utilizzando il principio di Cavalieri, che la scodella ha volume pari al cono di vertice V in figura 1.



▶ **Figura 1.**

10 «Se due punti P e Q del piano giacciono dalla stessa parte rispetto a una retta AB e gli angoli $P\hat{A}B$ e $Q\hat{B}A$ hanno somma minore di 180°, allora le semirette AP e BQ, prolungate adeguatamente al di là dei punti P e Q, si devono intersecare.» Questa proposizione è stata per secoli oggetto di studio da parte di schiere di matematici. Si dica perché e con quali risultati.



▶ **Figura 2.**

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

1. La funzione $f(x)$ ha dominio $\mathbb{R}$ ed è continua e derivabile in tale campo, poiché è prodotto di una funzione polinomiale per una funzione esponenziale.
Calcoliamo la derivata di $f(x)$ utilizzando la regola del prodotto:

$$f'(x) = \left(1 + \frac{2x}{2!} + \ldots + \frac{nx^{n-1}}{n!}\right)e^{-x} + \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)(-e^{-x}) =$$

$$= \left(1 + x + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{-x} - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x} =$$

$$= \left(1 + x + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x} =$$

osservando che nella parentesi dell'ultima espressione sono presenti n coppie formate da monomi opposti, risulta:

$$= -\frac{x^n}{n!}e^{-x}.$$

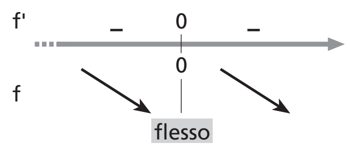
2. Studiamo il segno della derivata prima $f'(x)$:

$$f'(x) = -\frac{x^n}{n!}e^{-x} \geq 0 \ \rightarrow \ x^n \leq 0,$$

poiché $-e^{-x} < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Distinguiamo lo studio del segno per n pari ed n dispari.

- Se n è pari:

$$f'(x) \geq 0 \ \rightarrow \ x^n \leq 0 \ \rightarrow \ x = 0.$$

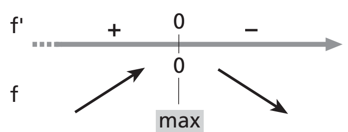


▲ **Figura 3.**

Il quadro del segno è riportato in figura 3.
In $x = 0$ la funzione presenta un flesso a tangente orizzontale. Perciò, se n è pari, la funzione non ammette né minimi né massimi.

- Se n è dispari:

$$f'(x) \geq 0 \ \rightarrow \ x^n \leq 0 \ \rightarrow \ x \leq 0.$$



▲ **Figura 4.**

Il quadro del segno della derivata prima è rappresentato in figura 4.
In $x = 0$ la funzione ammette un unico massimo assoluto. Poiché $f(0) = 1$, il punto di massimo assoluto ha coordinate $(0;1)$.
In particolare, se n è dispari, $f(x) \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

3. Studiamo la funzione $g(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)e^{-x}$. Essa ha come dominio $\mathbb{R}$, non interseca l'asse x poiché il polinomio $1 + x + x^2$ ha discriminante negativo, interseca l'asse y nel punto di coordinate $(0;1)$, è sempre positiva nel suo dominio e non è né pari né dispari.
Calcoliamo ora i limiti per agli estremi del campo di esistenza:

$$\lim_{x \to +\infty}\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)e^{-x} = \lim_{x \to +\infty}\frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)}{e^x}.$$

Tale limite presenta una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Applicando due volte il Teorema di De L'Hospital si ottiene:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

Quindi la funzione ha asintoto orizzontale $y=0$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}=+\infty,$$

non vi è però asintoto obliquo poiché risulta infinito il limite $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$.

Scriviamo la funzione derivata prima $g'(x)$ utilizzando l'espressione di $f'(x)$ calcolata nel punto 1 del problema, assumendo $n=2$; si ottiene:

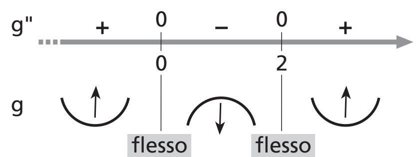
$$g'(x)=-\frac{x^2}{2}e^{-x}.$$

Come già evidenziato, poiché $n=2$ è pari, la funzione g è sempre decrescente ed è priva di minimi e massimi.

Studiamo la derivata seconda e il relativo quadro del segni (figura 5):

$$g''(x)=-xe^{-x}+\frac{x^2}{2}e^{-x}=\frac{x^2-2x}{2}e^{-x};$$

$$g''(x)>0 \;\rightarrow\; x<0 \vee x>2.$$

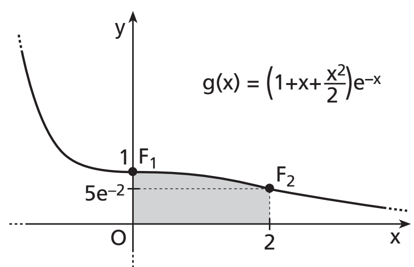


▲ **Figura 5.**

La funzione presenta due flessi nei punti di coordinate $F_1(0;\ 1)$ e $F_2(2;\ 5e^{-2})$.

Osserviamo che in F_1 il flesso è a tangente orizzontale poiché in $x=0$ si annulla anche la derivata prima.

In figura 6 è riportato il grafico della funzione $g(x)$.



▲ **Figura 6.**

4. Considerato l'integrale $\int_0^2\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}dx$, integriamo due volte per parti:

$$\int_0^2\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^2+\int_0^2(1+x)e^{-x}dx=-5e^{-2}+1+[-e^{-x}(1+x)]_0^2+\int_0^2 e^{-x}dx=$$

$$=-5e^{-2}+1-3e^{-2}+1-[-e^{-x}]_0^2=-8e^{-2}+2-(e^{-2}-1)=3-9e^{-2}.$$

Tale integrale rappresenta l'area della regione di piano compresa tra il grafico di $g(x)$ e l'asse x nell'intervallo [0; 2] (figura 6).

PROBLEMA 2

1. Studiamo la funzione $f(x)=x^3+kx$ al variare di k parametro reale.

- Dominio: $\mathbb{R}$, per ogni k reale.
- Simmetrie: $f(x)=-f(x)$, ossia la funzione è dispari, per ogni k reale e il grafico è simmetrico rispetto all'origine di riferimento.
- Intersezione con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases}x=0\\ y=x^3+kx\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=0\\ y=x^3+kx\end{cases}\rightarrow\begin{cases}y=0\\ 0=x^3+kx\end{cases}\rightarrow\begin{cases}y=0\\ x(x^2+k)=0\end{cases}$$

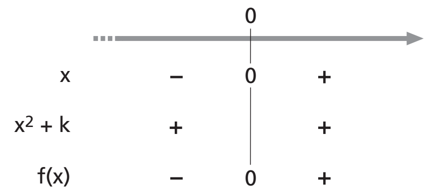
$$\rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\vee\begin{cases}y=0\\ x^2+k=0\end{cases}$$

Osservando i sistemi risolutivi si deduce che se $k \geq 0$ non ci sono altre intersezioni con l'asse x oltre all'origine.
Se $k < 0$ vi sono altre due intersezioni con l'asse delle ascisse oltre all'origine: $(-\sqrt{-k}; 0)$ e $(\sqrt{-k}; 0)$.

- Segno della funzione:

$$f(x) > 0 \rightarrow x(x^2 + k) > 0.$$

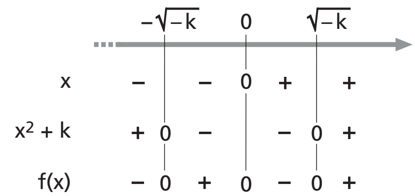
Se $k \geq 0$, il segno di f è rappresentato nella figura 7.
Pertanto $f(x) > 0$ per $x > 0$.
Se $k < 0$, ci sono due ulteriori radici della funzione e il segno di f varia come illustrato dal diagramma di figura 8.



▲ **Figura 7.**

- Calcolo e segno delle derivate prima e seconda:

$$f'(x) = 3x^2 + k;$$
$$f''(x) = 6x.$$



▲ **Figura 8.**

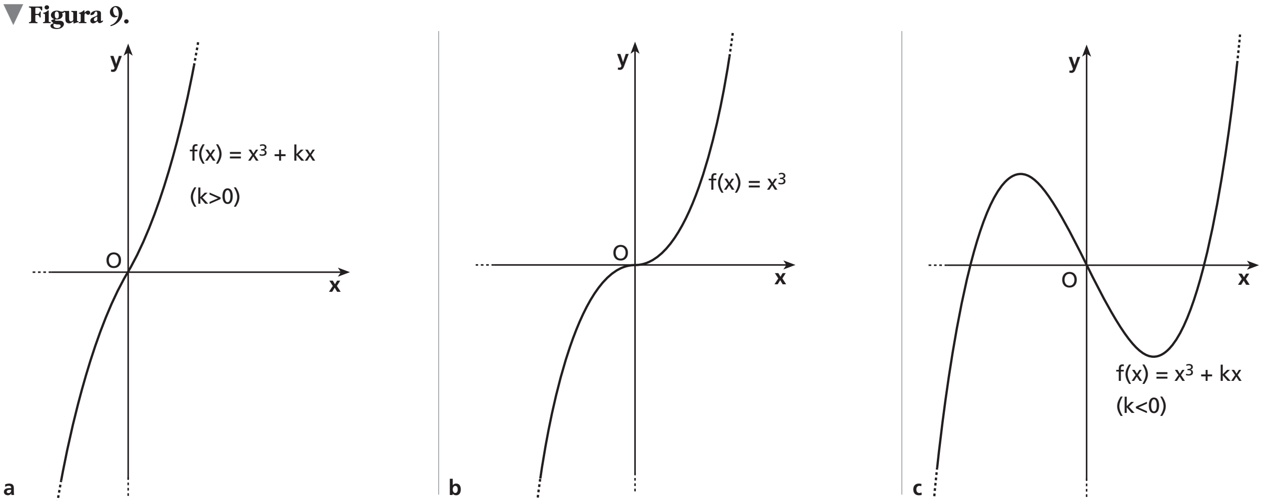
Osserviamo che $f''(x)$ è indipendente da k.
Al variare del segno del parametro k, si possono individuare 3 casi:

a) Se $k > 0$:
$f'(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ e la funzione è strettamente crescente;
$f''(x) > 0$ per $x > 0$, $f''(x) = 0$ per $x = 0$ (il punto (0;0) è un flesso a tangente non orizzontale).
Nella figura 9a è rappresentato un grafico di $f(x)$ quando $k > 0$.

b) Se $k = 0$:
$f'(x) > 0\ \forall x \neq 0$ e la funzione è strettamente crescente;
$f'(x) = 0$ per $x = 0$;
$f''(x) > 0$ per $x > 0$, $f''(x) = 0$ per $x = 0$ (il punto (0; 0) è un flesso a tangente orizzontale). Nella figura 9b è illustrato il grafico di $f(x)$ quando $k = 0$ ovvero $y = x^3$.

c) Se $k < 0$:
$$f'(x) > 0 \rightarrow 3x^2 + k > 0 \rightarrow x < -\sqrt{-\frac{k}{3}} \vee x > \sqrt{-\frac{k}{3}}.$$
Il punto $\left(-\sqrt{-\frac{k}{3}}; -\frac{2k}{3}\sqrt{-\frac{k}{3}}\right)$ è un punto di massimo relativo, mentre $\left(\sqrt{-\frac{k}{3}}; \frac{2k}{3}\sqrt{-\frac{k}{3}}\right)$ e un punto di minimo relativo; $f''(x) > 0$ per $x > 0$; $f''(x) = 0$ per $x = 0$ (il punto (0;0) è un flesso a tangente non orizzontale). Nella figura 9c è rappresentato il grafico di $f(x)$ quando $k < 0$.

▼ **Figura 9.**

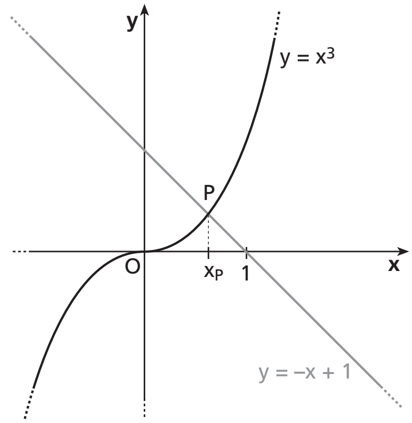


2. Rappresentiamo in figura 10 il grafico γ della funzione $g(x) = x^3$ e la retta di equazione $y = 1 - x$.

I punti di intersezione tra γ e la retta corrispondono alle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

ovvero all'equazione risolvente $x^3 + x - 1 = 0$.



▶ **Figura 10.**

Sia $h(x) = x^3 + x - 1$. La funzione h è polinomiale di grado dispari, ed è strettamente crescente, poiché la sua derivata prima $h'(x) = 3x^2 + 1$ è positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$. Pertanto la funzione si annulla in un unico punto x_P.
Osservando che $h(0) = -1$ e $h(1) = 1$, ne segue che $x_P \in]0, 1[$. Per determinare il valore di x_P a meno di 0,1 utilizziamo il metodo di bisezione, partendo dai valori $a_0 = 0$ e $b_0 = 1$.

a	$h(a)$	b	$h(b)$	$\frac{a+b}{2}$	$h\left(\frac{a+b}{2}\right)$
0	− 1	1	1	0,5	− 0,375
0,5	− 0,375	1	1	0,75	0,1719
0,5	− 0,375	0,75	0,1719	0,63	− 0,1309
0,63	− 0,1309	0,75	0,1719	0,69	0,0125

Si trova quindi che $x_P = 0{,}69$ con un errore minore di 0,1.

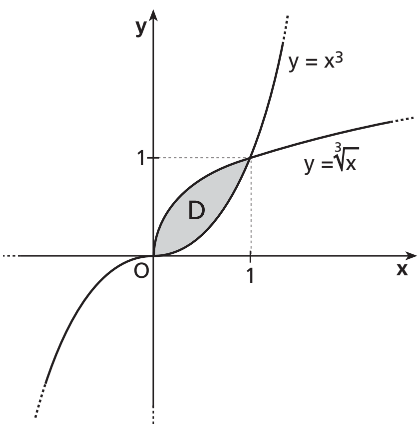
3. La funzione inversa di g ha equazione $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.
Nella figura 11 sono riportati i grafici delle due funzioni.

Le intersezioni dei grafici di g e g^{-1} nel primo quadrante sono date dalle soluzioni del sistema per $x > 0$:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = \sqrt[3]{x} \end{cases} \rightarrow x^3 = \sqrt[3]{x} \rightarrow x^6 = 1 \rightarrow x = 1$$

Osserviamo inoltre che vale la disuguaglianza $x^3 < \sqrt[3]{x}$, per $x \in]0; 1[$.
L'area A della regione D è data da:

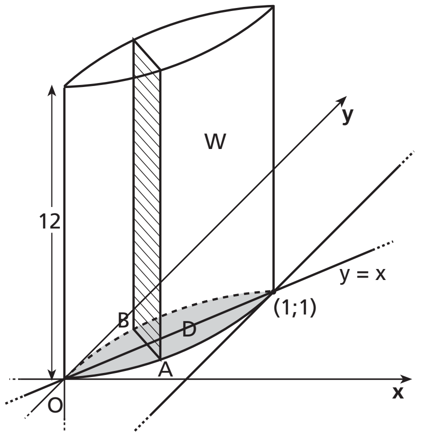
$$A(D) = \int_0^1 (\sqrt[3]{x} - x^3)dx = \left[\frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$



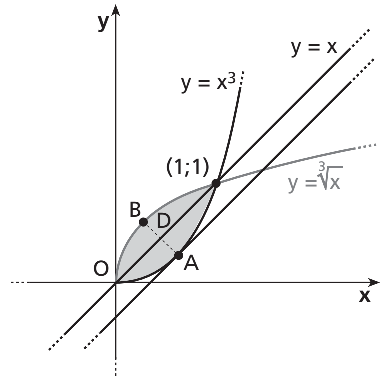
▲ **Figura 11.**

4. Il solido W è un «cilindro» di base D (figura 12).

Tra le sezioni rettangolari considerate, quella di area massima è quella di base massima. Tale base è il segmento AB che ha come estremi i punti delle curve che hanno ascissa compresa tra 0 e 1 e distanza massima dalla bisettrice del primo e terzo quadrante (figura 13).



▲ **Figura 12.**



▲ **Figura 13.**

Il punto A è il punto del grafico di $g(x)$ tale che la tangente in A è parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante, con $0 < x_A < 1$.
Poiché $g'(x) = 3x^2$, risulta:

$$3x_A^2 = 1 \rightarrow x_A = \frac{\sqrt{3}}{3},\ y_A = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Per simmetria risulta $B\left(\frac{\sqrt{3}}{9}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Perciò il segmento AB ha misura $\overline{AB} = \frac{2\sqrt{6}}{9}$ e l'area della sezione massima risulta:

$$\overline{AB} \cdot \textit{altezza} = \frac{2\sqrt{6}}{9} \cdot 12 = \frac{8\sqrt{6}}{3}.$$

Il volume V del solido W si ottiene moltiplicando l'area della regione D per l'altezza di 12:

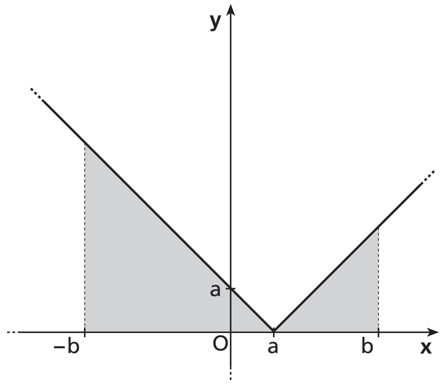
$$V(W) = A(D) \cdot \textit{altezza} = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6.$$

QUESTIONARIO

1 La funzione integranda è definita per casi:

$$y=\begin{cases} x-a & \text{se } x\geq a \\ -x+a & \text{se } x<a \end{cases}$$

e ha il grafico riportato in figura 14.



▶ **Figura 14.**

Applicando la proprietà additiva degli integrali, risulta:

$$\int_{-b}^{b}|x-a|dx=\int_{-b}^{a}(-x+a)dx+\int_{a}^{b}(x-a)dx=$$

$$=\left[-\frac{x^2}{2}+ax\right]_{-b}^{a}+\left[\frac{x^2}{2}-ax\right]_{a}^{b}=$$

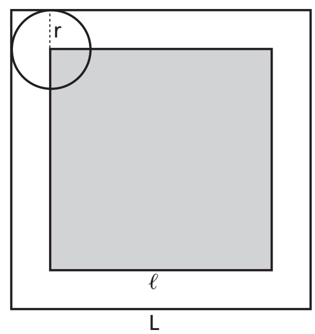
$$=-\frac{a^2}{2}+a^2+\frac{b^2}{2}+ab+\frac{b^2}{2}-ab-\frac{a^2}{2}+a^2=a^2+b^2.$$

Una dimostrazione alternativa si ottiene osservando che l'integrale richiesto è equivalente alla somma delle aree dei due triangoli evidenziati in figura. Entrambi i triangoli sono rettangoli e isosceli, con cateti di lunghezza $(b-a)$ e $(b+a)$, rispettivamente, pertanto vale:

$$\int_{-b}^{b}|x-a|dx=\frac{(b-a)^2}{2}+\frac{(b+a)^2}{2}=a^2+b^2.$$

2 Vedi lo svolgimento del quesito 2 della prova del corso di ordinamento 2009.

3 Affinché la moneta cada all'interno della mattonella di lato L è necessario che il suo centro disti dal bordo almeno una lunghezza pari al raggio r della moneta (figura 15).



▶ **Figura 15.**

Il centro deve cadere all'interno del quadrato di lato ℓ:

$$\ell=L-2r=(10-2{,}575)\text{ cm}=7{,}425\text{ cm}.$$

La superficie s del quadrato interno vale:

$$s=\ell^2=(7{,}425\text{ cm})^2\simeq 55{,}13\text{ cm}^2,$$

mentre la superficie S della mattonella risulta:

$$S=L^2=(10\text{ cm})^2=100\text{ cm}^2.$$

La probabilità P che la moneta lanciata cada internamente alla mattonella risulta:

$$P=\frac{s}{S}=\frac{55{,}13\text{ cm}^2}{100\text{ cm}^2}\simeq 0{,}55=55\%.$$

4 Vedi lo svolgimento del quesito 4 della prova del corso di ordinamento 2009.

5 Vedi lo svolgimento del quesito 5 della prova del corso di ordinamento 2009.

6 Per applicare il procedimento di Newton utilizziamo la formula:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Utilizziamo tale schema iterativo alla funzione $f(x)=\operatorname{sen} x$ e punto iniziale $x_0=3$:

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\ \rightarrow\ x_1=3-\frac{\operatorname{sen} 3}{\cos 3}\simeq 3{,}1425465431,$$

approssimato alla decima cifra decimale.

Analogamente si calcolano:

$$x_2 = x_1 - \frac{\operatorname{sen} x_1}{\cos x_1} \quad \rightarrow \quad x_2 \simeq 3{,}1415926533,$$

$$x_3 = x_2 - \frac{\operatorname{sen} x_2}{\cos x_2} \quad \rightarrow \quad x_2 \simeq 3{,}1415926535.$$

In questo modo si ottiene un'approssimazione di π (soluzione analitica dell'equazione $\operatorname{sen} x = 0$ più prossima al valore iniziale $x_0 = 3$) con 9 cifre decimali esatte.

7 Vedi lo svolgimento del quesito 7 della prova del corso di ordinamento 2009.

8 Indichiamo con:

N_u il numero degli uomini;
N_d il numero delle donne;
S_u la somma delle età degli uomini;
S_d la somma delle età delle donne;
M_u l'età media degli uomini (26 anni);
M_d l'età media delle donne (19 anni);
M l'età media dei partecipanti (22 anni).

Per definizione di media aritmetica, valgono le seguenti uguaglianze:

$$M_u = \frac{S_u}{N_u} \quad \rightarrow \quad M_u \cdot N_u = S_u;$$

$$M_d = \frac{S_d}{N_d} \quad \rightarrow \quad M_d \cdot N_d = S_d;$$

$$M = \frac{S_u + S_d}{N_u + N_d} \quad \rightarrow \quad M \cdot (N_u + N_d) = S_u + S_d.$$

Sommiamo membro a membro le prime due uguaglianze e confrontiamo con la terza:

$$M_u \cdot N_u + M_d \cdot N_d = M \cdot (N_u + N_d).$$

Sostituiamo i valori numerici:

$$26 \cdot N_u + 19 \cdot N_d = 22 \cdot (N_u + N_d) \quad \rightarrow \quad 4 \cdot N_u = 3 \cdot N_d \quad \rightarrow \quad \frac{N_u}{N_d} = \frac{3}{4}.$$

9 Vedi lo svolgimento del quesito 9 della prova del corso di ordinamento 2009.

10 La proposizione riportata dal testo è il V Postulato di Euclide. Euclide, matematico greco vissuto attorno al 300 a.C., scrisse gli *Elementi*, un'opera che costituisce una sintesi organica delle conoscenze di matematica elementare possedute dagli antichi Greci. Tutta la teoria geometrica presentata nei tredici libri degli *Elementi* si sviluppa a partire da cinque postulati, leggi considerate vere sulla base dell'evidenza e dell'intuizione comune. Tuttavia, rispetto ai precedenti, il V Postulato si distingue per la complessità del suo enunciato e per la costruzione geometrica. Di tale difficoltà erano consapevoli già i primi commentatori all'opera euclidea; il dibattito sulla validità del V Postulato si è protratto per oltre duemila anni e ha avuto come estrema conseguenza la costruzione delle geometrie non euclidee: geometrie basate su un sistema assiomatico diverso da quello di Euclide.
In prima istanza si tentò di risolvere le difficoltà legate al V Postulato cercando di dimostrarlo a partire dai primi quattro: in questo modo, il V Postulato sarebbe stato dedotto come un teorema. In tale direzione ricordiamo l'opera di Girolamo Saccheri (1667-1733), il quale dette inconsapevolmente un contributo fondamentale allo sviluppo delle geometrie non euclidee.

Tuttavia i numerosi tentativi compiuti in questa direzione si dimostrarono sempre fallimentari. Ciononostante i matematici fino al XIX secolo non dubitarono mai della validità del V Postulato.
Nella prima metà del XIX secolo i matematici Bolyai e Lobačevskij furono i primi a costruire una geometria non euclidea, ottenuta sostituendo il V Postulato con la sua negazione (geometria iperbolica). Nella geometria iperbolica, dati una retta e un punto esterno a essa, esistono infinite rette passanti per il punto dato che non intersecano la retta.
Oltre alla geometria iperbolica furono costruite altre geometrie non euclidee, dette geometria sferica e geometria ellittica.
Per dimostrare che le geometrie non-euclidee sono coerenti tanto quanto quella euclidea, si ricorre all'uso di modelli che consentono di interpretare i risultati non euclidei per mezzo delle proprietà di particolari enti euclidei. In particolare i modelli di Poincaré e di Riemann possono essere utilizzati per visualizzare, rispettivamente, le proprietà delle geometrie iperbolica e sferica.