ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2009

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Sia f la funzione definita da:

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$$

dove n è un intero positivo e $x \in \mathbb{R}$.

1. Si verifichi che la derivata di $f(x)$ è: $f'(x) = -\dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$.

2. Si dica se la funzione f ammette massimi e minimi (assoluti e relativi) e si provi che, quando n è dispari, $f(x) \leq 1$ per ogni x reale.

3. Si studi la funzione g ottenuta da f quando $n = 2$ e se ne disegni il grafico.

4. Si calcoli $\int_0^2 g(x)dx$ e se ne dia l'interpretazione geometrica.

PROBLEMA 2

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si consideri la funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita $f(x) = x^3 + kx$, con k parametro reale.

1. Si dica come varia il grafico di f al variare di k (k positivo, negativo, o nullo).

2. Sia $g(x) = x^3$ e γ il suo grafico. Si dimostri che γ e la retta di equazione $y = 1 - x$ hanno un solo punto P in comune. Si determini l'ascissa di P approssimandola a meno di 0,1 con un metodo iterativo di calcolo.

3. Sia D la regione finita del primo quadrante delimitata da γ e dal grafico della funzione inversa di g. Si calcoli l'area di D.

4. La regione D è la base di un solido W le cui sezioni con piani perpendicolari alla bisettrice del primo quadrante sono tutte rettangoli di altezza 12. Si determini la sezione di area massima. Si calcoli il volume di W.

QUESTIONARIO

1 Siano: $0 < a < b$ e $x \in [-b; b]$. Si provi che $\int_{-b}^{b} |x - a| dx = a^2 + b^2$.

2 Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Tra le possibili applicazioni (o funzioni) di A in B, ce ne sono di suriettive? Di iniettive? Di biiettive?

3 Una moneta da 2 euro (il suo diametro è 25,75 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di lato 10 cm. Qual è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella? (cioè non tagli i lati dei quadrati)

4 «Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni». Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.

5 Si considerino le seguenti espressioni:

$$\frac{0}{1},\ \frac{0}{0},\ \frac{1}{0},\ 0^0.$$

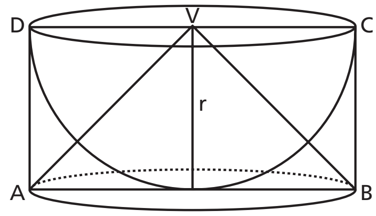
A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

6 Con l'aiuto di una calcolatrice, si applichi il procedimento iterativo di Newton all'equazione sen $x = 0$, con punto iniziale $x_0 = 3$. Cosa si ottiene dopo due iterazioni?

7 Si dimostri l'identità $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$ con n e k naturali e $n > k$.

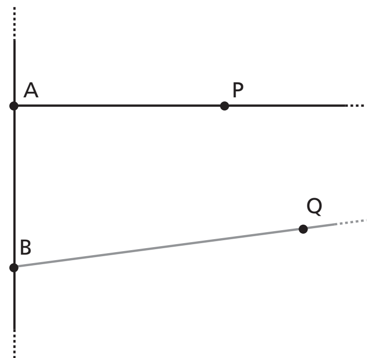
8 Alla festa di compleanno di Anna l'età media dei partecipanti è di 22 anni. Se l'età media degli uomini è 26 anni e quella delle donne è 19, qual è il rapporto tra il numero degli uomini e quello delle donne?

9 Nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che si chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio r e il cilindro a essa circoscritto. La scodella si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro. Si dimostri, utilizzando il principio di Cavalieri, che la scodella ha volume pari al cono di vertice V in figura 1.



▶ **Figura 1.**

10 «Se due punti P e Q del piano giacciono dalla stessa parte rispetto a una retta AB e gli angoli $P\hat{A}B$ e $Q\hat{B}A$ hanno somma minore di 180°, allora le semirette AP e BQ, prolungate adeguatamente al di là dei punti P e Q, si devono intersecare.» Questa proposizione è stata per secoli oggetto di studio da parte di schiere di matematici. Si dica perché e con quali risultati.



▶ **Figura 2.**

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.