Q6 2018

6 Determinare l'equazione della superficie sferica S, con centro sulla retta

$$r\colon \begin{cases} x = t \\ y = t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

tangente al piano $\pi\colon 3x - y - 2z + 14 = 0$ nel punto $T(-4; 0; 1)$.

6 Per la risoluzione del quesito proponiamo due metodi.

Metodo 1
Troviamo l'equazione della retta s perpendicolare al piano π e passante per il punto $T(-4;0;1)$.
Poiché il vettore normale al piano π è $\vec{n}(3;-1;-2)$, si ha:

$$s:\begin{cases} x=-4+3k \\ y=0-k \\ z=1-2k \end{cases} \quad k\in\mathbb{R} \;\to\; s:\begin{cases} x=-4+3k \\ y=-k \\ z=1-2k \end{cases} \quad k\in\mathbb{R}.$$

Il centro C della superficie sferica S appartiene alla retta r, quindi ha coordinate del tipo $C(\alpha;\alpha;\alpha)$ con $\alpha\in\mathbb{R}$, e appartiene alla retta s, quindi deve essere:

$$\begin{cases} \alpha=-4+3k \\ \alpha=-k \\ \alpha=1-2k \end{cases} \to \begin{cases} -4+3k=-k \\ \alpha=-k \\ \alpha=1-2k \end{cases} \to \begin{cases} 4k=4 \\ \alpha=-k \\ \alpha=1-2k \end{cases} \to \begin{cases} k=1 \\ \alpha=-1 \end{cases} \to C(-1;-1;-1).$$

Il raggio R della superficie sferica è $\overline{CT}$, quindi:

$$R^2=(-4+1)^2+(0+1)^2+(1+1)^2=(-3)^2+1^2+2^2=14.$$

L'equazione della superficie sferica S è:

$$(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=14 \to x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z-11=0.$$

Metodo 2
Il generico punto $C(t;t;t)$ della retta r, con $t\in\mathbb{R}$, costituisce il centro della superficie sferica S se il segmento CT risulta perpendicolare al piano π, ovvero se il vettore $\overrightarrow{CT}$ è proporzionale al vettore normale $\vec{n}(3;-1;-2)$ del piano π. Imponiamo dunque la condizione:

$$\overrightarrow{CT}=k\cdot\vec{n} \to (t+4;t-0;t-1)=k(3;-1;-2), \text{ con } t,k\in\mathbb{R}.$$

Otteniamo:

$$\begin{cases} t+4=3k \\ t=-k \\ t-1=-2k \end{cases} \to \begin{cases} t=-k \\ t+4=-3t \\ t=-1 \end{cases} \to \begin{cases} t=-1 \\ k=1 \end{cases}.$$

Per $t=-1$ abbiamo $C(-1;-1;-1)$ e $R=\overline{CT}=\sqrt{(-4+1)^2+(0+1)^2+(1+1)^2}=\sqrt{14}$.
L'equazione della superficie sferica S è:

$$(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=14 \to x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z-11=0.$$