Q4 – 2019 suppletiva

Considerati i punti A(2; 3; 6), B(6; 2; -3), C(3; -6; 2) nello spazio tridimensionale,

verificare che i segmenti OA, OB, OC (dove il punto O indica l' origine degli assi) costituiscono tre spigoli di un cubo.

Determinare il centro e il raggio della sfera S circoscritta a tale cubo.

4 I segmenti OA, OB e OC sono gli spigoli di un cubo se sono tutti di ugual lunghezza e se sono a due a due perpendicolari.
Calcoliamo le lunghezze:

$$\overline{OA} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7;$$

$$\overline{OB} = \sqrt{6^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7;$$

$$\overline{OC} = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 36 + 4} = \sqrt{49} = 7.$$

Per verificare la perpendicolarità è sufficiente provare che sono nulli i prodotti scalari tra le coppie dei rispettivi vettori, le cui componenti coincidono con le coordinate dei punti A, B e C avendo come primo estremo l'origine $O(0; 0; 0)$: $\overrightarrow{OA} = (2; 3; 6)$, $\overrightarrow{OB} = (6; 2; -3)$ e $\overrightarrow{OC} = (3; -6; 2)$.
Calcoliamo dunque i prodotti scalari:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot (-3) = 12 + 6 - 18 = 0;$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-6) + 6 \cdot 2 = 6 - 18 + 12 = 0;$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 6 \cdot 3 + 2 \cdot (-6) + (-3) \cdot 2 = 18 - 12 - 6 = 0.$$

Quindi i segmenti OA, OB e OC sono gli spigoli di un cubo.
L'equazione di una superficie sferica è $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ e imponiamo il passaggio per i punti A, B, C e O:

$$\begin{cases} 4 + 9 + 36 + 2a + 3b + 6c + d = 0 \\ 36 + 4 + 9 + 6a + 2b - 3c + d = 0 \\ 9 + 36 + 4 + 3a - 6b + 2c + d = 0 \\ d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a - b - 9c = 0 \\ 3a + 8b - 5c = 0 \\ 49 + 3a - 6b + 2c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 4a - 9c \\ 5a - 11c = 0 \\ 49 - 21a + 56c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -11 \\ b = 1 \\ c = -5 \\ d = 0 \end{cases}.$$

L'equazione della superficie sferica circoscritta al cubo è quindi $x^2 + y^2 + z^2 - 11x + y - 5z = 0$ che ha il centro nel punto $D\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$.
Determiniamo anche il raggio r della sfera calcolando:

$$r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 + \left(-\frac{c}{2}\right)^2 - d} = \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{121 + 1 + 25}{4}} = \sqrt{\frac{147}{4}} = \frac{7}{2}\sqrt{3}.$$

In alternativa, osserviamo che il centro della sfera circoscritta al cubo è il punto medio D della diagonale AE del cubo. D ha coordinate:

$$D\left(\frac{x_A + x_E}{2}; \frac{y_A + y_E}{2}; \frac{z_A + z_E}{2}\right) \rightarrow D\left(\frac{2 + x_E}{2}; \frac{3 + y_E}{2}; \frac{6 + z_E}{2}\right).$$

Per trovare le coordinate di E, calcoliamo il punto medio M della diagonale CB della base del cubo:

$$M\left(\frac{x_C + x_B}{2}; \frac{y_C + y_B}{2}; \frac{z_C + z_B}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}; -2; -\frac{1}{2}\right)$$

M è anche punto medio di OE, quindi:

- $\frac{x_E}{2} = \frac{9}{2} \rightarrow x_E = 9;$
- $\frac{y_E}{2} = -2 \rightarrow y_E = -4;$
- $\frac{z_E}{2} = -\frac{1}{2} \rightarrow z_E = -1.$

E ha coordinate $(9; -4; -1)$. Sostituiamo nelle coordinate di D:

$$D\left(\frac{2 + 9}{2}; \frac{3 - 4}{2}; \frac{6 - 1}{2}\right) \rightarrow D\left(\frac{11}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right).$$

Determiniamo r calcolando $\frac{1}{2}\overline{AE}$:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(2 - 9)^2 + (3 + 4)^2 + (6 + 1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{49 + 49 + 49} = \frac{7}{2}\sqrt{3}.$$

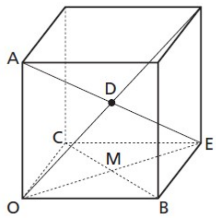

Figura 18