Q4 - 2019

Dati i punti *A*(2; 0; -1) e *B*(-2; 2; 1), provare che il luogo geometrico dei punti *P* dello spazio, tali che $\overline{PA} = \sqrt{2}\ \overline{PB}$, è costituito da una superficie sferica *S* scrivere la sua equazione cartesiana.
Verificare che il punto *T*(-10; 8; 7) appartiene a *S* e
determinare l'equazione del piano tangente in *T* a *S*.

Quesito 4

Un punto generico P dello spazio ha coordinate $P(x; y; z)$.
La sua distanza dai punti $A(2; 0; -1)$ e $B(-2; 2; 1)$ è:

$$\overline{PA} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z+1)^2}, \qquad \overline{PB} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}.$$

Imponiamo la condizione $\overline{PA} = \sqrt{2} \cdot \overline{PB}$, equivalente a $\overline{PA}^2 = 2\overline{PB}^2$:

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z+1)^2 = 2[(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2].$$

Sviluppando i calcoli si ottiene l'equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 8y - 6z + 13 = 0$$

che è l'equazione di una superficie sferica S di centro

$$C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad C\left(-\frac{12}{2}; -\frac{-8}{2}; -\frac{-6}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad C(-6; 4; 3)$$

e raggio

$$r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - d} = \sqrt{\frac{12^2}{4} + \frac{(-8)^2}{4} + \frac{(-6)^2}{4} - 13} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \approx 6,93.$$

Verifichiamo che il punto $T(-10; 8; 7)$ appartiene alla superficie S mostrando che le sue coordinate soddisfano l'equazione della superficie:

$$(-10)^2 + 8^2 + 7^2 + 12 \cdot (-10) - 8 \cdot 8 - 6 \cdot 7 + 13 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 100 + 64 + 49 - 120 - 64 - 42 + 13 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 \quad \textbf{Vero.}$$

Il vettore $\vec{CT}$, che rappresenta il raggio della superficie sferica passante per T, ha componenti

$$\vec{CT}(x_T - x_C; y_T - y_C; z_T - z_C) \quad \Rightarrow \quad \vec{CT}(-10+6; 8-4; 7-3) \quad \Rightarrow \quad \vec{CT}(-4; 4; 4).$$

Il piano α passante per T e tangente alla superficie S è lo stesso piano passante per T e perpendicolare a $\vec{CT}$. Se $(r_x; r_y; r_z)$ sono le componenti di $\vec{CT}$, troviamo:

$$\alpha: \ r_x(x - x_T) + r_y(y - y_T) + r_z(z - z_T) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -4(x+10) + 4(y-8) + 4(z-7) = 0 \quad \Rightarrow \quad -4x - 40 + 4y - 32 + 4z - 28 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -4x + 4y + 4z - 100 = 0 \quad \Rightarrow \quad x - y - z + 25 = 0.$$