Q3 2018 – sessione suppletiva

3 Determinare l'equazione della superficie sferica di centro C(1;-1;2) e tangente al piano di equazione $x - y + z = 10$ e le coordinate del punto di contatto tra la superficie sferica e il piano.

3

Procediamo nel seguente modo:

a. determiniamo la retta r perpendicolare al piano α di equazione $x - y + z = 10$ e passante per $C(1; -1; 2)$;

b. il punto di intersezione T fra r e α individua il punto di contatto tra superficie sferica e piano;

c. la distanza $\overline{CT}$, ovvero la distanza di C dal piano α, fornisce il raggio della superficie sferica;

d. dato il centro e il raggio, determiniamo l'equazione della superficie sferica.

Sviluppiamo i singoli punti.

a. Le rette perpendicolari ad α hanno vettore di direzione $(1; -1; 1)$, le cui componenti sono i coefficienti di x, y, z dell'equazione di α. La retta r, in forma parametrica, è allora:

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t, \quad \text{con } t \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + t \end{cases}$$

b. Sostituiamo le equazioni di r nell'equazione di α; la soluzione, in t, fornirà la coordinata parametrica del punto di intersezione T:

$$(1 + t) - (-1 - t) + (2 + t) = 10 \rightarrow 3t = 6 \rightarrow t = 2.$$

Il punto T ha dunque coordinate:

$$\begin{cases} x = 1 + 2 \\ y = -1 - 2 \\ z = 2 + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \\ z = 4 \end{cases} \rightarrow T(3; -3; 4).$$

c. Calcoliamo il raggio della sfera in due modi.

Modo 1. Distanza fra due punti.

$$r = \overline{CT} = \sqrt{(3-1)^2 + (-3+1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Modo 2. Distanza punto-piano.

$$r = \text{distanza}(C, \alpha) = \frac{|1 - (-1) + 2 - 10|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

d. La superficie sferica di centro $C(1; -1; 2)$ e raggio $2\sqrt{3}$ ha equazione:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = (2\sqrt{3})^2 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 6 = 0.$$