6. In un laboratorio posto sulla Terra, sotto una campana a vuoto uno ione Ag^+ (carica pari a $+e$, massa $m = 1{,}79 \cdot 10^{-25}$ kg) è lanciato obliquamente verso l'alto con una velocità iniziale di 1,53 m/s inclinata di 45° rispetto all'orizzontale e da un'altezza di 3,20 cm rispetto alla base della campana. La base stessa è elettrizzata con una carica negativa che genera un campo elettrico corrispondente a quello di una distribuzione piana e infinita di carica con densità superficiale di carica $\sigma = -7{,}92 \cdot 10^{-17}\ \mathrm{C/m^2}$.Determinare qual è la velocità con cui lo ione Ag^+ colpisce la base della campana a vuoto e la durata del suo volo.

6. **Primo metodo.**

Per una risoluzione elementare scomponiamo la velocità iniziale nelle sue componenti orizzontale e verticale, uguali tra loro:

$$v_{0x} = v_{0y} = \frac{v_0}{\sqrt{2}} = \frac{1{,}53\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\sqrt{2}} = 1{,}08\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

L'accelerazione a cui è soggetto lo ione è rivolta verso il basso e ha modulo:

$$a = \frac{F_{tot}}{m} = \frac{mg + \dfrac{e|\sigma|}{2\varepsilon_0}}{m} = g + \frac{e|\sigma|}{2\varepsilon_0 m} =$$
$$= 9{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + \frac{(1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C})(7{,}92 \cdot 10^{-17}\ \ \mathrm{C/m^2})}{2[8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \ \mathrm{C^2/(N \cdot m^2)}](1{,}79 \cdot 10^{-25}\ \mathrm{kg})} = 9{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} + 4{,}00\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 13{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Quindi la velocità verticale dello ione si annulla dopo un tempo:

$$\Delta t_1 = \frac{v_{0y}}{a} = \frac{1{,}08\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{13{,}8\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 0{,}0783\ \mathrm{s}.$$

La distanza verticale di discesa percorsa in questo intervallo di tempo è:

$$\Delta y = v_{0y}\Delta t_1 - \frac{1}{2}a(\Delta t_1)^2 = \left(1{,}10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)(0{,}0783\ \mathrm{s}) - \frac{1}{2}\left(13{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(0{,}0783\ \mathrm{s})^2 = 0{,}0438\ \mathrm{m}.$$

Quindi il moto verticale dello ione parte da fermo da un'altezza:

$$y_2 = y_1 + \Delta y = 0{,}0320\ \mathrm{m} + 0{,}0438\ \mathrm{m} = 0{,}0758\ \mathrm{m}.$$

Di conseguenza lo ione colpisce la base dopo un ulteriore intervallo di tempo

$$\Delta t_2 = \sqrt{\frac{2y_2}{a}} = \sqrt{\frac{2(0{,}0758\ \mathrm{m})}{13{,}8\ \ \mathrm{m/s^2}}} = 0{,}105\ \mathrm{s},$$

al termine del quale la velocità verticale dello ione è:

$$v_y = -a\Delta t_2 = -\left(13{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(0{,}105\ \mathrm{s}) = -1{,}45\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Quindi il tempo totale di volo dello ione è:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = (0{,}0783 + 0{,}105)\ \mathrm{s} = 0{,}183\ \mathrm{s}.$$

Inoltre, visto che la componente orizzontale della velocità si mantiene costante, il modulo della velocità finale dello ione risulta:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_{0x}^2 + v_y^2} = \sqrt{1{,}08^2 + 1{,}45^2}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Secondo metodo.

Introduciamo un sistema di riferimento y rivolto verso l'alto e con l'origine a livello della base della campana a vuoto. Utilizziamo le componenti della velocità iniziale e il valore dell'accelerazione calcolati in precedenza ($v_{0x} = v_{0y} = 1{,}08\ \text{m/s}\,;\ a = 13{,}8\ \text{m/s}^2$). Allora la legge del moto per la posizione y è:

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}a\,t^2.$$

Ponendo $y = 0$, la soluzione accettabile (positiva) dell'equazione di secondo grado che ne risulta è:

$$t = \frac{v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2ay_0}}{a} = \frac{1{,}08\ \frac{\text{m}}{\text{s}} + \sqrt{\left(1{,}08\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 2\left(13{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(0{,}0320\ \text{m})}}{13{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0{,}182\ \text{s}.$$

Il risultato ottenuto coincide con il precedente, entro la precisione delle cifre significative.

Il corrispondente valore della velocità finale è

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_{0x}^2 + v_y^2} = \sqrt{v_{0x}^2 + \left(v_{0y} - at\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(1{,}08\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left[1{,}08\ \frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(13{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(0{,}182\ \text{s})\right]^2} = 1{,}79\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$