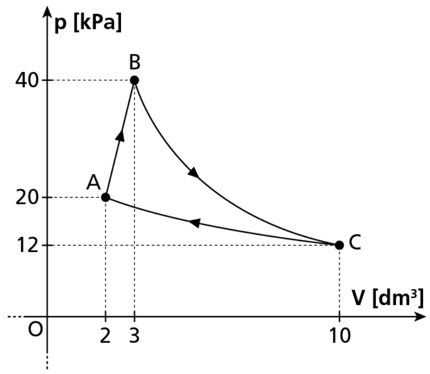
5. Nel diagramma in figura è rappresentata una trasformazione ciclica di un particolare sistema termodinamico. Il tratto AB è lineare; lungo il tratto BC il prodotto $p \cdot V$ è costante; infine nel tratto CA sussiste tra p e V una relazione del tipo

$$p = \frac{\alpha}{V+\beta}$$



doveα e β sono due costanti reali. Ricavare i valori diα e β, specificandone l'unità di misura.Utilizzando il calcolo integrale, calcolare poi il lavoro totale$W$, in joule, compiuto dal sistema in un ciclo specificandone il segno e approssimando il risultato alle unità.

5. Ricaviamo i valori di α e β imponendo il passaggio della curva di equazione $p = \frac{\alpha}{V+\beta}$ per i punti $A(2; 20)$ e $C(10; 12)$:

$$\begin{cases} 20 = \dfrac{\alpha}{2+\beta} \\ 12 = \dfrac{\alpha}{10+\beta} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 40 + 20\beta = \alpha \\ 120 + 12\beta = \alpha \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 40 + 20\beta = 120 + 12\beta \\ \alpha = 120 + 12\beta \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \beta = 10 \\ \alpha = 240 \end{cases}.$$

Per le unità di misura delle costanti α e β osserviamo quanto segue.

- La costante β ha le dimensioni fisiche di un volume, dato che nella formula indicata dal problema viene sommata al volume V; poiché, come evidenziato dalle unità di misura associate agli assi del grafico, si è scelto di misurare il volume in dm^3, anche la costante β sarà espressa in dm^3.
- La costante α ha le dimensioni fisiche di un prodotto tra pressione e volume, cioè di un lavoro, come osserviamo dall'equazione dimensionale:

  $$[p] = \frac{[\alpha]}{[V]} \longrightarrow [\alpha] = [p][V].$$

  Nel quesito proposto la pressione è misurata in kPa e il volume in dm^3, pertanto l'unità di misura in cui vengono espressi il lavoro e, di conseguenza, la costante α è:

  $$\text{kPa} \cdot \text{dm}^3 = 10^3 \text{ Pa} \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = \text{Pa} \cdot \text{m}^3 = \text{J}.$$

Dal punto di vista grafico il lavoro associato a un ciclo del sistema corrisponde all'area della regione racchiusa dal ciclo stesso. Per via analitica, calcoliamo il lavoro compiuto dal sistema durante un ciclo mediante la somma algebrica di tre integrali, osservando che il lavoro è per convenzione positivo quando è *fatto dal* sistema (fase espansiva), mentre è negativo quando è *subito dal* sistema (fase compressiva):

$$W = \int_2^3 p_{AB}(V)dV + \int_3^{10} p_{BC}(V)dV - \int_2^{10} p_{AC}(V)dV.$$

Le tre funzioni $p_{AB}(V)$, $p_{BC}(V)$ e $p_{AC}(V)$, che descrivono l'andamento della pressione nei tre rami del ciclo, si ricavano in base alle indicazioni del quesito e del grafico, e sono:

$$p_{AB}(V) = 20V - 20, \qquad p_{BC}(V) = \frac{120}{V}, \qquad p_{AC}(V) = \frac{240}{V+10}.$$

Calcoliamo gli integrali:

$$\int_2^3 p_{AB}(V)dV = \int_2^3 (20V - 20)dV = 20\left[\frac{V^2}{2} - V\right]_2^3 = 20\left(\frac{9}{2} - 3 - \frac{4}{2} + 2\right) = 30;$$

$$\int_3^{10} p_{BC}(V)dV = \int_3^{10} \frac{120}{V} dV = 120[\ln V]_3^{10} = 120 \ln\frac{10}{3} \simeq 144{,}48;$$

$$\int_2^{10} p_{AC}(V)dV = \int_2^{10} \frac{240}{V+10} dV = 240[\ln(V+10)]_2^{10} = 240 \ln\frac{20}{12} = 240 \ln\frac{5}{3} \simeq 122{,}60.$$

Il lavoro risulta:

$$W \simeq 30 + 144{,}48 - 122{,}60 = 51{,}88 \simeq 52.$$

Per quanto riguarda l’unità di misura, tale lavoro è espresso in J come la costante α, visto che anche qui abbiamo moltiplicato una pressione (misurata in kPa) per un volume (misurato in dm^3). Quindi il lavoro compiuto dal sistema in un ciclo è:

$$W \simeq 52 \text{ J}.$$

Il segno del lavoro è positivo, quindi prevale la fase espansiva del sistema.