Problema 2

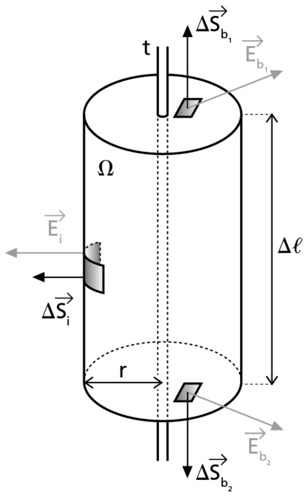
Si consideri un filo rettilineo infinito t, posto nel vuoto, che presenta una carica positiva distribuita in modo uniforme con densità lineare di carica λ. Al di fuori del filo, in un generico punto P dello spazio, si osserva che il campo elettrico $\vec{E}$ generato dalla distribuzione lineare ha direzione radiale rispetto a t ed è uscente da essa. Inoltre, il modulo del campo elettrico è costante nei punti posti alla stessa distanza dal filo.

1. Con riferimento alle caratteristiche geometriche di $\vec{E}$ esposte in precedenza, dimostrare che il modulo del campo elettrico generato dalla distribuzione lineare di carica in un punto P che dista r da t è dato da:

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{r}$$

Problema 2

1. Per determinare il modulo del campo elettrico è conveniente utilizzare una superficie cilindrica Ω di raggio r, di altezza Δl e con l'asse di simmetria su t.



Sulle due basi del cilindro, i vettori superficie sono ovunque perpendicolari ai corrispondenti vettori campo elettrico, per cui il flusso di campo elettrico attraverso di esse è nullo.
Sulla superficie laterale del cilindro, i vettori campo elettrico hanno modulo costante.
Dividiamo quindi la superficiale laterale in n porzioni descritte dai vettori $\Delta\vec{S}_i$ e indichiamo con $\vec{E}_i$ il vettore campo elettrico (con modulo uniforme E) nei punti di $\Delta\vec{S}_i$. Notiamo allora che i vettori $\vec{E}_i$ e $\Delta\vec{S}_i$ sono paralleli tra loro, per cui il flusso di campo elettrico risulta:

$$\Phi_\Omega(\vec{E}) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i\cdot\Delta\vec{S}_i = E\lim_{n\to+\infty}\Delta S_i = E(2\pi r\Delta l).$$

Allora in questo caso il teorema di Gauss si scrive come:

$$\Phi_\Omega(\vec{E}) = 2\pi r\Delta l|\vec{E}| = \frac{\Delta Q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda\Delta l}{\varepsilon_0}.$$

Uguagliando il secondo e il quarto termine della precedente catena di uguaglianze, otteniamo la relazione cercata:

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda}{r}.$$

Per le classi che conoscono gli integrali di superficie, la dimostrazione basata sul teorema di Gauss diventa:

$$\frac{\lambda\Delta l}{\varepsilon_0} = \Phi_\Omega(\vec{E}) = \oint_\Omega \vec{E}(P)\cdot d\vec{S} = \oint_\Omega |\vec{E}|dS = |\vec{E}|\oint_\Omega dS = |\vec{E}|2\pi r\Delta l,$$

da cui si deduce la formula del modulo del campo elettrico.