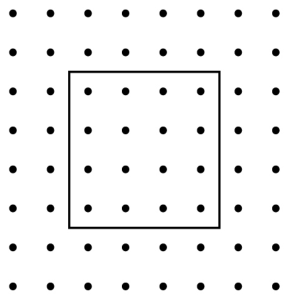
Si supponga che i(t) rappresenti l'intensità (in mA) della corrente indotta all'istante t (in s) in una spira conduttrice di forma quadrata, di lato L (in m) e resistenza R (in Ω), immersa in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$ come mostrato in figura.



Il campo magnetico è diretto perpendicolarmente al piano della spira e la sua componente B (in mT) in tale direzione varia nel tempo secondo la funzione B(t).Scegliamo il sistema di riferimento in modo che l'asse perpendicolare al piano del foglio abbia come verso positivo il verso uscente. In base a tale scelta, B(t)>0 se il campo magnetico $\vec{B}$ è uscente dal piano del foglio, e B(t)<0 se $\vec{B}$ è entrante. Inoltre, sempre in base alla scelta del verso degli assi del sistema di riferimento, i(t)>0 se la corrente percorre la spira in senso antiorario, i(t)<0 se la percorre in senso orario.

1. Giustificare, sulla base delle leggi di Maxwell dell'elettromagnetismo classico, il fatto che tra B(t)ei(t) sussiste una relazione del tipo

$$\frac{dB(t)}{dt} = -k \cdot i(t)$$

Dove k è una costante positiva. Considerato L=40 cm e R=0,16 Ω, determinare la dimensione e il valore di k.

SVOLGIMENTO:

Indichiamo con γ una linea chiusa, con S_γ una superficie (aperta) che ha la curva γ come contorno, con $\Gamma_\gamma(\vec{E})$ la circuitazione del campo elettrico $\vec{E}$ lungo la linea γ e con $\Phi_{S_\gamma}(\vec{B})$ il flusso del campo magnetico $\vec{B}$ attraverso la superficie S_γ. L'equazione di Maxwell relativa alla circuitazione del campo elettrico afferma che:

$$\Gamma_\gamma(\vec{E}) = -\frac{d\Phi_{S_\gamma}(\vec{B})}{dt}.$$

Applichiamo questa equazione alla situazione descritta nel problema, in cui:

- la linea chiusa γ corrisponde alla spira;
- la superficie S_γ corrisponde alla superficie piana delimitata dalla spira;
- la circuitazione del campo elettrico lungo la linea chiusa γ è, per definizione, uguale alla forza elettromotrice associata alla spira;
- poiché nella spira non sono inseriti generatori, la forza elettromotrice sulla spira è solo f_{em} indotta.

Ritroviamo quindi l'espressione consueta della legge di Faraday-Neumann-Lenz:

$$f_{em} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}.$$

Inoltre nel problema il campo magnetico è perpendicolare al piano della spira, quindi il flusso del campo magnetico attraverso la superficie della spira è $\Phi(\vec{B}) = B(t) \cdot l^2$, e pertanto:

$$f_{em} = -\frac{d(B(t) \cdot l^2)}{dt} = -l^2 \frac{dB(t)}{dt}.$$

Infine, dato che la spira è conduttrice e ha resistenza R, nella spira circola una corrente indotta $i(t)$ e per la prima legge di Ohm:

$$f_{em} = R \cdot i(t).$$

Sostituendo nell'espressione della legge di Faraday-Neumann-Lenz, si ha

$$R \cdot i(t) = -l^2 \cdot \frac{dB(t)}{dt} \longrightarrow \frac{dB(t)}{dt} = -\frac{R}{l^2} \cdot i(t)$$

e dunque vale una relazione del tipo

$$\frac{dB(t)}{dt} = -k \cdot i(t)$$

dove

$$k = \frac{R}{l^2}.$$

La costante k è il rapporto tra una resistenza e una superficie, quindi ha le dimensioni fisiche di una resistenza elettrica per una lunghezza elevata a –2:

$$[k] = \frac{[R]}{[L^2]} = [R][L^{-2}]$$

e la sua unità di misura è:

$$\frac{\Omega}{\mathrm{m}^2}.$$

Posto l = 40 cm = 0,4 m e R = 0,16 Ω, k assume il valore:

$$k = \frac{0{,}16}{0{,}4^2} = 1\ \frac{\Omega}{\mathrm{m}^2}.$$