3. Si consideri la funzione $f: R \longrightarrow R$ definita ponendo:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + \dfrac{3}{2} & \text{se } x < 1 \\ e^{b-x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Determinare i parametri reali a e b in modo che la funzione risulti derivabile in tutto il suo dominio. Dopo aver tracciato i grafici di f(x) e di f'(x), dire se esiste f''(1).

3. La funzione è definita a tratti. Le due funzioni $y_1(x) = ax^2 + \frac{3}{2}$ e $y_2(x) = e^{b-x}$ che la costituiscono sono, rispettivamente, una funzione polinomiale e una funzione esponenziale, pertanto sono entrambe continue e derivabili su tutto $\mathbb{R}$ per ogni valore di a e b.

La funzione $f(x)$ è quindi derivabile in $\mathbb{R} - \{1\}$; imponiamo che sia continua e derivabile anche in $x = 1$.

Per la continuità:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \longrightarrow \lim_{x\to 1^-}\left(ax^2 + \frac{3}{2}\right) = e^{b-1} \longrightarrow a + \frac{3}{2} = e^{b-1}.$$

Per la derivabilità, osserviamo che $f(x)$ è derivabile in $\mathbb{R} - \{1\}$ e che

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & \text{se } x < 1 \\ -e^{b-x} & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

Se $f(x)$ è continua in $x = 1$, per il criterio di derivabilità deve essere:

$$f'_-(1) = f'_+(1) \longrightarrow \lim_{x\to 1^-} 2ax = \lim_{x\to 1^+} -e^{b-x} \longrightarrow 2a = -e^{b-1}.$$

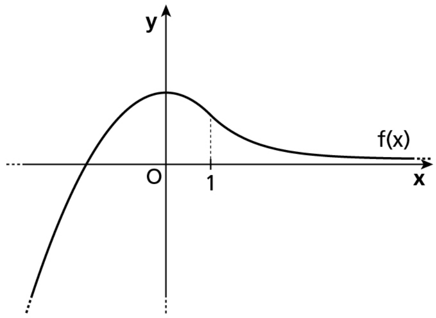
Mettiamo a sistema le due condizioni:

$$\begin{cases} a + \frac{3}{2} = e^{b-1} \\ 2a = -e^{b-1} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a + \frac{3}{2} = -2a \\ e^{b-1} = -2a \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ e^{b-1} = -2a \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ e^{b-1} = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}.$$

La funzione cercata è quindi:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} & \text{se } x < 1 \\ e^{1-x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}.$$

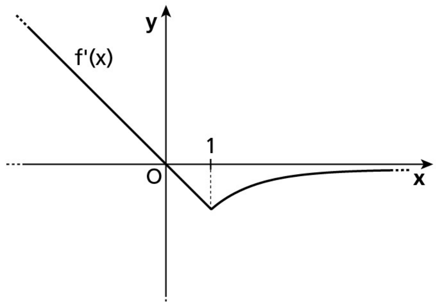
e il suo grafico si ottiene unendo un arco di parabola (per $x < 1$) e un arco di funzione esponenziale (per $x \geq 1$).



L'espressione analitica della derivata prima è

$$f'(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 1 \\ -e^{1-x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

e il suo grafico è costituito da una semiretta (per $x < 1$) e da un arco di funzione esponenziale (per $x \geq 1$).



Come si nota dal grafico la funzione $f'(x)$ è ovunque continua (abbiamo determinato i valori di a e b affinché lo fosse) ma non derivabile in $x = 1$, dove presenta un punto angoloso. Pertanto non esiste $f''(1)$. Questo si può rilevare anche per via analitica, infatti:

$$f''(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 1 \\ e^{1-x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

da cui:

$$f''_-(1) = \lim_{x \to 1^-} f''(x) = -1,$$

$$f''_+(1) = \lim_{x \to 1^+} f''(x) = 1;$$

poiché $f''_-(1) \neq f''_+(1)$, la funzione non ammette derivata seconda in $x = 1$.