Si consideri la funzione reale di variabile reale i(t)così definita:

$$\mathrm{i(t)} = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq \mathrm{t} \leq 2 \\ \mathrm{t}^3 + \mathrm{at}^2 + \mathrm{bt} + \mathrm{c} & \text{se } 2 < t \leq 5 \end{cases}$$

cona, b, c parametri reali.

1. Ricavare i valori di a, b e che rendono i(t)continua e derivabile in tutto l'intervallo[0;5], con i(3)=0

Risoluzione Problema 1

1. La funzione $i(t)$ è una funzione definita a tratti costituita da una funzione costante $i_1(t) = 2$ e da una funzione polinomiale $i_2(t) = t^3 + at^2 + bt + c$ entrambe continue e derivabili nel loro dominio naturale $\mathbb{R}$. Possiamo quindi concludere che $i(t)$ è sicuramente continua e derivabile in tutti i punti dell'intervallo $[0; 5]$, escluso al più il punto $t = 2$, punto di separazione dei due intervalli di definizione.

Affinché $i(t)$ sia continua anche in $t = 2$ deve essere, in base alla definizione di funzione continua:

$$\lim_{t\to 2^-} i(t) = \lim_{t\to 2^+} i(t) = i(2);$$

poiché $i(t) = i_1(t)$ in $[0; 2]$ e $i(t) = i_2(t)$ in $]2; 5]$, abbiamo:

$$\lim_{t\to 2^-} i(t) = i(2) = i_1(2) = 2,$$

$$\lim_{t\to 2^+} i(t) = \lim_{t\to 2^+} i_2(t) = \lim_{t\to 2^+} (t^3 + at^2 + bt + c) = 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c,$$

e quindi la condizione per la continuità di $i(t)$ in $t = 2$ è:

$$2 = 4a + 2b + c + 8 \longrightarrow 4a + 2b + c + 6 = 0.$$

Se $i(t)$ è continua in $t = 2$, per il criterio di derivabilità $i(t)$ è derivabile in $t = 2$ se:

$$\lim_{t\to 2^-} i'(t) = \lim_{t\to 2^+} i'(t).$$

Abbiamo:

$$\lim_{t\to 2^-} i'(t) = \lim_{t\to 2^-} i_1{}'(t) = \lim_{t\to 2^-} 0 = 0,$$

$$\lim_{t\to 2^+} i'(t) = \lim_{t\to 2^+} i_2{}'(t) = \lim_{t\to 2^+} (3t^2 + 2at + b) = 3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 + b,$$

e quindi la condizione per la derivabilità di $i(t)$ in $t = 2$ è:

$$4a + b + 12 = 0.$$

Inoltre deve essere $i(3) = 0$, cioè:

$$3^3 + a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 0 \longrightarrow 9a + 3b + c + 27 = 0.$$

Risolvendo il sistema formato dalle tre condizioni, otteniamo i valori dei parametri a, b e c.

$$\begin{cases} 4a + 2b + c + 6 = 0 \\ 4a + b + 12 = 0 \\ 9a + 3b + c + 27 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = -9 \\ b = 24 \\ c = -18 \end{cases}.$$

La funzione cercata risulta dunque la seguente:

$$i(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq t \leq 2 \\ t^3 - 9t^2 + 24t - 18 & \text{se } 2 < t \leq 5 \end{cases}.$$