

## Formulario moti celesti (leggi di Keplero e gravitazione universale)

$$3^{\circ} \text{ legge di Keplero } \boxed{\frac{T^2}{R^3} = k \text{ost}}$$

**esercizio:** calcolare la distanza media dal sole di un asteroide che ha un periodo di rivoluzione di 20 anni.

$$k_{\text{sole}} = \frac{T_{\text{terra}}^2}{R_{\text{terra}}^3} = \frac{1^2 \text{ anno}^2}{1^3 \text{ UA}^3} = 1 \text{ anno}^2 / \text{UA}^3 \quad (R_{\text{terra}} \text{ rappresenta il raggio medio dell'orbita terrestre})$$

$$k_{\text{sole}} = \frac{T_{\text{asteroide}}^2}{R_{\text{asteroide}}^3} = \frac{(20 \text{ anni})^2}{R_{\text{asteroide}}^3} = 1 \text{ anno}^2 / \text{UA}^3 \rightarrow R_{\text{asteroide}} = \sqrt[3]{400 \text{ UA}^3} = 7,37 \text{ UA}$$

**esercizio:** calcolare la distanza media dal sole di Giove sapendo che ha un periodo  $T = 3,74 \cdot 10^8 \text{ sec}$ .

$$k_{\text{sole}} = \frac{T_{\text{terra}}^2}{R_{\text{terra}}^3} = \frac{(3,16 \cdot 10^7 \text{ sec})^2}{(1,49 \cdot 10^{11} \text{ m})^3} = 3,0 \cdot 10^{-19} \text{ sec}^2 / \text{m}^3$$

$$k_{\text{sole}} = \frac{T_{\text{giove}}^2}{R_{\text{giove}}^3} = \frac{(3,74 \cdot 10^8 \text{ sec})^2}{R_{\text{giove}}^3} = 3,0 \cdot 10^{-19} \text{ sec}^2 / \text{m}^3 \rightarrow R_{\text{giove}} = \sqrt[3]{\frac{(13,99 \cdot 10^{16} \text{ sec})^2}{3,0 \cdot 10^{-19} \text{ sec}^2 / \text{m}^3}} = \sqrt[3]{466 \cdot 10^{33} \text{ m}^3} = 7,75 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

il valore trovato è quasi il valore reale  $7,78 \cdot 10^{11} \text{ m}$  la differenza è dovuta ad inevitabili errori di arrotondamento

Legge di gravitazione universale:  $\boxed{F = G \frac{m_1 m_2}{R^2}}$  costante di Cavendish:  $\boxed{G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{Kg}^2}$

È possibile "stimare" la massa di un corpo celeste eguagliando la forza gravitazione con quella centrifuga, ad esempio nel caso del sole e della terra

la forza gravitazionale vale:  $F = G \frac{m_{\text{sole}} m_{\text{terra}}}{R^2}$

la forza centrifuga vale:  $F = m_{\text{terra}} a_c = m_{\text{terra}} \frac{v^2}{R} = m_{\text{terra}} \left( \frac{2\pi R}{T} \right)^2 \frac{1}{R} = m_{\text{terra}} \frac{4\pi^2 R}{T^2}$

confrontando si ottiene:  $G \frac{m_{\text{sole}} m_{\text{terra}}}{R^2} = m_{\text{terra}} \frac{4\pi^2 R}{T^2}$  e semplificando si ha:

$$\boxed{m_{\text{sole}} = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{R_{\text{terra}}^3}{T_{\text{terra}}^2}}$$

Questa formula può essere utilizzata per stimare la massa di qualsiasi altro corpo celeste conoscendo T e R di un altro corpo celeste che gli orbita intorno. Ad esempio la massa della terra può essere stimata conoscendo il T e R della luna...

**Esercizio:** stimare la massa del sole conoscendo  $T = 3,16 \cdot 10^7 \text{ sec}$  e  $R = 1,49 \cdot 10^{11} \text{ m}$  della terra:

$$m_{\text{sole}} = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{R_{\text{terra}}^3}{T_{\text{terra}}^2} = \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{Kg}^2} \cdot \frac{(1,49 \cdot 10^{11} \text{ m})^3}{(3,16 \cdot 10^7 \text{ sec})^2} = 1,97 \cdot 10^{30} \text{ Kg}$$