# FISICA E MUSICA

**Paolo Camiz - Dipartimento di Fisica**
**Università di Roma "La Sapienza"**

Per evidenziare il ruolo della Fisica (e della Matematica) nella comprensione di alcuni aspetti dei fenomeni musicali mi servo spesso della metafora degli alieni: provate a immaginare un futuro (speriamo lontanissimo!) in cui l'umanità sia scomparsa, lasciando però abbondanti tracce della sua presenza, e lo sbarco sulla terra di un'astronave condotta da alieni molto avanzati dal punto di vista scientifico, ma totalmente privi del senso dell'udito; la cosa pu'o sembrare inverosimile ma non lo è: noi stessi siamo quasi insensibili ai campi magnetici e pertanto non ce ne serviamo per comunicare, se non per mezzo di elevate tecnologie che abbiamo elaborato ma che sono estranee al nostro apparato biologico: è facile quindi immaginare che questi alieni non ci sentano, ma nello stesso conoscano molto bene le leggi della fisica dei gas e dei solidi che sono alla base dell'acustica.

Questi alieni, durante la loro esplorazione della terra vogliono capire le caratteristiche delle specie estinte che l'hanno abitata e, forse, modificata: aggirandosi tra le rovine di una (anzi di molte) città scoprono un luogo (anzi numerosi luoghi) che contengono tre categorie di oggetti:
1)-libri scritti in un linguaggio non facilmente interpretabile ma tutto sommato semplice per lo scarso numero dei suoi simboli;
2)-oggetti composti dei materiali più svariati (metalli, legno, plastica) ma sostanzialmente tubi di varia lunghezza e forma, talvolta dotati di fori laterali; oppure insiemi di corde di varia lunghezza e tensione, che suggeriscono l'idea di un crivello o di un attrezzo per la tessitura; e anche scatole di varia forma chiuse da una o più membrane, e piastre metalliche, per lo più circolari;
3)-infine oggetti di varia tecnologia, apparentemente scollegati dai precedenti, che suggeriscono diverse capacità di immagazzinare l'informazione.

Secondo una prima interpretazione, fornita da un gruppo di archeologi di area umanistica (sarebbe più corretto dire "alienistica") ci troveremmo in presenza di luoghi di culto, ma appare sorprendente che lo stesso culto si sia diffuso per l'intero pianeta, mentre è risaputo (a livello galattico) che un evento del genere è estremamente improbabile, se non addirittura impossibile, malgrado i numerosi tentativi in tal senso.

La seconda interpretazione, suggerita stavolta da un gruppo di scienziati, è che in quei luoghi siano disponibili degli oggetti utili per la comprensione dei sistemi di comunicazione di quegli esseri estinti, non solo dal punto di vista tecnologico ma anche biologico. Per confermare la validità di questa ipotesi occorre però trovare un legame tra le tre categorie di oggetti, trovare cioè l'equivalente della "Pietra di Rosetta".

Uscendo di metafora possiamo formulare la seguente domanda: analizzando, per mezzo della fisica e della matematica, gli strumenti musicali, la scrittura musicale, le registrazioni musicali e mettendoli a confronto, che cosa possiamo imparare sulla struttura biologica e neurologica del nostro apparato uditivo?

Cominciamo ad analizzare gli strumenti musicali con l'occhio del fisico: si tratta di oggetti costituiti da tre elementi principali: l'ECCITATORE che direttamente o indirettamente fornisce energia al RISUONATORE, caratterizzato da una o più frequenze, e il RADIATORE, che immette l'energia sonora nell'ambiente esterno. Questi tre elementi, non sempre distinti, sono accoppiati tra loro, e ognuno di essi si presenta in numerose versioni.

Per gli strumenti a corda l'eccitatore è il plettro, il martelletto o l'arco, mentre per gli strumenti a fiato è il getto d'aria o l'ancia, per quelli a percussione è la mazza; al di là della loro natura gli eccitatori possono essere istantanei o continui. L'elemento risonante è la corda, la membrana, la sbarra, la piastra, la lamina, l'aria contenuta nel tubo; il radiatore è la tavola armonica, la superficie del tamburo, l'apertura del tubo; l'accoppiamento è il ponticello (tra corda e tavola armonica), l'interazione tra l'ancia e il gas della cavità.

Un'analisi un po' più tecnica indirizzata allo studio del risuonatore, ci dice innanzitutto se si tratta di un oggetto essenzialmente unidimensionale (cioè lungo e stretto, come la corda, il tubo, la sbarra, la lamina), bidimensionale (cioè largo e sottile, come la membrana, la piastra) o tridimensionale (come una sala da concerto).

Successivamente, allo scopo di determinare le frequenze possibili per il risuonatore, occorre conoscere quali sono le forze che si oppongono alle deformazioni indotte dall'eccitatore: può trattarsi della tensione cui sono sottoposte le corde e le membrane, considerate infinitamente flessibili, oppure è la rigidità stessa dei risonatori solidi responsabile di questa resistenza, o addirittura se sono presenti entrambe, come nel caso delle corde di acciaio del pianoforte. Nel caso della colonna di gas contenuta nel tubo si tratta della pressione che si oppone alle variazioni di volume.

Infine occorre conoscere i vincoli cui il risuonatore è sottoposto: se alcune sue parti sono bloccate (gli estremi della corda o della lamina, il contorno della membrana) o libere (gli estremi delle sbarrette dello xilofono) o, nel caso delle cavità riempite di gas, dove sono le pareti e dove le aperture.

## EQUAZIONI DIFFERENZIALI- FORZE SULLA CORDA

Per ognuno di questi casi la fisica-matematica è capace di descrivere il comportamento del sistema per mezzo di una **equazione differenziale alle derivate parziali**: nonostante il nome, forse brutto per i non addetti ai lavori, si tratta **semplicemente** di un modo compatto di scrivere le equazioni del moto, $f = ma$, forza uguale massa per accelerazione, per gli infiniti punti del sistema, ognuno dei quali può avere una diversa massa, una diversa proprietà elastica, e essere sottoposto a una diversa forza; se $x$ è l'insieme di variabili che identificano i punti del sistema, l'equazione diventa quindi $f(x) = m(x)a(x)$ e ci permette (se la sappiamo risolvere) di rispondere alla domanda: se (supponiamo) una corda di cui sono note densità, lunghezza e tensione, fissa agli estremi, viene percossa (o pizzicata, o strofinata con l'arco) in un certo punto, quali saranno le sue configurazioni ai tempi successivi, quali saranno le forze esercitate sul ponticello e, in ultima analisi, quale suono verrà prodotto? Un'analoga domanda si può fare per tutti i tipi di risuonatori.

Come abbiamo detto in precedenza le forze nascono dalle deformazioni, cioè dagli spostamenti di ciascun punto dalla sua posizione di equilibrio: nel caso della corda ogni elemento è tirato da una parte e dall'altra dagli elementi adiacenti e se queste trazioni sono uguali in modulo e direzione il punto è in equilibrio; se invece c'è una differenza, nel modulo, nella direzione o in entrambi, quell'elemento è sottoposto a una forza netta che è uguale alla tensione moltiplicata per la derivata seconda dello spostamento rispetto alla posizione: la derivata seconda è quell'ente matematico che descrive localmente le deformazioni di un segmento di retta.

D'altra parte l'accelerazione è la derivata seconda dello spostamento rispetto al tempo e quindi l'equazione del moto consiste nel legame di proporzionalità tra le due derivate seconde dello spostamento: la costante di proporzionalità è il rapporto tra la tensione $\tau$ e la densità $\mu$ e rappresenta il quadrato della velocità di propagazione delle perturbazioni lungo la corda.

È facile immaginare che ogni sistema risponda in modo diverso. In realtà non è esattamente così : sistemi diversi come la corda e il tubo cilindrico (canna d'organo) sono governati dalla stessa equazione (equazione delle onde in una dimensione) $\tau\partial^2 z/\partial x^2 = \mu\partial^2 z/\partial t^2$ ed è per questo motivo che, a parità di condizioni agli estremi (entrambi fissi per la corda, entrambi aperti per il tubo) le frequenze dei suoni emesse sono i multipli interi della frequenza fondamentale, che è inversamente proporzionale alla lunghezza della corda (o del tubo) e dipende dalla tensione (o dalla natura e temperatura del gas contenuto nel tubo). Per un tubo di sezione variabile l'equazione è alquanto diversa, ma per la maggior parte degli strumenti a fiato questa differenza non è particolarmente rilevante. È interessante osservare che questi suoni, la cui frequenza è un multiplo intero della frequenza fondamentale, si chiamano **armonici**, chissà perché.

Anche le membrane (che si potrebbero definire corde bidimensionali) obbediscono all'equazione delle onde, però in due dimensioni, il che rende possibili infiniti casi, legati alle molteplici forme della membrana, che può essere circolare, come nei tamburi o nei timpani, ma potrebbe appoggiarsi ad un contorno qualsiasi, non necessariamente piano (basti pensare a una bolla di sapone, che però non suona); anche stavolta esiste una frequenza fondamentale e infinite (discrete) altre, il cui rapporto con il fondamentale non è in genere intero e, spesso, neppure razionale.

Dal punto di vista matematico una cavità (il gas contenuto nella cavità) è una "corda tridimensionale", nel senso che obbedisce all'equazione delle onde in tre dimensioni, con soluzioni simili a quelle della membrana, che dipendono dalla forma delle pareti.

La situazione è invece diversa per i corpi rigidi (legno, metallo, vetro...): in queste caso le forze si sviluppano ancora in seguito alle deformazioni, ma la causa non è la tensione che non è più necessaria, bensì gli sforzi legati all'avvicinamento, all'allontanamento o allo scorrimento degli elementi adiacenti: le equazioni sono diverse in quanto la derivata seconda spaziale è sostituita dalla derivata quarta. C'è anche in questo caso un insieme discreto di frequenze legate alla frequenza fondamentale da rapporti irrazionali: la differenza più vistosa rispetto al caso della corda è che la frequenza fondamentale è inversamente proporzionale al quadrato delle dimensioni lineari. È per questo motivo che in un vibrafono di estensione 2 ottave, dove il rapporto tra le frequenze estreme è di 1:4 il rapporto tra le lunghezze della prima e dell'ultima barretta è di 2:1, mentre quello tra le lunghezze dei corrispondenti tubi risonanti è di 4:1.

Come abbiamo visto ogni risuonatore può vibrare secondo un insieme limitato di frequenze, di cui spesso viene percepita solo quella fondamentale: è per questo motivo che uno strumento musicale che debba produrre numerose frequenze, secondo le esigenze della cultura musicale che l'ha prodotto, è dotato di numerosi risuonatori (decine di corde per il pianoforte o di canne per l'organo) o di meccanismi che permettano allo stesso risuonatore modificare la frequenza fondamentale variandone la lunghezza efficace, come nella chitarra con i tasti o negli strumenti a fiato con i fori tonali. Naturalmente in molti strumenti musicali (la famiglia dei violini, i tromboni a coulisse) questa variazione di lunghezza può essere fatta in modo continuo (glissando); nella voce umana è la tensione delle corde vocali che può essere modificata con continuità.

Quando un "archeologo musicale", terrestre o alieno, si trova di fronte a un reperto vuole risalire alla cultura (musicale) che l'ha prodotto: nel caso degli strumenti quel che interessa non è soltanto il tipo di suono, al quale si può risalire anche se il reperto è incompleto o danneggiato, ma soprattutto quali suoni, cioè quali frequenze, quali note era in grado di emettere, informazione essenziale per quella ricerca. Gli strumenti a corda (tipo violini) purtroppo questa informazione non ce la danno perché dopo tanti secoli non sappiamo come erano accordati, visto che nel frattempo le corde si sono allentate o addirittura sono scomparse, e si è persa ogni informazione sulla tensione; anche un pianoforte, pur se le corde si sono conservate, dopo tanto tempo perde l'accordatura, e quindi non possiamo dire nulla, a meno che non guardiamo la tastiera, che manifesta una evidente periodicità: ogni 12 tasti la loro configurazione si ripete: perché? Forse, potrebbero pensare gli archeologi alieni, perché quei signori (noi umani) avevano 12 dita per mano. Che cos'altro potrebbe avere di "magico" il numero 12, e perché 12 = 7+5, cioè 7 tasti bianchi e 5 neri. Un'altra informazione interessante viene invece dalla posizione dei tasti sulla chitarra (o dalla lunghezza delle canne d'organo di uno stesso registro): le frequenze associate a due tasti (canne) adiacenti sono in rapporto radice dodicesima di 2.

## CORDE DI CHITARRA E CANNE D'ORGANO

A questo punto il matematico che collabora con gli archeologi fa notare un'apparente contraddizione: il rapporto tra gli armonici di una corda (o di un tubo cilindrico) è un numero razionale $m/n$, spesso "molto razionale", nel senso che gli interi $m$ ed $n$ sono entrambi piccoli, e sono proprio questi gli armonici maggiormente presenti nel suono effettivamente emesso dalla corda o dal tubo; invece il rapporto tra due potenze della radice dodicesima di due è sempre irrazionale, eccettuato il caso banale in cui gli esponenti differiscono, guarda un po', di 12 (o di un suo multiplo), nel qual caso il rapporto è proprio 2 (o una sua potenza) il "più razionale" dei rapporti tra gli armonici. Il fisico gli fa garbatamente notare che molti tra i rapporti "molto razionali" sono assai poco diversi da quelli irrazionali, e se si ammette che la realtà spesso sia leggermente diversa dall'elegante modello matematico, quella piccola differenza non è poi così importante.

Sembra dunque che da qualche parte si nasconda una contraddizione, vuoi nella cultura musicale, vuoi nell'interpretazione degli archeologi alieni.

SPARTITI E NOTAZIONE MUSICALE

Osservando invece i libri (gli spartiti musicali) si osservano delle strutture in cui compaiono sistematicamente 5 righe orizzontali sulle quali sono collocate delle piccole palline, a volte nere, a volte bianche, con o senza appendici di varia foggia, disposte a gruppi separati da righe verticali: l'umanista (l'alienista) pensa immediatamente a un codice linguistico e cerca di analizzare la distribuzione statistica delle varie palline e magari anche le correlazioni tra queste, immaginando che la separazione prodotta dalle righe verticali corrisponda a una separazione tra parole o concetti; lo scienziato invece prova a attribuire un valore numerico a ogni tipo di pallina e dopo pochi tentativi scopre che se i valori numerici sono collegati alle potenze di 2 è possibile associare ogni simbolo ad una potenza di 2 in modo che la somma dei valori numerici tra due righe verticali sia costante! Viene quasi spontanea l'idea che le righe verticali corrispondano a una scansione temporale regolare, ma con quale metro(nomo)? Non c'è nulla tuttavia che permetta di attribuire un significato alla posizione delle palline sulle (o tra) le 5 righe, né tantomeno a quegli strani segni (diesis, bemolle, ecc) che ogni tanto compaiono accanto alle palline, o a quelli altrettano strani, ma più decorativi, che compaiono all'inizio di ogni gruppo di righe (chiave di Sol, di Fa, di Do).

E infine ci sono quegli oggetti tecnologici, alcuni a forma di disco nero con delle sottilissime incisioni spiraleggianti, altri forma di nastro con vari stati di magnetizzazione, e numerosi macchinari che apparentemente permettono di "percorrere" quelle tracce: sembra che si tratti della spazializzazione di un'informazione che si evolve nel tempo. Se si osserva il tracciato al microscopio si scoprono degli indizi che sembrano collegare questo tracciato alle cose scoperte in precedenza: il tracciato consiste in oscillazioni più o meno complesse, che però presentano per brevi tratti caratteristiche di periodicità; le frequenze corrispondenti (che coprono un range di quasi 10 ordini di grandezza, anche se non si conosce il loro valore assoluto, visto che è ignota la velocità con cui quegli apparecchi percorrevano le tracce) sono in buona approssimazione legate tra loro da rapporti in parte razionali, in parte legati a potenze della ormai famigerata radice dodicesima di 2; non solo: le lunghezze di quegli intervalli sono spesso in rapporto potenza di 2. Che cosa rappresentava 2 per quei misteriosi esseri? Il più piccolo dei numeri primi? L'unico numero primo pari? La base del codice binario? E quell'altro numero, 12? La sua divisibilità per 2,3,4,6 significava qualche cosa, di magico, di sacro, di convenzionale?

I misteri e le contraddizioni si accumulavano, finché qualcuno (degli alieni) non scovò la Pietra di Rosetta, sotto forma di un DVD in cui Glenn Gould eseguiva al pianoforte il primo volume del "Clavicembalo ben temperato" di Bach, corredato (in un elegante cofanetto) dell'intero spartito: non fu difficile stabilire una correlazione tra le palline, la traccia registrata e la posizione delle dita del pianista sulla tastiera e da quello stabilire come era accordato lo strumento, come scorreva il tempo e soprattutto qual'era il significato del pentagramma. Fu, a dire il vero, una sorpresa perché si capì che si trattava di un codice posizionale logaritmico in base due compresso.

Lo so, è una brutta parola, ma significa quello che tutti i musicisti sanno, e cioè che le righe e gli spazi del pentagramma corrispondono, previa indicazione della chiave, ai tasti bianchi del pianoforte, mentre i tasti neri vengono indicati con le alterazioni; questa è una prima forma di compressione, ma quella più importante riguarda invece un fatto fisico: visto (e udito) che (quasi) tutti i suoni utilizzati hanno carattere periodico e quindi sono composti da un fondamentale con la sua corte di armonici (razionali) basta indicare (con la pallina sul pentagramma) solo la frequenza fondamentale.

Se si esamina un "sonogramma" si nota una certa somiglianza tra questo e la notazione musicale: vediamo più in dettaglio in che cosa consiste la somiglianza e dove sono le differenze. Un sonogramma è un modo per rappresentare sul piano un suono in modo analogico: in ascisse cè il tempo, in ordinate la frequenza, e ad ogni istante (in realtà un piccolo intervallo di tempo entro il quale è possibile fare l'analisi di Fourier del segnale) viene rappresentata con un diversa gradazione di grigio ( o in falsi colori) l'intensità di ogni frequenza. In questo modo un suono periodico appare come un un insieme di righe (bande) orizzontali equidistanziate che rappresentano il fondamentale e il suo corredo di armonici; un rumore è rappresentato invece da una banda molto più larga.

Mentre è assai facile riconoscere un suono periodico e valutare la frequenza del suo fondamentale, anche se non è presente, visto che questa corrisponde anche alla distanza tra due righe adiacenti, la cosa si complica se sono presenti simultaneamente due o più suoni periodici ( un accordo), perchè le righe dei rispettivi armonici possono sovrapporsi e generare confusione, confusione che viene eliminata nella notazione musicale lasciando solo il fondamentale: inoltre l'asse delle frequenze viene rappresentato in scala logaritmica. in modo che un dato intervallo corrisponda alla stessa distanza tra le due righe , indipendentemente dalla sua posizione assoluta, e finalmente questa distanza viene discretizzata, sia pure in modo un po' disomogeneo.

Per concludere la notazione musicale è una rappresentazione digitale del suono, anche se conserva una parte del suo aspetto analogico.

## CONFRONTO TRA IL PENTAGRAMMA E IL SONOGRAMMA

Una volta capita la compressione, cioè la questione dei tasti neri, risulta chiaro che tra una posizione (riga o spazio che sia) e quella adiacente (spazio o riga o, semplicemente, posizione alterata) corre un semitono, cioè il rapporto fisso radice 12ma di 2. Ora un codice logaritmico indica non le differenze ma i rapporti, e richiede pertanto che venga fissata l'origine, cioè la frequenza di riferimento (rapporto 1 con se stessa e logaritmo zero), che è contemporaneamente il nome di una nota (Do, Sol, Fa, con le rispettive chiavi poste all'inizio del pentagramma) e il diapason (p.es La=440Hz).

Anche le indicazioni di durata seguono un codice logaritmico binario, che per comodità non è posizionale, perché risulterebbe difficile indicare in modo leggibile lo scorrere del tempo: infatti, presa come unità la semibreve=1, le unità superiori (breve=2, longa=4 e maxima=8) verrebbero rappresentate in binario rispettivamente da 10-100-1000, e quelle inferiori (minima, semiminima,croma, semicroma, biscroma, semibiscroma) da 0,1 - 0,01 - 0,001 - 0,0001 - 0,00001 - 0,000001. È molto più comoda la lettura di simboli grafici che occupano poco spazio e permettono in modo rapido la costruzione di durate diverse dalle potenze di 2. Il numero binario 11, ad esempio, equivale a tre e si può scrivere "legando" i simboli corrispondenti a 10 e 1, cioè una breve più una semibreve.

## L'ALGEBRA DELLA NOTAZIONE MENSURALE

I nostri alieni, anche se non sono in grado di ascoltare le registrazioni, hanno ormai capito di aver scoperto una forma di comunicazione di tipo acustico, codificata in modo logaritmico in base due sia per le frequenze che per i tempi, con una dinamica elevatissima. Come mio commento personale voglio sottolineare che questo codice è una delle più grandi invenzioni di tutti i tempi, paragonabile al sistema numerico posizionale decimale e all'alfabeto. Queste scoperte devono ora chiarire la natura di quegli esseri misteriosi (noi) e in particolare la struttura e il funzionamento dell'organo sensorio. Risulta chiaro, dall'analisi delle registrazioni, che le frequenze "udibili" vanno da un valore minimo fino a un massimo 1000 volte più grande (circa 10 ottave) e questi limiti devono essere in qualche modo determinati dalle dimensioni e dalla struttura dell'organo. Dall'analisi di alcuni libri, in cui alle posizioni sul pentagramma vengono associati altri simboli (i nomi delle note nella notazione latina Do, Re, Mi..o in quella tedesca A,B,C,D..) risulta chiaro che le palline che distano di un'ottava hanno lo stesso simbolo: perché? E perché l'ottava viene divisa proprio in 12 parti uguali o quasi uguali?

Siamo sicuri di saper rispondere con certezza a queste domande, se non banalmente dicendo che la nostra musica è fatta così perché ci piace?

Innanzitutto occore ricordare che l'ottava, che è alla base di quasi tutte le culture musicali, non è stata sempre divisa in parti uguali: nell'antichità si usavano scale di 5 o 7 suoni che la dividevano in parti diseguali, e l'organizzazione di queste diseguaglianze caratterizzava i vari "modi"; i nostri modi maggiore e minore (di 7 suoni) sono organizzati con toni e semitoni collocati i posti diversi, ma i toni non sono tutti rigorosamente uguali (se non nelle tastiere accordate in modo temperato).

## TONI E SEMITONI IN MAGGIORE E MINORE

Se vogliamo costruire "scientificamente" una scala possiamo usare il criterio numerologico della scuola pitagorica (i numeri molto razionali) oppure ricordare che in un suono periodico sono presenti le frequenza multiple intere del fondamentale; successivamente possiamo costruire tutti i rapporti razionali del tipo $m/n$ e dividerli o moltiplicarli per 2 tante volte finché il risultato non è compreso tra 1 e 2. Se non oltrepassiamo il decimo armonico troviamo i seguenti valori, che possiamo interpretare come intervalli (rapporto tra le frequenze): 1, 10/9, 9/8, 8/7, 7/6, 6/5, 5/4, 4/3, 3/2, 2/1; 9/7, 7/5, 5/3; 10/7, 8/5, 7/4; 9/5, ecc. se li riportiamo su una scala logaritmica che parta dal Do si osservano degli addensamenti in corrispondenza di alcune note della tastiera del pianoforte: tuttavia, mentre alcune note sono rappresentate da una sola coppia di numeri, per altre sono possibili diverse soluzioni, come si può verificare dalla tabella seguente:

1/1 = unisono (Do-Do)

10/9; 9/8; 8/7 = tono o seconda maggiore Re-Mi; Do-Re; Si bemolle-Do

7/6; 6/5 = terza minore (Do-Mi bemolle)

5/4; 9/7 = terza maggiore (Do-Mi)

4/3 = quarta giusta (Do-Fa)

3/2 = quinta giusta (Do-Sol)

7/5;10/7 = quarta aumentata (Do-Fa diesis)

5/3 = sesta maggiore (Do-La)

8/5 = sesta minore (Do-La bemolle)

7/4,9/5 = settima minore (Do-Si bemolle).

Come si vede non tutte le 12 note della tastiera sono presenti, dato che ci siamo fermati in questa analisi al decimo armonico; se fossimo andati oltre sarebbero comparse, insieme a quelle assenti, numerose altre che ci costringerebbero a infittire i tasti: in particolare l'undicesimo armonico corrisponde a una nota che si trova grosso modo a metà strada tra il Fa e il Fa diesis.

Se vogliamo utilizzare questo criterio, per così dire naturale, per costruire una scala possiamo utilizzare solo gli intervalli tra ogni armonico e il proprio fondamentale, e anche tra ogni subarmonico e il fondamentale: le due serie, armonica e subarmonica di Do, sono costituite rispettivamente dalle seguenti note: Do, Do, Sol, Do, Mi, Sol, Si bemolle, Do, Re, Mi; Do, Do, Fa, Do, La bemolle, Fa, Re, Do, Si bemolle,La bemolle; anche in questo caso ci siamo fermati al decimo armonico o subarmonico. Scartando le note ripetute ci troviamo di fronte alla scala Do, Re, Mi, Fa, Sol, La bemolle, Si bemolle, Do in cui le note Re e Si bemolle compaiono in entrambe le due serie con frequenze leggermente diverse, come si è già visto nella precedente tabella: una differenza talmente piccola che soltanto un orecchio particolarmente raffinato riesce ad apprezzarla. Occorre tuttavia fare una scelta, che non è senza conseguenze sull'accordatura degli strumenti.

Una volta fatta la scelta quel che rimane è una scala che, interpretata secondo la tonalità di Do, corrisponde nella prima metà a Do maggiore, nella seconda metà a Do minore naturale; se invece vogliamo interpretarla secondo la tonalità di Fa, corrisponde a Fa minore melodico ascendente. Si vede dunque che le scale maggiori e minori sono in qualche modo "suggerite" dalla maggior frequenza di certi intervalli nei rapporti tra armonici. Gli intervalli tra due note consecutive non sono tutti uguali: alcuni sono toni (con valori leggermente diversi) altri (Mi-Fa e Sol- La bemolle) sono semitoni e il rapporto tra le corrispondenti frequenze è di 16/15.

Le rimanenti note della tastiera (Do diesis, Mi bemolle, Fa diesis, La, Si) nascono dall'esigenza di "trasportare" la scala, cioè di farla cominciare non dal Do, ma da una nota qualsiasi: se proviamo a farlo ci accorgiamo che alcune note le ritroviamo esattamente, altre le troviamo che una piccola differenza, e quelle mancanti le troviamo in vari modi, sempre con qualche piccola differenza: anche in questo caso siamo costretti a fare una scelta, e sulle varie possibili scelte si sono scontrati per secoli i teorici della musica, divisi fra l'esigenza che gli intervalli consonanti (la quinta giusta, la terza maggiore e i loro rivolti quarta giusta e sesta minore) fossero "molto consonanti" e quella di poter trasportare un brano musicale da una tonalità all'altra senza inconvenienti: orbene queste due esigenze sono incompatibili e vedremo in che modo il problema è stato alla fine risolto, evidentemente con un compromesso.

E a questo punto entriamo nel controverso argomento della consonanza e della dissonanza: perché certi intervalli (unisono, ottava, quinta giusta) risultano decisamente consonanti, altri (seconda maggiore e minore, settima maggiore e minore, quarta aumentata) decisamente dissonanti, e infine alcuni (terza, sesta) nel corso della storia sono passati da dissonanti a consonanti? La risposta pitagorico-numerologica è che i primi sono "molto razionali", i secondi pochissimo, e gli ultimi "una via di mezzo": si tratta di un modo di descriverli aritmeticamente, che però non individua le cause. La risposta, molto più moderna, di von Helmholtz (1800), è che il grado di consonanza dipende dal numero di armonici che i due suoni hanno in comune, magari pesando anche l'ampiezza di ciascun armonico.

FIGURA CON LA SOVRAPPOSIZIONE DI ARMONICI

E se i suoni fossero privi di armonici? A parte l'unisono tutti gli intervalli dovrebbero apparire dissonanti (nessun armonico in comune), ma cosí non è, anche se la differenza tra consonanza e dissonanza è molto meno marcata. Ma "esistono" suoni privi di armonici? In natura no, o quasi: solo in alcuni casi la forma d'onda di un suono che sta per spegnersi è perfettamente sinusoidale, mentre in generale c'è sempre una discreta dose di armonici. E allora vuol dire che il nostro apparato uditivo (l'orecchio, ma soprattutto la corteccia uditiva) "si è abituato" a percepire suoni periodici e quindi, quando viene esposto a suoni che appartengono alla stessa serie armonica, li classifica come se fossero generati da un singolo strumento e attribuisce a questa percezione la nota che corrisponde al fondamentale di quella serie, spesso anche se il fondamentale non è effettivamente presente (il cosiddetto fondamentale mancante). Questo fenomeno percettivo è stato descritto per la prima volta dal famoso violinista e compositore Giuseppe Tartini (il suo "terzo suono").

Per spiegarlo basta la fisica (dell'apparato uditivo) o occorre anche la neurologia? La fisica può dire qualche cosa in due modi: se la risposta della parte meccanica dell'orecchio (le membrane e la catena degli ossicini) non è rigorosamente lineare (e quasi certamente non lo è, specialmente alle intensità elevate) allora lo stimolo che giunge all'orecchio interno presenta delle distorsioni, per cui anche un suono privo di armonici li acquista durante la trasmissione; con questo meccanismo si può spiegare anche il terzo suono di Tartini. Una seconda spiegazione invece chiama in causa quel che avviene nell'orecchio interno: il meccanismo è più complicato ma il risultato finale è lo stesso.

È chiaro che con la fisica non si può spiegare un'abitudine: per quello occorre prendere in considerazione la plasticità del cervello, cioè la sua capacità di modificare l'organizzazione delle connessioni sinaptiche tra i neuroni come conseguenza delle esperienze percettive. In questo caso, se pensiamo (e ci sono delle evidenze sperimentali al riguardo) ai neuroni della corteccia uditiva come ai tasti di un pianoforte (solo in maggior numero) e al condizionamento che può verificarsi se due o più tasti vengono "suonati" simultaneamente, è abbastanza facile accettare l'idea che, a forza di ascoltare suoni periodici (le nostre stesse voci, anche prima della nascita), le connessioni trasversali tra neuroni che corrispondono a suoni della stessa serie armonica vengano tanto più rinforzate quanto più sono "razionali" i rapporti tra i termini della serie; alla fine di questo condizionamento l'ascolto di un suono monocromatico mette in gioco tutti i neuroni della sua serie armonica (e subarmonica), spiegando il terzo suono, e anche i criteri di consonanza di Helmholtz: a questo proposito questo ragionamento ci permette di definire in termini neurali il significato di consonanza e dissonanza: un suono monocromatico o dotato di armonici stimola $n$ neuroni, due suoni distanti un'ottava stimolano (in misura leggermente diversa) gli **stessi neuroni** (e questo forse spiega perché quei due suoni portino lo stesso nome), due suoni distanti una quinta stimolano (circa) $1.5n$ neuroni, due suoni in rapporto irrazionale ne stimolano $2n$; all'aumentare del numero di neuroni coinvolti in una percezione musicale aumenta il "lavoro computazionale" che il cervello deve compiere per decifrare quello stimolo e diminuisce la sensazione di consonanza.

## UNA RETE NEURALE MUSICALE

È possibile costruire un "robot musicale"? Con questo termine intendo un "oggetto virtuale" che valuti i suoni allo stesso modo nostro. Questo oggetto è una rete neurale, in sostanza un programma di computer che sia capace stabilire stabilire una "relazione di somiglianza" tra coppie di suoni che gli vengono presentati virtualmente. Concretamente funziona secondo il principio della "Rete neurale autoorganizzante di Kohonen", sviluppato da Marco Beato nella sua tesi di laurea.

Un "orecchio" è dotato di un certo numero di unità sensibili, accordate ad altrettante frequenze, con una certa tolleranza (che può essere conntrollata dall'operatore); ogni unità è connessa sinapticamente ad altre unità (il secondo strato della rete) disposte su un toro a due dimensioni, con pesi sinaptici inizialmente random. Viene proposto un suono (dotato di armonici) e il segnale si propaga al secondo strato determinando eccitazioni di varia misura su quelle unità una delle quale sarà quella vincente (massima eccitazione): il suo peso sinaptico viene rinforzato, insieme a quello delle unità vicine, mentre gli altri (lontani) vengono indeboliti. Si presenta un secondo suono e si procede nello stesso modo fintantoché la rete non si stabilizza. A questo punto succede che ad ogni suono risponde eccitandosi un'unità contenuta in una "bolla": bolle adiacenti corrispondono a suoni "simili" (consonanti?) bolle lontane a suoni diversi (dissonanti?). Il risultato dipende drasticamente dalla tolleranza: ad alta tolleranza (orecchio "stonato") corrisponde un'organizzazione di bolle ordinate secondo la frequenza (come su una tastiera, anche se l'intervallo minimo è iverso dal semitono); abbassando la tolleranza (orecchio un po' più intonato) le bolle corrispondenti a suoni distanti un'ottava sono sistematicamente adiacenti, chiudendo per così dire la tastiera in un circolo; abbassando ancora la tolleranza (orecchio ben intonato) l'ordinamento a frequenza crescente viene sostituito da un ordinamento, non completo, a salti di quinta e, se in un ottava ci sono 24 suoni si formano due (super)bolle, corrispondenti ai suoni di indice pari o dispari rispettivamente: è come se questo orecchio virtuale "preferisse" tener separati i suoni corrispondenti ad una scala cromatica da quelli di una scala cromatica spostata di un quarto di tono.

Questo risultato ci mostra che i concetti di consonanza e dissonanza hanno in qualche modo a che fare con la topologia dello spazio percettivo uditivo, topologia che determina le relazioni di vicinato tra due stimoli sonori, ma che non è assoluta, in quanto dipende dalle caratteristiche individuali dell'organo uditivo e, probabilemte, anche dall'eserienza uditiva di ciascun individuo.

## IL CIRCOLO DELLE QUINTE

E arriviamo ora al contrasto tra i rapporti razionali e la ormai famigerata radice dodicesima di 2: abbiamo visto la scala armonica o naturale e abbiamo capito come si possono riempire gli spazi (toni) per mezzo delle alterazioni: nel corso dell'evoluzione della musica qualcuno ha pensato di arricchire il "panorama" introducendo, all'interno di un brano musicale, una o più modulazioni, utilizzando a questo scopo le alterazioni e, per gli strumenti a tastiera, i tasti neri. Purtroppo questi innovatori si sono accorti che lo stesso brano (melodia+armonia) che risultava perfettamente intonato sui tasti bianchi, diventava sempre più stonato, man mano che ci si allontanava dalla tonalità di partenza utilizzando un maggior numero di tasti neri: niente di male, cambiamo la loro accordatura, e sono state escogitate tante accordature diverse, ma la stonatura che usciva da una porta rientrava dalla finestra. La ragione è semplice: se procediamo a salti di quinta (il più consonante degli intervalli, dopo l'unisono e l'ottava) ci accorgiamo che con 12 passi percorriamo 7 ottave, ma non esattamente, in quanto una potenza di 3/2 (la quinta) non potrà mai essere uguale a una potenza di 2 (l'ottava); quel pezzettino di troppo, che in termini musicali corrisponde a (circa) un quinto di semitono, è quello che impedisce la "chiusura del circolo delle quinte".

È possibile chiudere il circolo meglio di quanto si riesce a fare con la radice dodicesima di due? Per scoprirlo si può precedere nel modo seguente: continuare ad accumulare quinte (oltre le prime 12) cioè calcolare potenze sempre più elevate di 3/2 e confrontare il risultato con le potenze di 2 ( le ottave); si scopre così che 53 quinte corrispondono circa a 31 ottave ma la chiusura di questo nuovo circolo è circa 10 volte migliore di quello tradizionale. Come utilizzare questo risultato? Per esempio costruendo un tastiera con 53 tasti per ottava (con l'elettronica si può fare facilmente) in cui la distanza tra due tasti adiacenti (il rapporto tra le frequenze) è radice 53-ma di 2, circa un quarto di semitono, molto vicino al "coma", cioè alla mancata chiusura del circolo tradizionale: con una disponibilità di questo genere è possibile selezionare di volta in volta, secondo le esigenze musicali, 12 tasti che corrispondano a (quasi) qualsiasi tipo di accordatura (tra le tante che si sono succedute nella storia della musica.

I vari sistemi di accordatura differiscono per la ripartizione tra i vari intervalli della scala di quel pezzettino: ognuno di essi presenta vantaggi e svantaggi. Quello adottato attualmente è il più democratico, nel senso che tutti i semitoni sono uguali, appunto, a radice dodicesima di 2. Tuttavia questo accade solo negli strumenti a suono predisposto. I buoni musicisti che usano strumenti dal suono leggermente modificabile (strumenti ad arco, molti tra gli strumenti a fiato e la voce) adattano di volta in volta l'intonazione della singola nota per ottimizzare la consonanza con gli altri suoni. È fondamentale quindi, per la formazione di un buon musicista, la conoscenza di queste nozioni e, soprattutto, la pratica della musica d'insieme.

Per concludere questa chiacchierata possiamo domandarci se queste considerazioni di carattere (fanta)scientifico abbiano una qualche utilità ai fini della valutazione estetica di un brano musicale: secondo me ne hanno assai poca, perché l'estetica musicale (e non solo) si basa su molte altre considerazioni, di carattere storico, letterario, sociale, religioso. tecnologico. Si può invece dire che la fisica e la matematica sono (state) utili per evidenziare la natura dei fenomeni acustici, del linguaggio musicale e per dare una giustificazione in qualche modo scientifica (a posteriori) alle regole della composizione, regole che per fortuna i maggiori compositori hanno opportunamente violato, altrimenti sarebbero stati dei banali mestieranti.