9 - Gli strumenti a fiato

Gli strumenti a fiato non sono altro che delle cavità parzialmente aperte, della forma più disparata, in cui l'aria viene eccitata, in vari modi: l'equazione che ne governa il comportamento è la solita equazione delle onde, che abbiamo già incontrato in diverse circostanze, in particolare nel breve paragrafo dedidato all'acustica ambientale, che però riguardava essenzialmente delle cavità chiuse, all'interno delle quali il suono veniva generato da uno o più strumenti e si propagava all'interno dell'ambiente, per essere riflesso e/o assorbito negli urti contro le pareti: anche un suono impulsivo, come il colpo di pistola che talvolta viene usato per misurare la risposta di un ambiente, impiega un certo tempo a scomparire, tempo che varia da circa un secondo a qualche diecina di secondi. All'interno di uno strumento a fiato invece il suono si smorza in tempi brevissimi, e deve perciò essere continuamente rigenerato per mezzo del meccanismo di eccitazione; questo dipende dal fatto che la grande massa d'aria contenuta in una stanza o in una sala da concerti, insieme alle ragguardevoli dimensioni dell'ambiente, assicura una notevole inerzia acustica, che invece manca agli strumenti a fiato, che hanno lunghezze comprese tra i pochi centimetri delle canne più acute dell'organo e i circa dieci metri di quelle più gravi (gli altri strumenti a fiato hanno lunghezze comprese entro questi limiti), e larghezze tra il centimetro e il decimetro. Un confronto con gli strumenti a corda ci mostra che le corde gravi del pianoforte in seguito alla percussione mantengono la vibrazione per molti secondi, mentre quelle acute si spengono subito, tant'è vero che non hanno bisogno degli smorzatori; le corde naturalmente possono venir eccitate anche con l'arco, e in questo caso sono simili agli strumenti a fiato.

Una trattazione elementare degli strumenti a fiato costituiti da un tubo cilindrico affronta il problema utilizzando la versione unidimensionale dell'equazione delle onde, giustificando questa scelta con il grande rapporto tra la lunghezza del tubo e la sua larghezza, e trattando il tubo come una cavità isolata di cui importa solo conoscere la lunghezza e le condizioni ai due estremi, che possono essere aperti o chiusi: escludendo il caso di chiusura totale, perché allora il suono resterebbe confinato all'interno del tubo, rimangono i due casi di un estremo aperto e l'altro chiuso, e il caso degli estremi entrambi aperti. Le condizioni alle pareti del tubo, sia quelle laterali che quelle agli estremi, sono che la componente normale del gradiente della pressione debba essere nulla, in quanto l'aria a contatto con la parete può muoversi soltanto parallelamente ad essa, mentre all'estremo aperto la pressione deve coincidere con quella esterna. Riferendo tutto alla pressione, o meglio alla differenza tra la pressione nei vari punti all'interno del tubo e la pressione esterna, all'estremo chiuso tale differenza deve avere un estremo, mentre a quello aperto deve annullarsi.

Quindi in un tubo in cui entrambi gli estremi siano aperti, com'è il caso dei flauti, il tubo deve contenere un numero intero di semilunghezze d'onda, e perciò le frequenze proprie sono i multipli interi della frequenza fondamentale, che si ricava tenendo conto che la sua lunghezza d'onda è il doppio della lunghezza del tubo. Se un estremo è chiuso e l'altro aperto il tubo deve contenere un numero dispari di quarti di lunghezza d'onda, e le frequenze proprie sono i multipli dispari della fondamentale, che stavolta ha una lunghezza d'onda pari a quattro volte la lunghezza del tubo: questo si verifica in certi registri organistici (il flauto tappato) o più semplicemente nel fischietto costituito da un piccolo tubicino (una chiave per esempio) chiuso da una parte, in cui il suono si produce soffiando attraverso l'estremità aperta; anche gli strumenti ad ancia (l'oboe, il clarinetto, la voce umana) hanno le stesse frequenze proprie, ma stavolta è l'estremo in cui cè l'ancia ad essere considerato chiuso, perché è lì che la pressione è massima, mentre il suono "esce" dall'estremo aperto.

Questa schematizzazione fornisce, in modo elementare e per questa ragione approssimato, l'insieme delle frequenze proprie delle principali famiglie di strumenti a fiato; tuttavia un semplice esperimento basterà a convincerci che le cose sono un po' più complicate: prendiamo un tubo cilindrico lungo tra uno e due metri, del diametro di uno-due centimetri, di materiale rigido (legno, metallo, plastica) e proviamo a "suonarlo": possiamo farlo in due modi, a guisa di flauto, soffiando attraverso un estremo, o a guisa di tromba, facendoci dentro una "pernacchia"; nel primo caso, dopo aver trovato la giusta inclinazione del soffio, sentiremo un suono di frequenza ben definita, e non sarà difficile rendersi conto che variando la lunghezza del tubo la frequenza varia con proporzione inversa, e che chiudendo l'estremità del tubo la frequenza si dimezza (il suono scende di un'ottava); nel caso della tromba invece, ammesso di essere capaci di variare con continuità la frequenza della pernacchia, ci accorgiamo che il tubo è in grado di sostenere qualsiasi frequenza, ma che ci sono alcune frequenze privilegiate per le quali il suono risulta più bello e squillante, e che corrispondono, grosso modo, ai multipli dispari del fondamentale. Da che cosa dipende questa discrepanza? Dalle approssimazioni fatte, soprattutto quella di considerare gli estremi rigorosamente chiusi o aperti, dimenticando l'influenza importante del meccanismo di eccitazione da una parte e dell'accoppiamento con l'ambiente esterno dall'altra. Se facciamo, ancora una volta, il confronto con la corda, l'approssimazione consiste nel considerare rigorosamente fissi gli estremi, mentre invece quello che si trova sul ponticello fisso non è, perché deve trasmettere la vibrazione alla tavola armonica, ma in questo caso la correzione è piccola; l'estremo aperto del tubo non ha un corrispettivo nella corda che deve essere tesa, ma lo troviamo della sbarra, in cui abbiamo visto che modificare le condizioni di un estremo che, ricordiamolo, può essere libero, appoggiato o incastrato, modifica in modo notevole lo spettro delle frequenze. Conviene pertanto affrontare il problema dei tubi sonori dall'inizio, ricordando la presenza dell'eccitatore e dell'ambiente esterno un cui il suono deve propagarsi, e includendo anche lo studio dei tubi non cilindrici, in cui la sezione non è costante.

Per affrontare il problema della propagazione delle onde di pressione in un fluido (in generale un gas, ma anche un liquido) dobbiamo innanzitutto scrivere le equazioni fondamentali, che sono la solita equazione del moto $\mathbf{f} = m\mathbf{a}$, l'equazione di continuità $\partial\rho/\partial t + \nabla\mathbf{J} = 0$ e l'equazione termodinamica che lega il volume e la pressione: se assumiamo che si tratti (almeno per i fenomeni acustici) di una trasformazione adiabatica si ha $pV^\gamma = cost$; preso un elemento di volume dV la sua massa è $m = \rho dV$, la forza che su questo agisce è $\mathbf{f} = \nabla p dV$, la densità di corrente $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$.

Pertanto possiamo scrivere le equazioni

$$-\nabla p = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}), \tag{9.1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{9.2}$$

e derivando rispetto al tempo l'adiabatica si ottiene

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{p}{\rho}\gamma\frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{9.3}$$

Prendendo la divergenza della (9.1), derivando la (9.2) rispetto al tempo e sommando membro a membro si ottiene

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \nabla^2 p = 0; \tag{9.4}$$

utilizzando la (9.3) e tenendo presente che quel che ci interessa sono le (piccolissime) variazioni di pressione e di densità intorno a dei valori medi, praticamente costanti sulla scala di tempi in cui si svolgono i fenomeni acustici, possiamo scrivere

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho_o}{p_o \gamma}\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{9.5}$$

ottenendo finalmente l'equazione delle onde di pressione

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\gamma p_o}{\rho_o}\nabla^2 p = 0, \tag{9.6}$$

dove $\gamma = c_p/c_v$ e si può definire una velocità del suono $c^2 = \gamma p_o/\rho_o$, che come si vede dipende dalla natura del gas, dalla sua densità e dalla temperatura. Da questo momento in poi intenderemo per pressione acustica, che sarà ancora indicata con p, la differenza tra la pressione istantanea e il valor medio p_o.

Per la risoluzione dell'equazione delle onde è necessario imporre le condizioni al contorno, che in genere è costituito dalle pareti di una cavità, nella quale possono essere presenti delle aperture più o meno grandi: se le pareti sono perfettamente rigide e non assorbenti la componente del gradiente della pressione normale alla parete deve annullarsi, mentre in corrispondenza di piccole aperture la pressione deve coincidere con quella ambientale, e quindi la pressione acustica deve annullarsi; molto più difficile è il caso di pareti non rigide e parzialmente assorbenti, come sono quelle di una sala da concerto o quelle del tratto vocale degli animali, e quello delle aperture non piccole.

Come si è visto negli esempi presentati all'inizio di questo capitolo la soluzione è semplice quando la forma del contorno è esprimibile in modo elementare in un opportuno sistema di coordinate, quali le coordinate cartesiane, quelle cilindriche o quelle sferiche; negli altri casi c'è qualche difficoltà in più.

Prima di riesaminare in dettaglio alcuni di questi casi conviene ricavare alcune altre relazioni utili: se consideriamo la forma unidimensionale dell'equazione del moto e chiamiamo ξ lo spostamento del volumetto di gas essa assume la forma

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}; \tag{9.7}$$

se assumiamo per la pressione la forma dell'onda piana

$$p(x,t) = Ae^{-i(kx-\omega t)} + Be^{i(kx+\omega t)} \tag{9.8}$$

è facile rendersi conto che anche lo spostamento soddisfa l'equazione delle onde e che la sua espressione è data da

$$\xi = \frac{-i}{\rho\omega c}[Ae^{-i(kx-\omega t)} - Be^{i(kx+\omega t)}]; \tag{9.9}$$

la derivata temporale dello spostamento prende il nome di velocità acustica, che nel caso in cui $B = 0$ vale $u = p/\rho c$; il rapporto tra la pressione e la velocità acustica prende il nome di impedenza acustica $z = p/u$, che nel caso precedente vale $z = \rho c$.

Siamo ora in grado di esaminare il caso più semplice, che è quello del tubo cilindrico, con sezione circolare di raggio R: utilizzando coordinate cilindriche $r, \phi, x \geq 0$ l'equazione delle onde diventa

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \tag{9.10}$$

che può essere risolta per separazione delle variabili, ottenendo per la dipendenza dal tempo, da x e da ϕ un andamento esponenziale oscillante, del tipo $exp(i(m\phi + \omega t - kx))$, mentre la dipendenza radiale è rappresentata da una funzione di Bessel $J_m(\pi qr/R)$; la condizione di annullamento della derivata radiale sulla parete del cilindro limita i valori di q agli zeri (numerati con n) della derivata della m-esima funzione di Bessel $J'(\pi q_{mn}) = 0$; si ricava allora la relazione

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\pi q_{mn}}{R}\right)^2; \tag{9.11}$$

il significato di questa relazione è il seguente: se immettiamo all'origine del tubo di lunghezza infinita una pressione che oscilla nel tempo con pulsazione ω, essa si propagherà nel verso positivo dell'asse x con il numero d'onde dato dalla (9.11) per ciascuno dei modi caratterizzati dai numeri quantici m, n, purché il secondo membro della (9.11) sia positivo, cioè sia $\omega > \omega_c = \pi q_{mn} c/R$, altrimenti k diventa immaginario puro e la pressione decade esponenzialmente con x. Se invece la lunghezza del tubo è finita e pari a L i valori di k sono fissati dalle condizioni agli estremi e le frequenze proprie si ricavano dalla (9.11); nella maggior parte degli strumenti a fiato con tubo cilindrico il raggio del tubo è molto minore della sua lunghezza e l'unico modo rilevante è quello con $m = 0, n = 0$ per cui la pressione non ha dipendenza angolare né radiale e quindi la relazione tra frequenza e numero d'onde è quella semplice $\omega = kc$.

Quella che abbiamo presentato è la trattazione elementare, che però è imprecisa perché non tiene conto del fatto che al di là dell'estremità aperta del tubo in $x = L$ c'è un ambiente di una certa forma attraverso il quale l'onda sonora dovrà propagarsi, e che nell'origine c'è inevitabilmente un accoppiamento con il meccanismo di eccitazione, rappresentato da un'ancia o da un getto d'aria. È necessario allora considerare le soluzioni dell'equazione delle onde anche in queste regioni e raccordarle opportunamente con quella all'interno del tubo, tenendo presente che sia la pressione che la velocità acustica devono essere funzioni continue nei punti di transizione tra una regione e l'altra. Ricordando che la pressione e la velocità sono legate l'una all'altra dall' impedenza utilizziamo questa grandezza per riformulare il problema. Abbiamo visto che l'impedenza, come è stata definita all'inizio di questo capitolo, $z = \rho c$,è una proprietà del mezzo; conviene definire una nuova impedenza che tenga conto anche della sezione S del tubo, ponendo $Z = z/S$: ne segue che nell'ambiente esterno, schematizzato come un tubo di sezione infinita, l'impedenza è zero, mentre all'estremità chiusa di un tubo l'impedenza è infinita. Quando l'impedenza cambia bruscamente, come accade ad esempio se due tubi di sezione diversa sono giuntati senza un raccordo, oppure se cambia la natura del fluido, come nel passaggio tra l'orecchio medio (aria) e quello interno (acqua), a un'onda progresssiva nel primo mezzo si associa necessariamente un'onda riflessa, oltre all'onda trasmessa nel secondo mezzo.

Siano allora Z_1 e Z_2 le impedenze dei due mezzi e collochiamo l'origine dell'asse x nel punto di discontinuità; se un'onda piana arriva da sinistra possiamo scrivere

$$p_1(x) = A\exp(-ikx) + B\exp(ikx), \quad p_2(x) = C\exp(-ikx) : \tag{9.12}$$

l'uguaglianza delle pressioni e delle velocità nell'origine fornisce le due condizioni

$$A + B = C, \quad \frac{A - B}{Z_1} = \frac{C}{Z_2}, \tag{9.13}$$

dacui si ricava la relazione tra le ampiezze delle onde riflessa, trasmessa e incidente:

$$\frac{B}{A} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}, \quad \frac{C}{A} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}; \tag{9.14}$$

si possono osservare due cose: l'onda riflessa è in fase o in controfase rispetto all'onda incidente secondo che Z_2 sia maggiore o minore di Z_1; se le due impedenze sono molto diverse (in qualunque senso), la riflessione è quasi totale. È interessante osservare che nel caso in cui $Z_2 >> Z_1$ l'ampiezza dell'onda trasmessa tende al doppio di quella incidente, mentre nel caso contrario tende a zero: il risultato sembra paradossale, ma se esaminiamo il flusso dell'energia, pari al prodotto della pressione per la velocità, ci rendiamo conto che il rapporto tra la potenza riflessa o trasmessa e quella incidente è dato da

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{(Z_2 - Z_1)^2}{(Z_2 + Z_1)^2}, \quad \frac{I_t}{I_i} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_2 + Z_1)^2} \qquad (9.15);$$

al crescere di Z_2 la potenza trasmessa tende a zero, e questo va bene, ma tende a zero anche quando Z_2 tende a zero e questo è contraddetto dall'esperienza che un tubo aperto trasmette energia nell'ambiente esterno: vuol dire che non è corretto considerare nulla l'impedenza dell'ambiente esterno. Diciamo allora che questa va calcolata tenendo conto della forma dell'ambiente e che il risultato è in generale una funzione complessa della frequenza e del raggio a del tubo, che però ha un comportamento relativamente semplice per $ka < 1$: in tal caso la parte reale dell'impedenza è proporzionale a $(ka)^2$, mentre la parte immaginaria è proporzionale a ka; in ogni caso chiameremo d'ora in poi Z_L l'impedenza all'estremo del tubo.

Se chiamiamo $Z_o = \rho c/S$ l'impedenza caratteristica del tubo il rapporto tra l'ampiezza riflessa e quella incidente è

$$\frac{B}{A} = e^{-2ikL}\frac{(Z_L - Z_o)}{(Z_L + Z_o)}; \qquad (9.16)$$

utilizzando questa relazione possiamo calcolare il rapporto tra pressione e velocità in $x = 0$, ottenendo l'impedenza d'ingresso

$$Z_{in} = Z_o\frac{(A+B)}{(A-B)} = \frac{Z_o(Z_L coskL + iZ_o \sin kL)}{(iZ_L \sin kL + Z_o \cos kL)}. \qquad (9.17)$$

Per trovare le frequenze proprie del tubo, oltre a conoscere l'impedenza d'uscita occorre conoscere il meccanismo di eccitazione: infatti se il tubo viene eccitato come un flauto, cioè l'estremo d'entrata viene considerato aperto, allora le frequenza proprie sono quelle che corrispondono ai minimi del modulo dell'impedenza d'ingresso; se invece l'eccitazione avviene per mezzo di un'ancia le frequenze proprie sono quelle che corrispondono ai massimi del modulo dell'impedenza d'ingresso: nei casi limite di $Z_L = \infty$ e $Z_L = 0$ si ritrovano i risultati già trovati con il metodo elementare; mentre considerare infinita l'impedenza di un tubo chiuso è corretto, porre uguale a zero quella del tubo aperto è un'approssimazione non valida: una migliore approssimazione, valida per tubi cilindrici lunghi e stretti, in cui cioè $ka << 1$, almeno per il fondamentale, si ottiene osservando che l'impedenza d'uscita è puramente immaginaria e pari a quella di un tubo corto, idealmente aperto, di lunghezza un po' inferiore al suo raggio; si può allora sostituire alla lunghezza del tubo una lunghezza efficace $L_{eff} = L + \epsilon a$ dove ϵ varia tra 0.6 e 0.9 a seconda della forma dell'ambiente in prossimità dell'estremità del tubo.

Per i tubi non cilindrici, che esamineremo nel prossimo paragrafo, si possono fare le stesse considerazioni, tenendo presente che le soluzioni dell'equazione delle onde non sono più onde piane, ma la loro forma dipende dalla forma del tubo: sono comunque combinazioni lineari di una onda progressiva e di una regressiva (le due soluzioni indipendenti di un'equazione del secondo'ordine), e nei punti di discontinuita' dell'impedenza la pressione e la velocità devono essere continue.

Molti strumenti a fiato si basano su tubi non cilindrici, cioè a sezione variabile, per i quali l'equazione delle onde assume una forma diversa, per tener conto della dipendenza della sezione del tubo dalla sua distanza dall'imboccatura. Per semplificare la trattazione eliminiamo la dipendenza angolare e radiale della pressione e supponiamo che il fronte d'onda sia ovunque piano, anche se questa approssimazione non è certamente corretta nei punti in cui la sezione varia molto rapidamente, come per esempio nella parte finale di un corno; beninteso il fatto che il tubo, per ragioni pratiche, sia arrotolato, è irrilevante e quindi possiamo assumere un asse x lungo l'asse del tubo e considerare semplicemente l'area della sezione $S(x)$ e supporre che essa si mantenga circolare lungo tutto il tubo.

La variazione di volume che avviene durante lo spostamento dell'aria contenuta in un fetta del tubo non dipende soltanto dai diversi spostamenti delle due facce, ma anche dalla corrispondente variazione della sezione: pertanto l'equazione delle onde per la pressione diventa

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x}\left(S\frac{\partial p}{\partial x}\right); \tag{9.18}$$

se si pone

$$p = \psi S^{-1/2}, \tag{9.19}$$

e si introduce, come al solito una dipendenza temporale del tipo $e^{i\omega t}$, si ottiene per la ψ l'equazione

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{2S}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{1}{4S^2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2\right]\psi = 0. \tag{9.20}$$

L'area della sezione, supposta di forma circolare e di raggio $a(x)$ si può scrivere come $S(x) = \pi a^2(x)$, e la (9.20) assume la forma particolarmente semplice

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left[k^2 - \frac{1}{a(x)}\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right]\psi = 0, \tag{9.21}$$

dalla quale si deduce che è possibile la propagazione solo se il termine in parentesi quadre è maggiore di zero: esiste cioè una frequenza di taglio, dipendente da x, al disotto della quale la propagazione delle onde non può avvenire.

Ci sono alcuni casi particolarmente semplici per i quali l'equazione è di immediata soluzione, e sono quelli in cui il raggio del tubo dipende linearmente da x, e quindi la sua derivata seconda si annulla (tubo cilindrico e tubo conico), e quelli in cui la derivata seconda del raggio è proporzionale al raggio stesso, in modo che il termine in parentesi quadre sia costante; in tutti questi casi la soluzione per la ψ è data da una combinazione lineare di seni e coseni, dalla quale si può ottenere l'andamento della pressione per mezzo della (9.19) e successivamente imporre le condizioni agli estremi.

Esaminiamo ora alcuni di questi casi, cominciando dal più semplice, che è quello del tubo conico in cui si può porre $a(x) = a_o + gx$ e la pressione si ottiene dalla (9.19) nella forma

$$p(x) = \frac{A \sin kx + B \cos kx}{\sqrt{\pi}(a_o + gx)}; \tag{9.22}$$

per trovare le frequenze proprie, o gli autovalori del numero d'onde k occorre imporre le condizioni agli estremi: per rendere più semplice la trattazione le imporremo nel modo elementare, considerando gli estremi aperti o chiusi, senza tener conto degli accoppiamenti con l'ambiente esterno e con il generatore dell'eccitazione, visto che la cosa più interessante è il confronto con il tubo cilindrico trattato nello stesso modo. Supponiamo allora che nell'origine vi sia un'ancia (il che equivale a considerare chiuso l'estremo) e all'altra estremità, in $x = L$ il tubo sia aperto; dev'essere allora $p'(0) = p(L) = 0$ da cui si ricava $B = Aka_o/g$ e $\tan kL = -ka_o/g$; l'ultima equazione, da cui si possono ricavare graficamente i numeri d'onda, fornisce i multipli dispari del fondamentale nel limite di $g = 0$ (tubo cilindrico), e dei valori più grandi (più piccoli) (specie per i più bassi), secondo che g è positivo (tubo che si allarga) o negativo (tubo che si restringe). Se teniamo presente il fatto che un tubo cilindrico trattato in modo rigoroso fornisce uno spettro non perfettamente armonico, soprattutto se la sua larghezza non è trascurabile, renderlo leggermente conico può essere un modo per cooreggere l'inarmonicità. Se entrambi gli estremi sono aperti troviamo semplicemente $B = 0{=}kL = n\pi$, mentre nel caso aperto-chiuso, come potrebbe essere una canna d'organo tappata si ha ancora $B = 0$ ma $\tan kL = k(a_o + gL)/g$ che è simile al primo caso, a parte il segno.

Se $a'' = \lambda a(x)$ il raggio del tubo ha l'andamento

$$a(x) = C_+ \exp(\sqrt{\lambda}x) + C_- \exp(-\sqrt{\lambda}x) \tag{9.23}$$

se $\lambda > 0$; la $\psi(x)$ ha ancora un andamento sinusoidale, per cui si può porre

$$p(x) = \frac{A \sin \mu x + B \cos \mu x}{a(x)}, \quad \mu^2 = k^2 - \lambda, \qquad (9.24),$$

da cui si deduce che il numero d'onde dovrà sempre essere maggiore di λ per assicurare la propagazione; supponendo la configurazione chiuso-aperto si ottiene la condizione

$$\tan \mu L = -\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \frac{C_+ + C_-}{C_+ - C_-}; \tag{9.25}$$

se $\lambda < 0$ il raggio del tubo può essere scritto nella forma $a(x) = b \sin(\sqrt{-\lambda} \quad x + \phi)$; l'equazione che fornisce gli autovalori è

$$\tan \mu L = -\frac{\mu}{\sqrt{-\lambda}} \tan \phi; \tag{9.26}$$

come si vede la (9.25) e la (9.26) hanno un aspetto molto simile, però bisogna ricordare che nel secondo caso si ha $\mu^2 > k^2$ e quindi c'è sempre propagazione delle onde.

Un altro andamento interessante per il raggio del tubo è quello del tipo $a(x) = bx^{-\epsilon}$, che include il caso cilindrico per $\epsilon = 0$, e quello conico per $\epsilon = -1$; il rapporto tra la derivata seconda del raggio e il raggio vale $\epsilon(\epsilon+1)/x^2$ e l'equazione per la ψ diventa

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left(k^2 - \frac{\epsilon(\epsilon+1)}{x^2} \right) \psi = 0, \tag{9.27}$$

che è un'equazione di Bessel, da cui il nome di Corni di Bessel dato ai tubi di questo tipo. Le soluzioni per la pressione sono del tipo

$$p(x) = x^{\epsilon+1/2}[AJ_{\epsilon+1/2}(x) + BN_{\epsilon+1/2}(x)], \tag{9.28}$$

dove J, N sono rispettivamente le funzioni di Bessel e di von Neumann, e le costanti A e B e il numero d'onde k vengono determinati dalle condizioni agli estremi.

Nei veri strumenti a fiato l'andamento del raggio non è sempre esprimibile in modo univoco: in molti casi infatti, specie negli ottoni, il tubo è per un lungo tratto cilindrico e poi si immette nella cosiddetta campana che ha spesso un andamento alla Bessel. Il problema viene affrontato per sezioni e poi si impongono condizioni di continuità alle giunzioni.

A conclusione di questo paragrafo val la pena di svolgere alcune considerazioni sulla rilevanza musicale della forma del tubo e dell'interesse di una trattazione fisico-matematica rigorosa: come abbiamo visto lo spettro delle frequenze proprie di un tubo dipende dalla sua forma e dal meccanismo di eccitazione, ma quali sono le frequenze effettivamente emesse quando vien suonato? Per rispondere a questa domanda occorre distinguere tra gli strumenti a getto d'aria e quelli ad ancia. Nei primi il getto d'aria, urtando contro un opportuno ostacolo che precede l'ingresso nel tubo, genera un flusso vorticoso che contiene uno spettro continuo di frequenze che vien filtrato selettivamente dal tubo, privilegiando le sue frequenze proprie, per cui il suono che viene emesso le contiene in linea di principio tutte, con dei pesi che in pratica ne rendono udibile un numero ristretto a partire da quella fondamentale; variando la lunghezza efficace del tubo, per esempio con dei fori praticati sulle pareti, si possono produrre numerosi suoni, con caratteristiche timbriche simili e frequenze controllate dalla posizione dei fori; è importante quindi che le frequenze proprie del tubo siamo il più possibile armoniche. Negli strumenti ad ancia invece il tubo è accoppiato a questa in modo non lineare e il risultato è una vibrazione dell'ancia e della colonna d'aria ad una frequenza che è il risultato della cooperazione tra i due sistemi: quel che è importante è che l'ancia vibra con una certa frequenza e con i suoi armonici, ed è opportuno che il tubo sia configurato in modo tale da filtrarne un certo numero, altrimenti lo strumento non avrebbe il timbro desiderato; anche in questo caso l'uso dei fori permette ad un unico tubo di produrre suoni diversi. Negli strumenti ad ancia labiale (trombe e affini), oltre alle valvole che permettono di variare la lunghezza del tubo, c'è la possibilità di utilizzare un grande numero di frequenze proprie, in contrapposizione alle due o tre che si possono ricavare da un flauto aumentando l'intensità del getto (in parole povere soffiando più forte): se queste frequenze non sono, almeno approssimativamente, in successione armonica, l'uso musicale dello strumento diventa problematico, e questo spiega perché tanta cura venga posta nello studio della forma del tubo. Le ultime piccole correzioni, se necessario, vengono effettuate dall'esecutore, che in certi casi, per esempio nel corno, può modificare la lunghezza efficace del tubo introducendo una mano nella campana.

Il caso dei tubi di sezione variabile ci ha mostrato un tipo di equazione delle onde a coefficienti non costanti, del tipo

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + k^2(x) f(x) = 0 : \tag{9.29}$$

quest'equazione si presenta ogni volta che le caratteristiche del mezzo in cui l'onda si propaga non sono omogenee, come per esempio una corda a sezione variabile, un fluido a densità o temperatura variabili, ecc. È interessante discutere una proprietà generale delle soluzioni di quest'equazione. La $f(x)$, supposta complessa, può essere sempre scritta come prodotto di un'ampiezza reale $A(x)$ per un fattore di fase $\exp(i\phi(x))$; la sua derivata seconda è

$$f'' = (A'' + 2i\phi' A' + i\phi'' A - \phi'^2 A) e^{i\phi} \tag{9.30}$$

e la (9.29) diventa

$$A'' - \phi'^2 A + k^2 A + i(2\phi' A' + \phi'' A) = 0; \tag{9.31}$$

la parte immaginaria è indipendente dalla disomogeneità del mezzo e pertanto il suo annullamento esprime una proprietà generale, che si ricava facilmente osservando che

$$2\phi' A' + \phi'' A = \frac{1}{A} \frac{d}{dx} (\phi' A^2); \tag{9.32}$$

l'integrale primo che ne risulta è

$$\phi' A^2 = costante; \tag{9.33}$$

utilizzando la (9.33) la parte reale della (9.31) assume la forma non lineare

$$A'' - \frac{costante}{A^3} + k^2(x) A = 0; \tag{9.34}$$

se si riesce a risolverla allora la fase $\phi(x)$ si ricava integrando la (9.33). Tenendo presente che $d\phi/dx$ rappresenta il numero d'onde locale e A^2 l'intensità dell'onda, il significato della (9.33) è la costanza del prodotto del numero d'onde per l'intensità, che mostra un'analogia con la costanza della portata di un fluido incompressibile, se si fa corrispondere il numero d'onde alla velocità e l'ampiezza al raggio del condotto.

Anche se non siamo entrati nei dettagli dell'eccitazione della colonna d'aria all'interno di un tubo sonoro abbiamo sempre visto strumenti in cui l'eccitazione avveniva ad un estremo del tubo. Voglio ora presentare un esempio di eccitazione distribuita su tutta la lunghezza del tubo, al quale non corrisponde uno strumento ufficiale, ma un oggetto curioso dotato di una notevole efficienza acustica: si tratta del "corrugato" cioè di quel tubo di plastica usato dagli elettricisti per mettere sotto traccia i cavi, il quale ha un diametro medio che può variare da un centimetro a un decimetro (circa), e presenta delle ondulazioni che, nei tubi di diametro centimetrico hanno un'ampiezza di un paio di millimetri e una lunghezza d'onda di poco superiore. Se si prende un tubo del genere e lo si taglia a una lunghezza di un paio di metri è possibile produrre suono in due modi: il primo, quello comune ad un tubo senza ondulazioni, consiste nel soffiare "attraverso" un'estremità, e in questo caso il suono è simile a quello prodotto dal tubo liscio; il secondo, che in un tubo liscio non produrrebbe alcun suono, è quello di soffiarci "dentro": il getto d'aria incontra le ondulazioni, e ognuna di esse dà origine ad un flusso vorticoso che viene poi filtrato selettivamente dal tubo; visto che in un tubo di due metri ci possono essere anche 500 ondulazioni, ci sono altrettante sorgenti e questo amplifica enormemente l'efficienza acustica del corrugato, che è in grado di produrre un suono chiaramente udibile anche con un soffio debolissimo, qualè quello che si ottiene facendo ruotare il tubo sopra la testa ad una velocità di circa un giro al secondo; la differenza di pressione tra l'estremo fermo e quello in rotazione è sufficiente ad assicurare un flusso d'aria capace di generare il suono; inoltre, mentre in un normale tubo è possibile eccitare il fondamentale e uno o due armonici, in ogni caso uno alla volta, a meno di non essere un abile flautista che riesce a produrre due suoni simultaneamente, con il corrugato è possibile eccitare numerosi armonici, semplicemente soffiando più forte: man mano che la pressione aumenta gli armonici effettivamente eccitati corrispondono a numeri d'ordine sempre più alti e quindi anche più vicini: perciò il suono, oltre a diventare molto più forte, diventa meno gradevole, a causa della sovrapposizione tra suoni che formano intervalli sempre meno consonanti. Credo che sia questo il meccanismo del barrito degli elefanti, visto che la proboscide è un tubo che, per la sua flessibilità e estensibilità, non può non avere delle ondulazioni sulla superficie interna, che agiscono sul getto d'aria proprio come le ondulazioni del corrugato, producendo una molteplicità di sorgenti.