

7 - Sbarre, lamine e piastre

Le corde e le membrane che abbiamo descritto nei precedenti paragrafi erano, nella loro schematizzazione, infinitamente estensibili e flessibili; esaminiamo ora la situazione opposta, quella cioè dei corpi rigidi (ma non infinitamente rigidi), anch'essi utilizzati in ambito musicale, sia come strumenti a percussione (xilofoni, campane, gong) sia come strumenti eccitati per sfregamento, da parte di un getto d'aria, come nella fisarmonica, o da parte dell'archetto, come nella sega armonica. I corpi rigidi sono caratterizzati da una forma, alla quale tendono a ritornare quando vengono deformati, e da un parametro, che misura la forza con la quale reagiscono alle deformazioni. La descrizione delle deformazioni è abbastanza complessa, perché ogni elemento infinitesimo può essere compresso, flessione, torto, traslato, e quindi occorre introdurre il tensore delle deformazioni, al quale corrisponde il tensore degli sforzi; i vari tipi di deformazione comportano reazioni diverse da parte del reticolo cristallino, secondo che i piani reticolari vengano avvicinati o allontanati, piegati o ruotati. Le deformazioni che ci interessano quando un corpo rigido viene eccitato e produce un suono sono in genere molto piccole, anche se le forze in gioco possono essere invece molto grandi; le deformazioni possono però diventare grandi in quei corpi rigidi particolarmente sottili (lamine e corde) che possono sopportarle senza oltrepassare i limiti di elasticità; talvolta accade anche che solo particolari modalità di eccitazione risultino interessanti dal punto di vista musicale.

Un primo esempio può essere quello di una lamina molto sottile, di forma rettangolare, con un lato molto più lungo dell'altro, come le lamine della fisarmonica o dell'armonica a bocca, il cui spessore è dell'ordine del decimo di millimetro, mentre la larghezza e la lunghezza sono rispettivamente dell'ordine del millimetro e del centimetro: in questa circostanza, se l'unica deformazione è la flessione del lato lungo, ma non di quello corto, e in assenza di torsione e di dilatazione, la lamina può essere assimilata ad un oggetto unidimensionale di lunghezza L , di spessore s e densità lineare μ , che tiene conto anche della sua larghezza: su questa lamina definiamo una coordinata x e uno spostamento $z(x, t)$ perpendicolare alla sua superficie per il quale vogliamo trovare l'equazione del moto. Per capire quali forze si esercitano sulla lamina in seguito alla deformazione facciamo un'immagine ingrandita e osserviamo che, in caso di deformazione ci sarà una linea, detta linea neutra, in cui gli elementi del reticolo cristallino mantengono la loro distanza di riposo, mentre da una parte e dall'altra di questa linea gli elementi subiranno un avvicinamento o un allontanamento, in seguito ai quali si svilupperanno delle forze tendenti a ristabilire la configurazione di riposo: se la lamina si trova in una configurazione dotata di curvatura gli elementi saranno tanto più allontanati (o avvicinati) quanto più sono distanti dalla linea neutra; per ciascuno di questi filamenti, distanti ξ dalla linea neutra, ci sarà una forza, proporzionale all'allontanamento che vale $\xi d\phi$ dove ϕ è l'angolo di flessione dell'elemento infinitesimo, proporzionale alla derivata seconda dello spostamento: dunque ogni elemento produce un momento rispetto alla linea neutra $dM = -E\xi^2\mu(\xi)\partial^2 z/\partial x^2$, dove E è il modulo di Young; integrando su tutto

lo spessore si ottiene per il momento flettente $M = -EK^2 \partial^2 z / \partial x^2$, dove K^2 è il cosiddetto raggio di girazione, che tiene conto della geometria della lamina (o sbarra che sia); alla differenza tra i momenti a destra e a sinistra dell'elemento dx della sbarra corrisponde una forza diretta perpendicolarmente all'asse x , e la derivata di questa forza rispetto a x costituisce la forza netta che agisce sull'elemento di sbarra, per il quale si può infine scrivere l'equazione del moto

$$\mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -EK^2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4}; \quad (7.1)$$

anche in questo caso si risolve l'equazione per separazione delle variabili ponendo $z(x, t) = X(x)T(t)$; la dipendenza temporale è come al solito oscillante con pulsazione ω mentre la parte spaziale soddisfa l'equazione

$$X_{xxxx} - \frac{\omega^2 \mu}{EK^2} X = 0; \quad (7.2)$$

scegliendo soluzioni del tipo $X(x) = Ae^{\gamma x}$ si ottengono per γ le quattro radici

$$\gamma = \pm i \left(\frac{\omega^2 \mu}{EK^2} \right)^{1/4}; \quad \gamma = \pm \left(\frac{\omega^2 \mu}{EK^2} \right)^{1/4}. \quad (7.3)$$

Osserviamo innanzitutto che la relazione tra γ e ω non è lineare, per cui la velocità di propagazione delle onde dipende dalla frequenza: il sistema cioè è dispersivo. Le quattro soluzioni esponenziali possono essere riscritte nella forma di due soluzioni indipendenti oscillanti, del tipo seno o coseno come per la corda, più altre due non oscillanti, del tipo seno iperbolico o coseno iperbolico, per cui la soluzione generale è una combinazione lineare di queste quattro soluzioni indipendenti, con i coefficienti e il valore di γ , considerato ora come il comune modulo delle quattro radici, determinati dalle condizioni agli estremi: queste ora sono quattro, poiché la (7,2) è un'equazione del quart'ordine, e possono riguardare i valori della soluzione e delle sue derivate fino alla terza.

$$z(x, t) = \cos(\omega t + \phi) [A \cosh \gamma x + B \sinh \gamma x + C \cos \gamma x + D \sin \gamma x]. \quad (7.4)$$

Ogni estremo può essere libero, e in tal caso si annullano le derivate seconda e terza, può essere fisso ma libero di ruotare, e in tal caso si annullano la funzione e la derivata seconda, e infine può essere incastrato, nel qual caso si annullano la funzione e la derivata prima. Si danno in totale sei casi, tre simmetrici, con condizioni uguali ai due estremi, e tre asimmetrici. I casi usati musicalmente sono quello libero-libero, tipico degli xilofoni, e quello incastrato-libero, tipico delle lamine delle fisarmoniche; per completezza tuttavia discutiamo tutti i sei casi.

Iniziamo con i casi simmetrici in cui le condizioni sono le stesse ai due estremi; conviene allora sfruttare la simmetria collocando i due estremi in $x = \pm L/2$ e discutendo separatamente le soluzioni pari (coseno e coseno iperbolico) e quelle dispari (seno e seno iperbolico). Il caso più semplice è quello in cui gli estremi sono

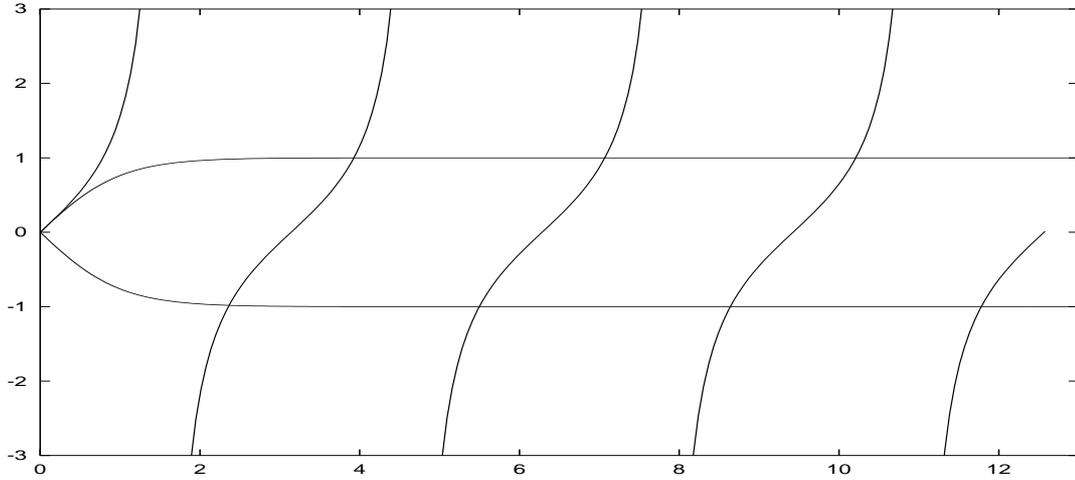


Fig. 1: Soluzioni grafiche dell'equazione $\tan x = \pm \tanh x$.

appoggiati: allora la condizione che in $L/2$ si annullino X e X_{xx} porta al risultato $\gamma L = (2n + 1)\pi$ per le soluzioni pari, del tipo $\cos \gamma x$, e a $\gamma L = 2n\pi$ per le soluzioni dispari, del tipo $\sin \gamma x$; dalla relazione (7.3) si ricavano le frequenze dei modi normali, che sono proporzionali ai quadrati dei numeri interi.

Nel caso invece in cui entrambi gli estremi siano liberi si ottiene la condizione $\tan(\gamma L/2) = \pm \tanh(\gamma L/2)$, dove il segno positivo (negativo) vale per le soluzioni dispari (pari): si tratta di un'equazione trascendente, la cui soluzione grafica è proposta nella Fig.1 dove si vede che le intersezioni q_n sono molto vicine ai valori $\gamma L/2 = (2n + 1)\pi/4$, e i rapporti tra i coefficienti della (23) sono $A/C = -\sin(q_n)/\sinh(q_n)$ per le soluzioni pari e $B/D = \sin(q_n)/\sinh(q_n)$ per quelle dispari; le frequenze sono all'incirca proporzionali ai quadrati dei numeri dispari.

Quando entrambi gli estremi sono incastrati le condizioni di annullamento della X e della sua derivata prima X_x conducono ad una relazione identica al caso libero-libero; risultano invece scambiati i segni dei rapporti tra i coefficienti, cioè c'è il segno più per le soluzioni pari e il segno meno per quelle dispari.

Nei casi asimmetrici conviene porre un estremo nell'origine, visto che la soluzione non ha più una simmetria rispetto al punto di mezzo; il primo caso è quello di maggior interesse musicale (fisarmonica e simili) in cui la sbarra ha un estremo, quello nell'origine, incastrato e l'altro libero. Utilizzando la forma completa della soluzione (7.4), dalle due condizioni nell'origine si ottiene $A + C = 0$, $B + D = 0$, mentre le condizioni all'altro estremo danno

$$A(\cosh q + \cos q) + B(\sinh q + \sin q) = A(\sinh q - \sin q) + B(\cosh q + \cos q) = 0, \quad (7.5)$$

dove $q = \gamma L$; con semplici passaggi si ricava $1 + \cosh 2 \cos q = 0$, che equivale alla condizione $\tan^{-1} q/2 = \pm \tanh q/2$, mostrata in Fig.2; il doppio segno deriva da una radice quadrata che compare quando si passa da q a $q/2$.

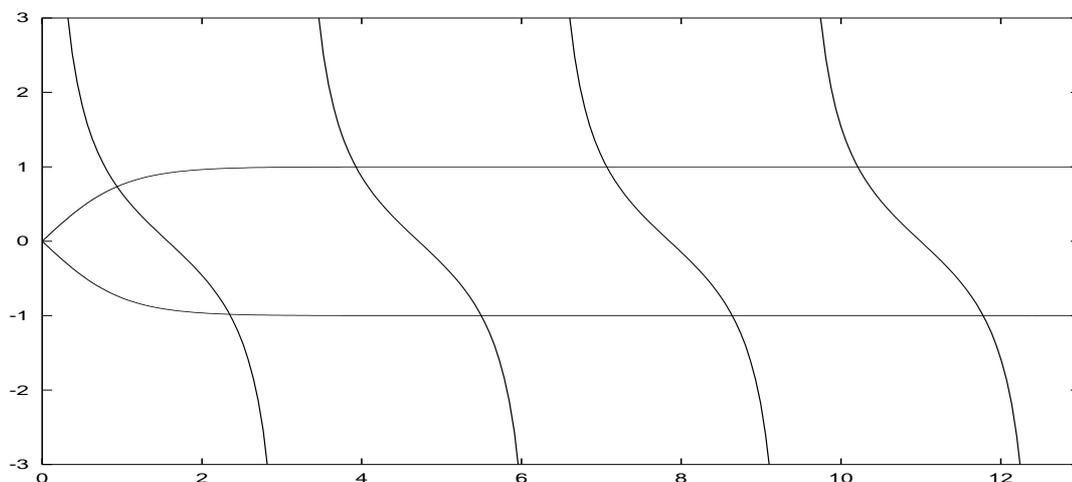


Fig. 2: Soluzioni grafiche dell'equazione $\tan^{-1}x = \pm \tanh x$.

I casi in cui l'estremo nell'origine sia appoggiato e l'altro sia libero o incastrato conducono a risultati simili: infatti in entrambi i casi si ha, per i coefficienti della (7.4) $A+C = 0$, e per γ la condizione $\tanh \gamma L = \tan \gamma L$; la differenza sta nel rapporto tra i coefficienti B e D per i quali vale la relazione $B/D = \pm \sin \gamma L / \sinh \gamma L$; il segno più vale per l'estremo destro libero, il segno meno per l'estremo destro incastrato; entrambi i casi sono rappresentati graficamente nella parte positiva di Fig.1.

La fisica matematica delle piastre, cioè di quei corpi rigidi in cui solo una dimensione è molto più piccola delle altre due, è analoga a quella delle sbarre, ma nello stesso tempo più complessa, sia per la varietà delle forme possibili per una piastra e il conseguente numero delle condizioni al contorno, ma anche per il diverso comportamento rispetto alle deformazioni: mentre una sbarra (lunga e sottile) può solo flettersi (o essere compressa o torta, ma questi modi non sono rilevanti dal punto di vista musicale) una lamina o piastra, nella flessione, può variare o non variare la sua curvatura, e questa, nella configurazione di riposo, può essere nulla o diversa da zero; la resistenza che una piastra oppone alle deformazioni è diversa secondo che ci sia o meno un cambiamento di curvatura. In ogni caso la struttura delle equazioni è simile a quella delle sbarre, con le derivate quarte spaziali e la presenza nelle soluzioni di funzioni circolari e iperboliche; nello stesso tempo lo scenario è molto più ricco, perché la forma di un oggetto bidimensionale può essere qualsiasi: nei casi in cui questa forma permetta di scegliere un sistema di coordinate adeguato a descrivere il contorno la formulazione delle condizioni al contorno è semplice, ma la determinazione delle frequenze dei modi normali richiede sempre la soluzione di equazioni trascendenti, risolubili con tecniche numeriche o grafiche.

Un problema interessante dal punto di vista musicale è quello della corda, già abbondantemente discusso, in cui però non si possa trascurare una certa rigidità del materiale, per esempio l'acciaio armonico delle corde dei moderni pianoforti; lo stesso

problema si pone per le membrane. L'equazione del moto per la corda si arricchisce di un termine con la derivata quarta, e la trattazione può essere fatta in vari modi. Il più elementare è quello perturbativo, che consiste nel valutare il contributo alla frequenza della derivata quarta, valutandolo sulle soluzioni puramente sinusoidali della corda priva di rigidità. Le frequenze dei modi normali, invece di essere multiple intere della frequenza fondamentale, contengono un fattore correttivo che cresce con il quadrato del numero quantico n : questo comporta che il rapporto tra due frequenze non è più armonico, e le conseguenze sull'accordatura degli strumenti, in particolare dei pianoforti, possono essere importanti. Supponiamo infatti di dover accordare due corde che, nominalmente, differiscono di un'ottava: se facciamo in modo che il rapporto tra le fondamentali sia esattamente 2 otterremo un risultato sgradevole; la ragione dipende dalla presenza dei modi normali superiori, in particolare del secondo della nota più bassa che non ha esattamente una frequenza doppia del proprio fondamentale, e quindi produce dei battimenti con il fondamentale della nota superiore; la cura consiste nell'accordare la nota superiore all'unisono con il secondo modo di quella inferiore, eliminando quei battimenti; eventuali altri battimenti tra i modi di ordine superiore non danno fastidio, visto che le loro ampiezze sono molto più piccole.

Il metodo perturbativo, che fornisce dei risultati qualitativamente corretti, si basa sull'ipotesi che le soluzioni spaziali abbiano ancora una forma puramente sinusoidale: questo è vero se, come abbiamo visto trattando la sbarra, le condizioni agli estremi sono compatibili con questa scelta, il che vuol dire che la corda (vista come una sbarra) è appoggiata agli estremi dove si annullano la funzione e la sua derivata seconda: in realtà, se osserviamo attentamente come la corda è fissata agli estremi ci rendiamo conto che è più vicina ad essere incastrata, il che implica invece l'annullamento della derivata prima: le soluzioni quindi devono contenere anche le funzioni iperboliche.

Riscriviamo dunque l'equazione del moto per la corda rigida:

$$\mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - ESK^2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4}, \quad (7.6)$$

dove E è il modulo di Young, K il raggio di girazione e S la sezione della corda; la separazione delle variabili che ci consente di scrivere $z(x, t) = T(t)X(x)$, $T(t) = e^{i\omega t}$ e $X(x) = e^{\lambda x}$, conduce alla relazione

$$-\mu\omega^2 = \tau\lambda^2 - ESK^2\lambda^4; \quad (7.7)$$

questa relazione può essere interpretata in due modi: se si può accettare una soluzione puramente sinusoidale della (7.6) allora il numero d'onde è dato da $\lambda_n = in\pi/L$ e le frequenze dei modi normali sono

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \frac{n\pi}{L} \sqrt{1 + \beta^2 \frac{n^2\pi^2}{L^2}}, \quad \beta^2 = ESK^2/\tau; \quad (7.8)$$

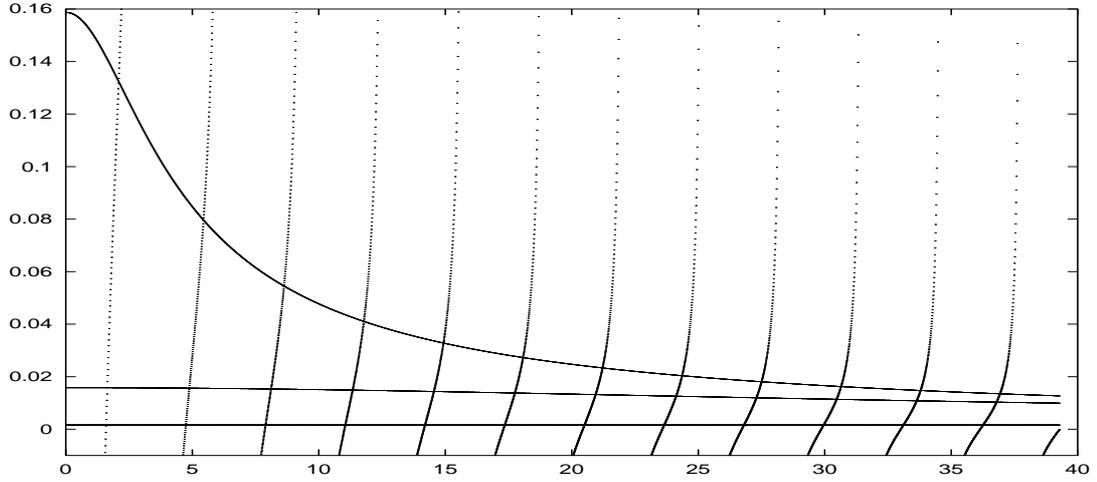


Fig. 3: Soluzioni grafiche dell'equazione $-(\gamma \tan(\gamma))^{-1} = (\delta \tanh(\delta))^{-1}$ valida per le funzioni pari; dal basso in alto: $\beta^2 = 10^{-5}, 10^{-3}, 10^{-1}$.

oppure, come accennato prima, le condizioni agli estremi prevedono l'annullamento della funzione e della sua derivata prima, e allora la (7.7) va letta come un'equazione biquadratica in λ , con due radici reali

$$\delta^2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\beta^2\omega^2\mu/\tau}}{2\beta^2} \quad (7.9a)$$

e due radici immaginarie

$$-\gamma^2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\beta^2\omega^2\mu/\tau}}{2\beta^2}, \quad (7.9b)$$

stavolta di diverso modulo, legate tra loro dalla relazione $\delta^2 - \gamma^2 = 1/\beta^2$.

Se si sfrutta la simmetria delle condizioni agli estremi ponendo l'origine nel centro della corda si possono considerare separatamente soluzioni pari, del tipo $X(x) = A \cos(\gamma x) + C \cosh(\delta x)$ e dispari, del tipo $X(x) = B \sin(\gamma x) + D \sinh(\delta x)$; imponendo l'annullamento della funzione e della sua derivata prima agli estremi si ottengono le condizioni $-\gamma \tan(\gamma L/2) = \delta \tanh(\delta L/2)$, valida per le soluzioni pari e $\gamma_{-1} \tan(\gamma L/2) = \delta_{-1} \tanh(\delta L/2)$, valida per le soluzioni dispari; queste, insieme alla relazione tra γ e δ , permettono di risolvere il problema. Una soluzione di tipo grafico è presentata nelle Figg.3,4, per una corda di lunghezza $L = 2$ e tre valori di β^2 . Una volta trovati i valori di γ e di δ , che sono legati tra loro da una relazione che dipende dal rapporto tra la rigidità e la tensione, si possono ricavare finalmente le frequenze dei modi normali, che tendono quelle della corda ideale o a quelle della sbarra, secondo che quel rapporto tenda a zero o all'infinito.

Nella Fig.5 vengono presentate le frequenze dei primi 24 modi normali per tre valori di β^2 ; si vede chiaramente che per valori piccoli del parametro le frequenze

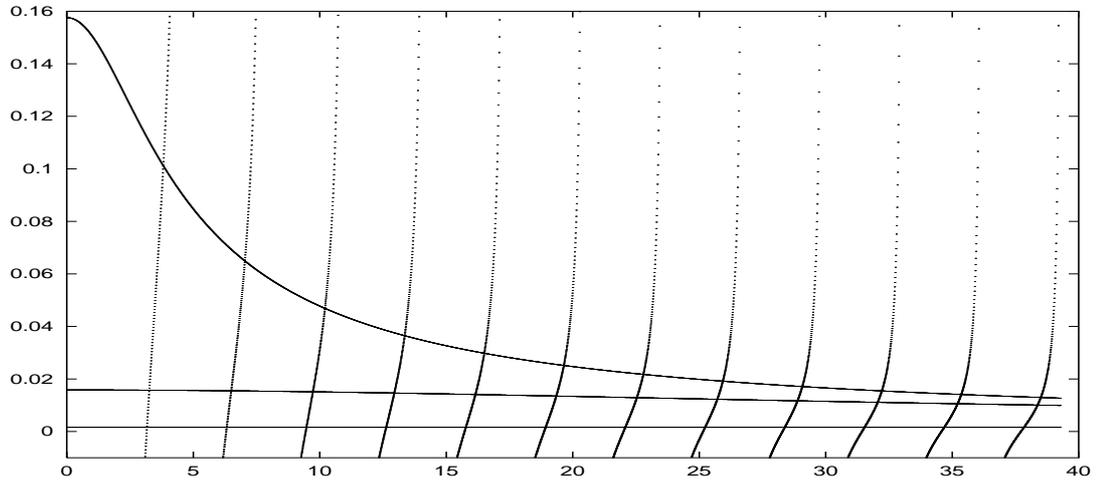


Fig. 4: Soluzioni grafiche dell'equazione $\gamma_{-1} \tan(\gamma) = \delta_{-1} \tanh(\delta)$ valide per le funzioni dispari; dal basso in alto: $\beta^2 = 10^{-5}, 10^{-3}, 10^{-1}$.

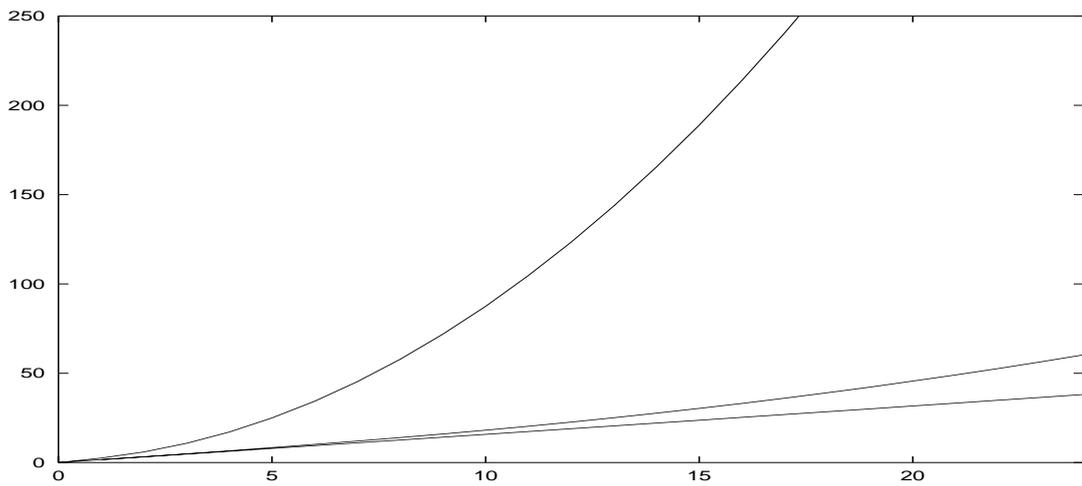


Fig. 5: Frequenze normali per una corda con piccola, media, grande rigidità; dal basso in alto: $\beta^2 = 10^{-5}, 10^{-3}, 10^{-1}$.

cregono linearmente con n , mentre per valori grandi la dipendenza tende ad essere quadratica, come per una sbarra. Nelle corde reali il valore del parametro è sempre molto piccolo, e allora si può cercare una espressione approssimata per la frequenza ω_n che differisce leggermente da quella data nella (7,7).