## 4 - Le membrane musicali

Gli strumenti musicali che utilizzano le membrane come risuonatori sono probabilmente molto più antichi degli strumenti a corda ed appartengono a culture musicali più primitive, anche se il loro uso si è mantenuto fino ad oggi, a causa della loro capacità di marcare gli accenti di una composizione musicale e, talvolta, di rinforzare i suoni più gravi. Gli strumenti a membrana, tamburi, tamburelli, grancasse, timpani, sono infatti strumenti che in seguito all'eccitazione, quasi sempre a carattere percussivo, emettono suoni che solo raramente corrispondono a insiemi di frequenze ben caratterizzate musicalmente.

Dal punto di vista fisico vi sono molte analogie con gli strumenti a corda, ma anche molte differenze: le analogie riguardano la struttura delle forze di richiamo, che si manifestano ogni qual volta la configurazione della membrana, opportunamente tesa, si discosta da quella di equilibrio, che è la configurazione piana, sempre beninteso trascurando la gravità: supponendo, come nel caso della corda che le deformazioni siano piccole, in modo che l'area della membrana non cambi, a meno di infinitesimi del secondo ordine, e che ogni spostamento sia ortogonale al piano di equilibrio, la forza di richiamo, anch'essa ortogonale, è data dalla somma di due contributi, proporzionali alle derivate seconde dello spostamento lungo due direzioni ortogonali: se la tensione superficiale $\tau$ è isotropa la costante di proporzionalità è la stessa, e l'equazione del moto è

$$\sigma \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \tau \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right); \tag{4.1}$$

dove $\sigma$ è la densità superficiale; se invece la tensione dipende dalla direzione allora occorre individuarne le componenti principali, orientare secondo queste gli assi $x, y$ e moltiplicare ogni derivata seconda spaziale della (4,1) per la corrispondente componente della tensione. Val la pena di osservare che, analogamente a quanto visto per la corda, se si prendessero in considerazione gli spostamenti di parti della membrana paralleli al piano $x, y$ l'equazione (4.1) si complicherebbe notevolmente. La struttura dell'equazione (4.1), che è la classica equazione delle onde, rimane la stessa, e le sue soluzioni sono ancora esprimibili come prodotto di una funzione temporale oscillante per una funzione, anch'essa oscillante, delle coordinate spaziali. Qui finiscono le analogie con la corda, perché la bidimensionalità introduce un'enorme variabilità nella forma del contorno, che condiziona le coordinate spaziali: infatti le equazioni spaziali sono risolubili analiticamente in forma semplice solo quando il contorno (o ogni sua porzione) è tale da potere essere rappresentato dalla condizione che una certa coordinata assuma un valore costante: il rettangolo, il settore circolare, il settore iperbolico, tanto per fare alcuni esempi, permettono la risolubilità in coordinate cartesiane, polari, iperboliche.

Un'altra differenza, importante dal punto di vista musicale, è che le frequenze dei modi normali non sono in generale "armoniche" cioè non sono multiple intere della frequenza fondamentale; altrettanto importante è il fatto che, essendo la membrana una superficie, il suo moto è notevolmente ostacolato dall'aria, e quindi le frequenze che troveremo risolvendo la (4,1) sono quelle delle oscillazioni nel vuoto, ma per trovare quelle reali occorre introdurre una correzione non trascurabile.

Vediamo allora il caso più semplice, costituito da una membrana rettangolare, di lati $L_x, L_y$, di densità superficiale $\sigma$, sottoposta ad una tensione isotropa $\tau$, a contorno fisso; val la pena di ricordare che una membrana potrebbe essere fissa in alcune parti del contorno e libera in altre, come ad esempio una vela, quadrata o triangolare, o una bandiera. Scrivendo la soluzione come prodotto di tre funzioni di ciascuna delle variabili $z(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$ e inserendola nella (4,1) si ottiene

$$\frac{X_{xx}}{X} + \frac{Y_{yy}}{Y} - \frac{\sigma}{\tau}\frac{T_{tt}}{T} = 0, \tag{4.2}$$

e da questa la relazione che lega la frequenza ai numeri d'onda

$${k_x}^2 + {k_y}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \tag{4.3}$$

dove $c = \sqrt{\tau/\sigma}$ è la velocità di propagazione delle onde superficiali; se l'origine del piano viene collocata in uno dei vertici del rettangolo le soluzioni hanno la forma $z(x, y, t) = \sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(\omega t + \phi)$; le condizioni al contorno fissano i numeri d'onda e le frequenze proprie:

$$k_x = \frac{m\pi}{L_x}; \quad k_y = \frac{n\pi}{L_y}; \quad \omega_{m,n} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{{L_x}^2} + \frac{n^2}{{L_y}^2}}. \tag{4.4}$$

Per ogni coppia di interi $m, n$, c'è un modo normale, caratterizzato da due famiglie ortogonali di linee nodali, corrispondenti agli zeri delle funzioni seno, parallele ai lati del rettangolo; le Figg.1,2 mostrano le configurazioni di due modi normali.

Come si vede, le frequenze non hanno con quella fondamentale un rapporto intero, e nemmeno razionale, se non in casi molto particolari, che costituiscono comunque un insieme di misura nulla. Un caso interessante è quello della membrana quadrata, in cui si manifesta il fenomeno della degenerazione, di ordine 2, per cui $\omega_{m,n} = \omega_{n,m}$ e i due modi normali hanno la stessa frequenza: anche ogni combinazione lineare dei due modi degeneri ha ancora quella frequenza, solo che in questo caso le linee nodali non sono più segmenti di retta paralleli ai lati del rettangolo, bensì linee curve, come si vede nelle Figg.3,4.

I modi con i due numeri quantici $m, n$ uguali non hanno degenerazione, e sono musicalmente correlati, in quanto le frequenze sono proporzionali ai quadrati dei numeri interi. La loro accettabilità musicale tuttavia è legata alla possibilità di eccitarli selettivamente; infatti la soluzione generale, nella membrana come nella corda, si ottiene per mezzo di una combinazione lineare di modi normali, i cui coefficienti sono determinati dalle condizioni iniziali: il caso è analogo a quello della corda percossa, in cui la posizione iniziale è quella di equilibrio, mentre la velocità iniziale è diversa da zero solo nel punto di percussione; in realtà la percussione non

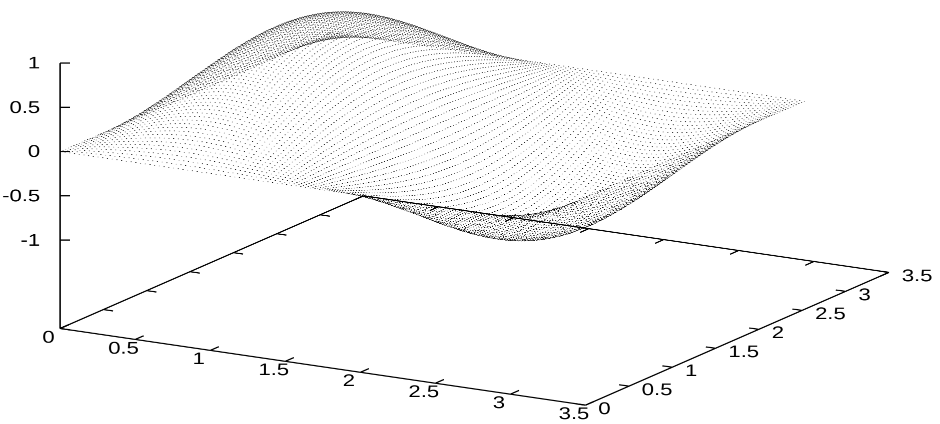


Fig. 1: Configurazione del modo normale m=1,n=2 per una membrana rettangolare.

avviene in un punto, ma in una regione più o meno estesa in funzione della durezza e della grandezza del percussore. Il punto (o la regione) di percussione permette di selezionare i modi normali, in quanto quelli che hanno una linea nodale nel punto di percussione non sono presenti nella combinazione lineare.

Ci si può domandare perché uno strumento a membrana venga eccitato solo con la percussione: l'equivalente della corda pizzicata si potrebbe realizzare pizzicando, se c'è, una parte libera del contorno, oppure applicando una forza in un punto interno della membrana per lasciarla andare, come si fa con le corde della chitarra o del contrabbasso; a parte la difficoltà di compiere un'operazione del genere c'è un argomento fisico-matematico che la rende addirittura impossibile se si vuole avere la stessa schematizzazione della corda. Contrariamente a quello che si può pensare la configurazione della membrana alla quale è applicata una forza in un punto non è un cono con vertice nel punto, bensì una figura che nel punto di applicazione della forza diverge. Prima di esaminare quantitativamente la natura della singolarità voglio mostrare in modo semplice la necessità di un comportamento siffatto: in una configurazione di equilibrio tutte le forze si compensano e se pensiamo ad una membrana circolare con un forza applicata al centro la configurazione avrà certamente una simmetria rotazionale; se consideriamo una corona circolare di spessore infinitesimo, sul suo bordo esterno si esercita una forza uguale ed opposta a quella che si esercita sul bordo interno, ed entrambe le forze sono date dal prodotto della tensione per la lunghezza della circonferenza, che è diversa per i due bordi; man mano che ci si avvicina al centro la lunghezza della circonferenza tende a zero e perciò la tensione deve diventare infinita, come pure l'allungamento della membrana, che supponiamo

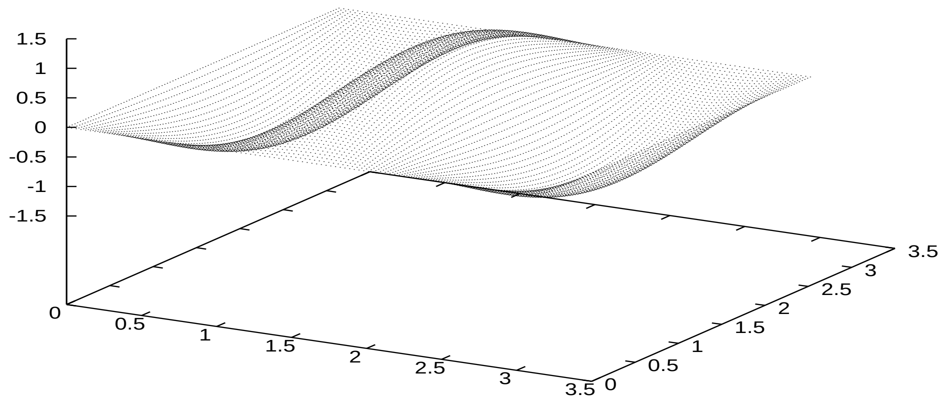


Fig. 2: Configurazione del modo normale m=1,n=3 per una membrana rettangolare.

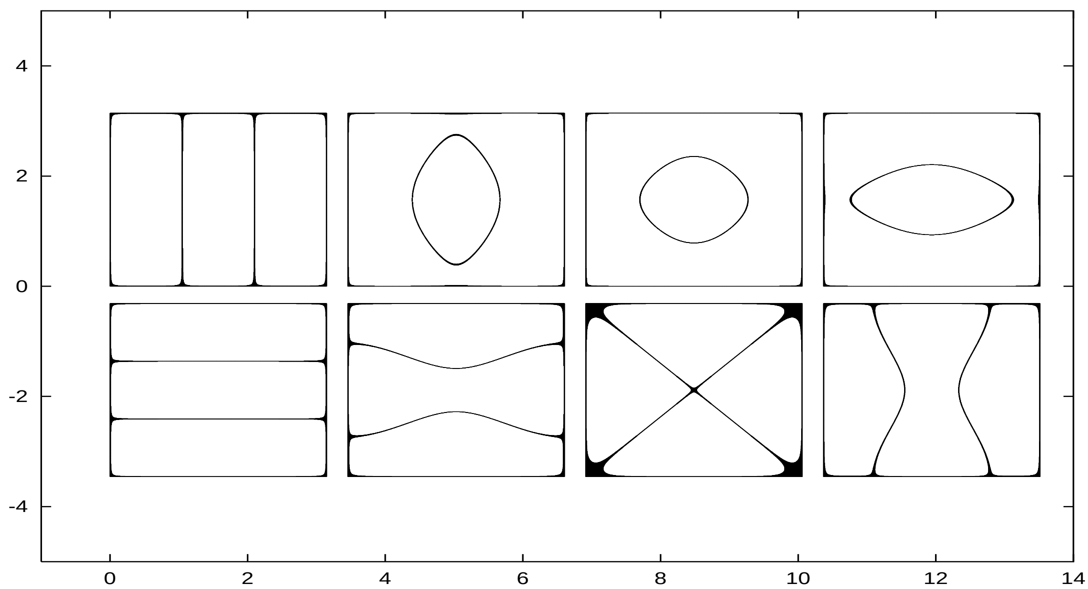


Fig. 3: Linee nodali per varie combinazioni lineari dei modi degeneri 1,3 e 3,1 per una membrana quadrata.

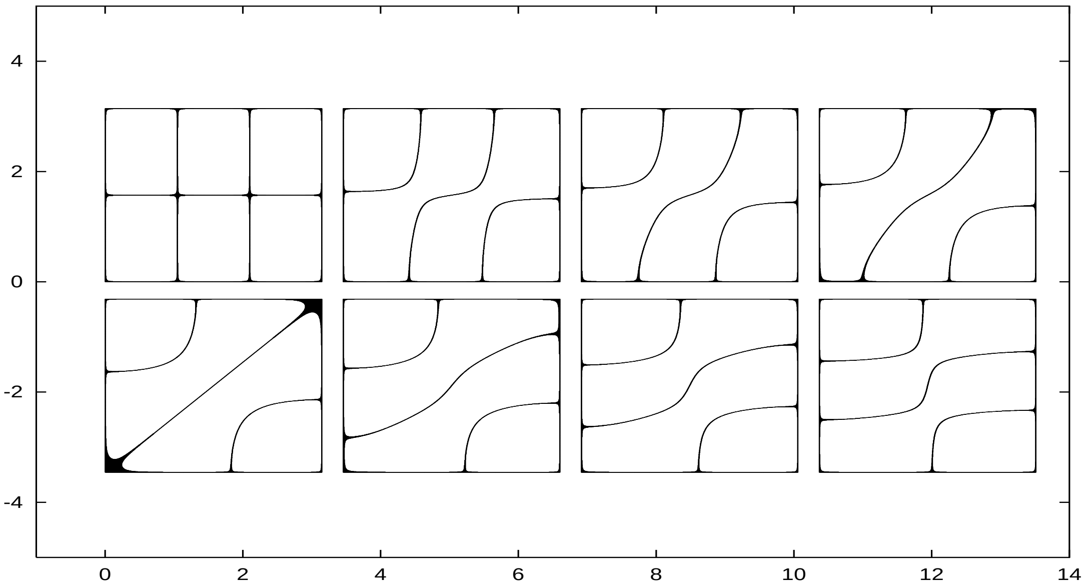


Fig. 4: Linee nodali per varie combinazioni lineari dei modi degeneri 2,3 e 3,2 per una membrana quadrata.

perfettamente elastica.

Vediamo ora come le considerazioni precedenti diventano quantitative: la membrana in questione, che supponiamo fissata a un contorno circolare di raggio $R$, è appesa al centro ed è soggetta alla forza verticale $\mathbf{F}$, che potrebbe essere il peso del contorno, se supponiamo per semplicità che il peso della membrana sia trascurabile; all'equilibrio il peso del contorno, che tende a trascinare la membrana verso il basso, è compensato da una ugual forza applicata al centro: vogliamo determinare la configurazione di equilibrio. Visto che la membrana, come abbiamo anticipato, si deforma in modo non trascurabile, dobbiamo tener conto della relazione tra la forza applicata ad ogni elemento infinitesimo ed il suo allungamento $\delta F = \tau \delta x$. Se fissiamo un sistema di coordinate cilindriche $r, \phi, z$ con origine nel centro della membrana l'allungamento, che è rappresentato dalla funzione $z(r, \phi)$, dipende solo da $r$, per ovvie ragioni di simmetria. In un punto generico $r$ il profilo della membrana forma con il piano orizzontale un angolo $\alpha$ tale che $dz(r)/dr = -\tan\alpha$; in seguito alla deformazione un'elemento $d\phi$ di una corona circolare compresa tra $r$ e $r + dr$ passa da uno spessore $dr$ allo spessore $dr/\cos\alpha$ e quindi il suo allungamento è $dr(1/\cos\alpha - 1)$, al quale corrisponde una forza $dF = \tau r dr d\phi(1/\cos\alpha - 1)$ diretta secondo la tangente alla membrana, la cui componente verticale è $dF_z = \tau r dr d\phi \sin\alpha(1/\cos\alpha - 1)$; integrando su $d\phi$ si ottiene la forza verticale che agisce su tutta la corona $F_z = 2\pi r\tau(\tan\alpha(r) - \sin\alpha(r))$, forza che all'equilibrio deve eguagliare il peso $F$ del contorno. Da questa relazione si ottiene l'elevazione $z(r)$ integrando la $\tan\alpha(r)$ dal contorno $R$ fino al punto generico $r$. In prossimità del centro $\sin\alpha \ll \tan\alpha$ e l'integrazione conduce al risultato $z(r) = -\frac{F}{2\pi\tau}\ln r + cost$, che mostra il carattere logaritmico della singolarità.

In prossimità del bordo invece, se supponiamo l'angolo $\alpha$ molto piccolo, possiamo sviluppare in serie il seno e la tangente ottenendo la relazione $1/2\alpha^3(r) = F/2\pi r\tau$ che ci permette di determinare l'angolo sul contorno $\alpha(R) = (F/\pi R\tau)^{1/3}$. In prossimità del contorno, dove ancora vale l'approssimazione $\tan\alpha = \alpha + \alpha^3/3 + ...$, si ha

$$dz/dr = -\left(\frac{F}{\pi\tau r}\right)^{1/3} - \frac{F}{3\pi\tau r}, \tag{4.5}$$

che integrata da $R$ a $r$ ci dà

$$z(r) = \left(\frac{F}{\pi\tau}\right)^{1/3}\frac{3}{2}\left(R^{2/3} - r^{2/3}\right) + \frac{F}{3\pi\tau}\ln\left(\frac{R}{r}\right); \tag{4.6}$$

entro i limiti di validità dell'approssimazione fatta $r$ è poco diverso da $R$ e $\rho = R - r$ si può considerare infinitesimo e scrivere

$$z(\rho) = \rho\left[\left(\frac{F}{\pi\tau R}\right)^{1/3} + \frac{F}{3\pi\tau R}\right]. \tag{4.7}$$

**5 - I tamburi**

Esaminiamo ora la più diffusa delle membrane musicali, quella circolare, che conviene descrivere per mezzo delle coordinate polari $r, \phi$: l'equazione delle onde, per quel che riguarda la parte spaziale, diventa

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\phi^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}; \tag{5.1}$$

se poniamo $z(r,\phi) = R(r)\Phi(\phi)$ la dipendenza angolare è data da $\Phi(\phi) = \exp(im\phi)$ con $m$ intero, mentre la dipendenza radiale si ottiene integrando l'equazione di Bessel

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(1 - \frac{m^2}{\rho^2}\right)R = 0, \tag{5.2}$$

dove si è introdotta la variabile adimensionale $\rho = r\omega/c$; le soluzioni sono date dalle funzioni di Bessel regolari nell'origine $J_m(\rho)$ con la condizione di annullamento sul contorno: questa condizione fissa la frequenza, perché $\omega R/c$ deve coincidere con uno zero della $m^{ma}$ funzione di Bessel e quindi si ha $\omega_{n,m}R/c =$ l'ennesimo zero della emmesima funzione regolare di Bessel. La soluzione quindi si può scrivere

$$z_{n,n}(r,\phi) = \sin(m\phi)J_m(\omega_{n,m}r/c); \tag{5.3}$$

il numero quantico $m = 0, 1, 2...$ determina il numero dei diametri nodali, mentre $n = 1, 2, 3....$ determina quello dei cerchi nodali, incluso quello sul contorno. Per ogni modo normale la membrana viene divisa in $2mn$ regioni se $m \neq 0$, altrimenti in $n$; le regioni adiacenti oscillano in controfase: per questo motivo nei modi con effettiva dipendenza angolare l'area complessiva delle regioni che si muovono in una direzione è uguale all'area di quelle che si muovono nella direzione opposta; invece per i modi con $m = 0$ le due aree sono diverse.

Questa osservazione qualitativa è importante per valutare l'effetto dell'aria sul movimento della membrana, che viene notevolmente frenata; questo frenamento produce anche una modifica delle frequenze normali, che abbiamo appena calcolato come se la membrana oscillasse nel vuoto. Per valutare questo effetto dobbiamo considerare tre tipi di situazioni, tutte possibili negli strumenti musicali: a)- l'aria è presente in modo simmetrico dalle due parti della membrana (lo strumento è il tamburello), b) l'aria è libera da una parte e contenuta in una cavità dall'altra, cavità che non comunica con l'ambiente esterno (lo strumento è il timpano), c) la cavità, in genere cilindrica, comunica con l'ambiente esterno anche per mezzo di una seconda membrana. La traduzione formale di queste tre situazioni è la seguente: a) la membrana è accoppiata con un gas infinitamente esteso in tutto lo spazio, sistema capace si sostenere tutte le frequenze, b) la membrana è accoppiata da una parte con un gas infinitamente esteso, ma dall'altra con una cavità finita a pareti rigide, e in questo sistema le frequenze risultano quantizzate, c) la membrana è accoppiata, per mezzo della cavità, con una seconda membrana, e infine di nuovo con lo spazio infinito: in questo caso le frequenze quantizzate sono quelle delle due membrane e della cavità, in generale diverse tra loro. Una trattazione rigorosa è lunga e complessa e pertanto mi limito a esporre le inevitabili schematizzazioni, considerando il caso a): la membrana viene schematizzata come un pistone oscillante che agisce sul gas da entrambe le parti; visto che la membrana è finita, per esempio circolare di raggio R, mentre il gas si estende infinitamente, non è semplice definire con precisione la massa di gas coinvolta, ma è possibile valutarne l'ordine di grandezza: la base è ovviamente l'area della membrana $\pi R^2$, mentre l'altezza $h$ viene stimata pensando che il coinvolgimento riguardi una mezza lunghezza d'onda $\lambda$, che si ottiene dividendo la velocità del suono nell'aria $C_a$ per la frequenza delle oscillazioni della membrana $f = \omega/2\pi$: si ottiene dunque per il volume di aria coinvolto $V = 2\pi^2 R^2 C_a/\omega$; dato che gli effetti di bordo dipendono dalla forma della membrana si introduce un fattore di forma da calcolare con tecniche rigorose, o da misurare sperimentalmente. Moltiplicando tale volume efficace per la densita dell'aria $\mu$ (a quella temperatura e pressione) si ottiene una massa che si aggiunge a quella della membrana per dar luogo ad una massa efficace $M_{eff} = M_o + \mu V$. Questa valutazione è abbastanza ragionevole per il modo fondamentale, in cui tutta la membrana oscilla coerentemente; per i modi dotati di cerchi e diametri nodali bisogna tener conto del fatto che ogni regione agisce come un pistoncino, e regioni adiacenti si muovono in controfase, per cui la valutazione della massa d'aria coinvolta viene complicata dallla circostanza che l'aria, oltre che muoversi perpendicolarmente alla membrana, tende a scorrere da ogni regione a quelle adiacenti: un'ulteriore complicazione è dovuta al fatto che sono coinvolte due velocità, quella del suono nell'aria $C_a$ e quella $c$ di propagazione

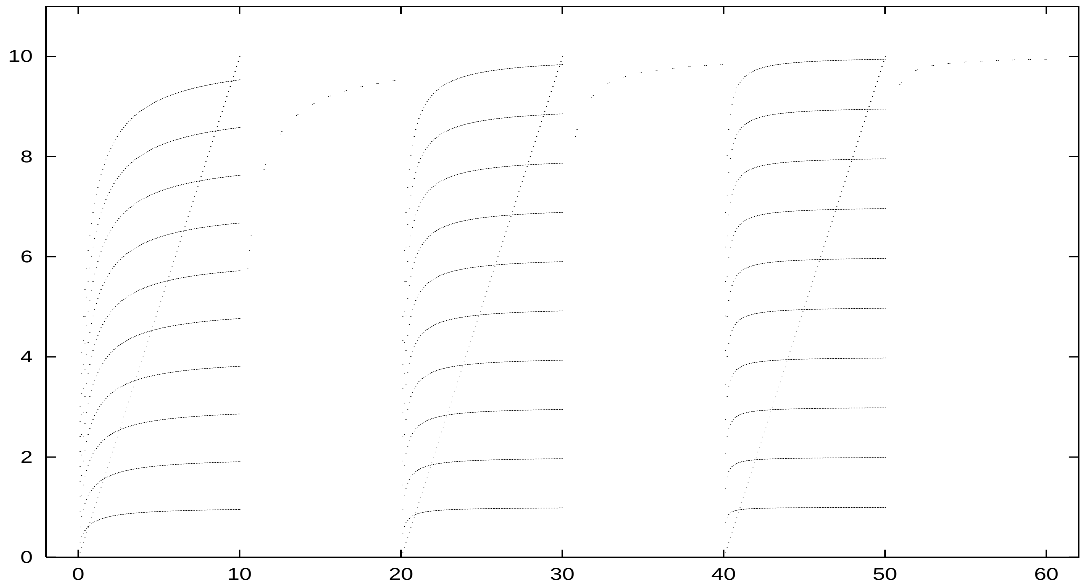


Fig. 5: Soluzioni grafiche dell'equazione $\omega_k = \frac{k}{\sqrt{1+b/\omega_k}}$; $k = 1, 2..10$ per 3 valori di $b = 3, 1, 1/3$, rapporto tra la frequenza in aria e quella nel vuoto: NB nel grafico tale rapporto è moltiplicato per 10.

delle onde sulla membrana.

Come si vede la correzione dipende dalla frequenza del modo normale, e diminuisce per le frequenze elevate, ma anche le frequenze normali dipendono dalla correzione: c'è una condizione di consistenza che ci fornisce la frequenza corretta (beninteso nei limiti di validità delle approssimazioni fatte), schematicamente rappresentata nella Fig.5, dove sono presentate le soluzioni grafiche dell'equazione

$$\omega = \frac{\omega_v}{\sqrt{1 + b/\omega}}, \qquad (5,4)$$

per diversi valori della frequenza nel vuoto $\omega_v$ e del parametro $b$, che schematizza il rapporto tra la densità dell'aria e quella della membrana .

Nelle situazioni di tipo b) e c) alle considerazioni precedenti si deve aggiungere l'effetto dovuto alla quantizzazione dei modi normali dell'aria contenuta nella cavità: se questa ha la stessa forma della membrana questi modi presentano le stesse linee nodali della membrana, ma la loro frequenza è legata anche alla profondità della cavità e alla velocità del suono nell'aria, per cui l'onda riflessa dal fondo può interferire positivamente o negativamente con il moto della membrana, esercitando un'azione frenante o accelerante; inoltre lo smorzamento risulta molto maggiore per i modi asimmetrici, in cui il pistone-membrana svolge effettivamente un lavoro di compressione sul gas. Nel timpano lo spostamento delle frequenze normali prodotto dalla cavità e l'abbattimento dei modi asimmetrici vengono sfruttati per rendere musicale il suo suono: i modi importanti sono infatti quelli senza cerchi nodali ($n = 1$) e con diametri nodali ($m = 1, 2, ...$), le cui frequenze sono quasi esattamente proporzionali a $m + 1$, cosicché il suono risulta armonico.

Prima di concludere questo paragrafo vorrei citare due strumenti popolari in cui la membrana viene eccitata per sfregamento , in modo analogo a quel che avviene per la corda e l'arco. Il primo è un tamburello la cui membrana viene eccitata per mezzo dello sfregamento del polpastrello leggermente umido, in modo che giocando con la pressione e la velocità c'è una successione di contatti quasi percussivi e di frenamenti che danno luogo ad un suono simile ad un pernacchio. L'altro è il "putipù", in cui la membrana circolare ha un foro in mezzo entro il quale può scorrere un bastoncino di legno: lo sfregamento del bastoncino sul bordo del foro, oppure lo sfregamento della mano sul bastoncino, producono l'eccitazione della membrana, secondo una sovrapposizione di modi normali con $m = 0$, visto che c'è un ventre nel punto di mezzo: anche in questo caso il suono è alquanto "pernacchioso" e viene utilizzato per sottolineare ritmicamente le danze popolari.

## 6 - Le cavità chiuse

Voglio chiudere questa sezione dedicando un paragrafo alle cavità chiuse, che rappresentano l'equivalente tridimensionale della corda e della membrana: infatti l'equazione che governa l'andamento temporale della pressione è anche in questo caso l'equazione delle onde di d'Alembert, come vedremo più in dettaglio in un prossimo capitolo; la sola differenza, a parte l'incremento del numero di dimensioni, è nelle condizioni al contorno: infatti sul contorno non si annulla la pressione, ma la componente normale del suo gradiente, con la conseguenza che le soluzioni, invece di avere la forma $\sin n\pi x/L$ sono del tipo $\cos n\pi x/L$, ma le frequenze dei modi normali per una cavità parallelepipeda hanno ancora la forma

$$\omega_{lmn} = c \left[ \frac{l^2}{{L_x}^2} + \frac{m^2}{{L_y}^2} + \frac{n^2}{{L_z}^2} \right]^{1/2}. \tag{6.1}$$

In una cavità chiusa, come una piccola stanza o una grande sala da concerto, il suono non può entrare né uscire, ma solo essere generato all'interno, e subire riflessioni e assorbimenti da parte delle pareti (e delle persone presenti). Qualsiasi suono, generato all'interno dell'ambiente, determina le condizioni iniziali per la pressione, come il pizzico o la percussione di corde e membrane, e può essere sviluppato in serie di modi normali: se le loro frequenze sono abbastanza numerose nella regione occupata dal suono in questione questo viene sostenuto, altrimenti si spegne rapidamente: è per questo che nella piccola cavità della doccia solo alcuni suoni, se ci mettiamo a cantare, ci fanno sembrare la nostra voce ricca e potente, mentre per gli altri essa risulta sorda e spenta; invece in una grande sala qualunque suono sembra sostenuto, perché nella regione di frequenze occupata dalla voce umana vi sono moltissime frequenze di modi normali; la distribuzione delle frequenze dei mondi normali di una grande e di una piccola cavità sono mostrate nelle Figg.6,7.

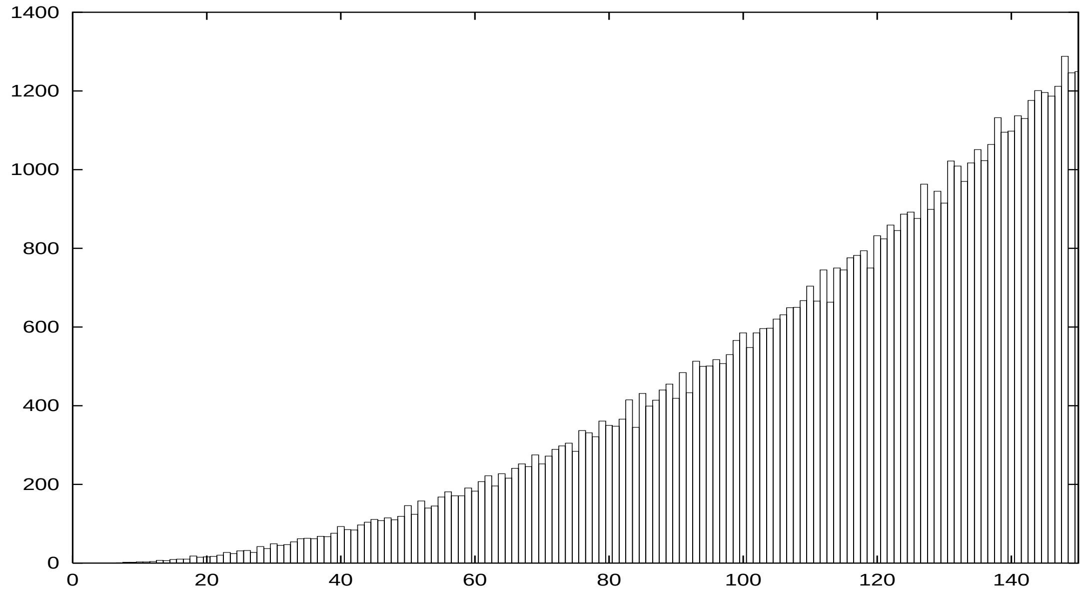


Fig. 6: Numero di modi per intervallo di frequenza per una cavità di 10x20x30 metri cubi.

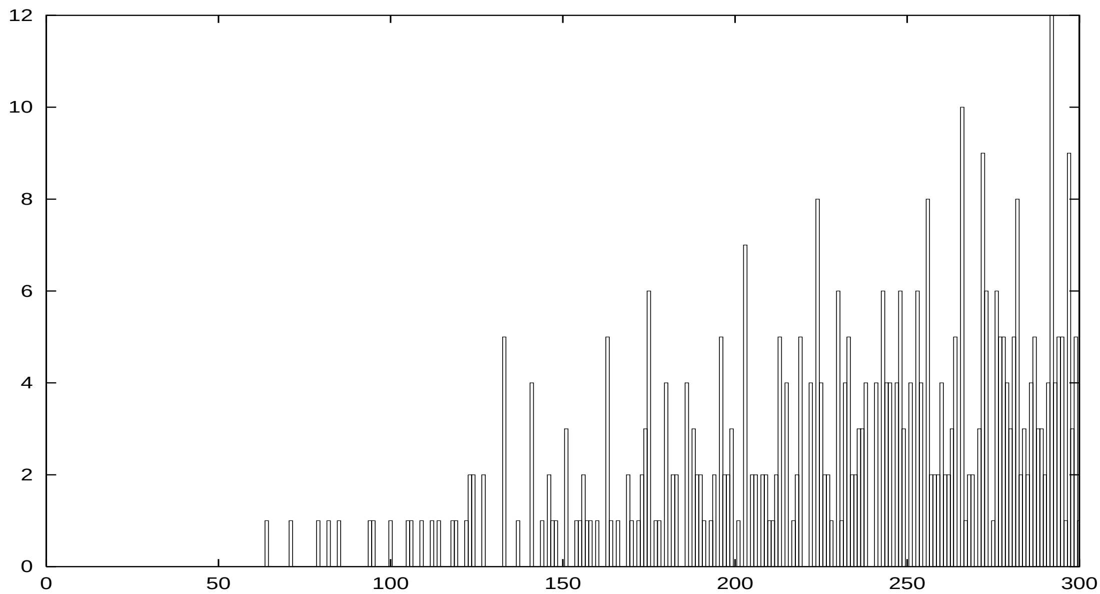


Fig. 7: Numero di modi per intervallo di frequenza per una cavità di 1x2x3 metri cubi.

Anche il riverbero dell'ambiente ha una notevole importanza, e questo dipende sia dalle sue dimensioni lineari $d$, che determinano il numero medio di riflessioni nell'unità di tempo $N_r = c/d$, sia dal coefficiente di attenuazione che dipende dalla natura delle pareti. Un lungo tempo di riverberazione, che è sostanzialmente la costante di decadimento esponenziale dell'ampiezza e può dipendere dalla frequenza, produce un'apparente sovrapposizione tra impulsi sonori che si succedono nel tempo, generando confusione, ma nello stesso tempo aiuta, per un cantante o un coro che non abbia il sostegno degli strumenti, a mantenere costante l'intonazione; al contrario un tempo breve produce il massimo della chiarezza ( la sala anecoica usata per le registrazioni ha in teoria un tempo di riverberazione nullo) ma rende assai più delicata l'esecuzione, dato che anche il minimo errore viene percepito.

Nello studio dell'acustica ambientale, essenziale per progettare un ambiente adeguato ad un certo tipo di produzione sonora (conferenze, dibattiti, musica da camera, musica sinfonica, opera lirica), sono importanti non solo le dimensioni della sala, la natura (più o meno assorbente) delle pareti, ma anche la sua geometria: occorre infatti evitare che ci siano "trappole", ossia zone dalle quali il suono non riesce ad uscire, "zone d'ombra", e punti focali, cioè tali che un suono prodotto in quel punto si ripete in quel punto (o in un altro), dopo un tempo fissato, producendo un "effetto mitragliatrice" assai fastidioso, ma nello stesso tempo misterioso ed affascinante.