

PARTE SECONDA

LA FISICA MATEMATICA DEGLI STRUMENTI MUSICALI

1 - Introduzione

Affrontare in tutti i dettagli l'aspetto fisico-matematico degli strumenti musicali costituisce un'impresa notevole, che richiederebbe un grosso volume (vedi per esempio "The physics of musical instruments, Fletcher and Rossing"); io mi limiterò a prendere in considerazione gli aspetti più elementari del problema, cercando di mostrare come l'appoggio fisico matematico possa essere utilizzato per capire gli aspetti fondamentali del funzionamento degli strumenti musicali. In ogni strumento musicale possono essere identificate tre parti, non necessariamente distinte, che sono l'eccitatore, il risuonatore e il radiatore, mutuamente accoppiate per garantire che l'energia immessa dall'eccitatore nel risuonatore venga trasferita efficacemente al radiatore e da questo all'aria e finalmente all'orecchio dell'ascoltatore.

Il risuonatore è quella parte dello strumento che meglio si presta ad una elegante descrizione fisico-matematica: tale descrizione tuttavia è spesso incompleta, per due ordini di ragioni; infatti una descrizione completa sarebbe molto complessa e non si presterebbe ad una soluzione analitica, perdendo così buona parte della preannunciata eleganza, e d'altra parte molti aspetti della fisica del risuonatore sono quasi totalmente irrilevanti dal punto di vista musicale che, ricordiamolo, è quello che ci guida in questa analisi.

Gli strumenti musicali esistono da parecchi millenni e pochi si rendono conto della loro immensa varietà: suggerisco a questo proposito una visita ad un museo di strumenti musicali (colti ed etnici) quale ad esempio quello romano accanto alla chiesa di S.Croce in Gerusalemme, nell'omonima piazza. L'obiettivo che ha guidato la loro evoluzione è quello di imitare ed estendere le potenzialità della voce umana (in estensione, dinamica, timbro, polifonia) e di fornire un supporto ritmico ad attività come il canto, la danza, il lavoro e, purtroppo, la guerra. Questa osservazione ci porta immediatamente a identificare due categorie di strumenti: quelli che emettono suoni semplicemente o moltiplicemente periodici (spettro di righe) e quelli che emettono suoni totalmente aperiodici (spettro continuo). A questa classificazione se ne può sovrapporre un'altra, che riguarda la natura del risuonatore e che determina un aspetto delle equazioni differenziali che ne descrivono il moto: il risuonatore infatti può essere (nell'idealizzazione fisico-matematica) infinitamente estensibile (corda, membrana), rigido e infinitamente elastico (sbarra, piastra), fluido (aria contenuta in una cavità); ma anche l'aspetto geometrico del risuonatore ha la sua importanza: esso infatti può essere unidimensionale (corda, sbarra e tubo quando una delle tre dimensioni sia molto maggiore delle altre due), bidimensionale

(membrana, piastra) o tridimensionale (cavità); e può avere (eccettuato il caso unidimensionale) le forme più disparate, che qui sarebbe troppo lungo elencare. Anche il meccanismo di eccitazione ha una notevole varietà, di cui voglio a questo punto indicare solo l'aspetto temporale: l'eccitazione infatti può essere istantanea (pizzico o percussione) o continua (sfregamento o soffio).

La trattazione formale comporta l'identificazione delle caratteristiche strutturali e geometriche che permettono di scrivere le equazioni del moto nella forma più generale, l'individuazione delle eventuali limitazioni che consentono una semplificazione delle equazioni e l'eliminazione, almeno in una fase iniziale, di tutte le caratteristiche irrilevanti dal punto di vista musicale. Successivamente, per risolvere le equazioni, occorre individuare le condizioni al contorno che determinano le frequenze dei modi normali, ed infine stabilire come le ampiezze dei modi normali dipendano dal meccanismo di eccitazione.

2 - La struttura generale delle equazioni

Il risuonatore, per il quale vogliamo determinare le equazioni del moto, è in generale un sistema continuo limitato (quindi a infiniti gradi di libertà), caratterizzato da una dimensionalità (1,2 o 3), da una forma, da un contorno: ognuno dei suoi elementi infinitesimi ha una posizione di riposo ed uno spostamento e/o una deformazione dipendente dal tempo, una densità, ed una forza che si oppone agli spostamenti: la natura fisica del risuonatore ci permette di descrivere questa forza in funzione degli spostamenti dalla posizione di riposo. Per ogni elemento infinitesimo possiamo scrivere l'equazione del moto nella forma generale $f = ma$, che non ci dice quasi niente finché non precisiamo la dipendenza della forza dalla configurazione del sistema: in generale la forza che in un certo istante agisce su di un elemento può dipendere in modo più o meno complesso dalla sua posizione relativa a quella di altri elementi, in genere i più vicini, ma talvolta anche quelli lontani, cioè dall'intera configurazione del sistema, allo stesso istante o in istanti precedenti: questo ci porta a concludere che, mentre per il secondo membro dell'equazione vale sempre la relazione $ma = d\mu\partial^2\mathbf{s}/\partial t^2$, dove lo spostamento vettoriale \mathbf{s} dipende dalle coordinate definite sul risuonatore che meglio si adattano alla sua geometria, per il primo membro possiamo dire che la forza dipende da tutto il possibile ed immaginabile, e solo schematizzando adeguatamente il problema possiamo darne un'espressione relativamente semplice.

A titolo di esempio proviamo ad affrontare, nella sua completezza, il problema apparentemente semplice (ma solo dopo aver fatto tutte le possibili semplificazioni) della corda vibrante, che è l'elemento risonante di una famiglia vastissima di strumenti musicali. Una corda è, storicamente, un fascio di fibre intrecciate, oppure un budello di animale (pecora, gatto?) seccato e talvolta intrecciato con altri simili, capace di essere deformato (incurvato) quasi senza opporre resistenza, capace di essere teso, applicando delle forze agli estremi che in genere ne provocano l'allungamento:

al crescere della forza cresce l'allungamento, al calare della forza cala l'allungamento, ma non è detto che, eliminata la forza, la lunghezza torni al valore iniziale; per forza eccessiva la corda si spezza; inoltre la corda non è omogenea, perché la sua densità e anche altre caratteristiche possono dipendere dalla coordinata curvilinea che permette di identificare l'elemento infinitesimo di corda; la corda è capace di resistere a torsione e, una volta tesa tende a riassumere la configurazione rettilinea se viene deformata. Diciamo allora che ogni elemento infinitesimo della corda, caratterizzato dalla coordinata curvilinea, può essere visto come un dischetto per il quale, ad ogni istante possiamo definire la posizione del suo centro (3 variabili), l'orientamento del suo asse (altre 2) e l'angolo di torsione rispetto ad uno dei dischetti estremi. Per rendersi conto concretamente di tutte queste possibilità conviene prendere in mano (o immaginare) l'ingrandimento di una corda, che potrebbe essere rappresentato da un semplice elastico di gomma (trascurando la sua sezione quadrata ed immaginandola circolare) o da una molla a forma di elica cilindrica, lunga e stretta: si vede così che anche senza applicare una tensione agli estremi la corda ha una posizione di riposo, alla quale tende a ritornare se viene deformata, mentre nel caso che vi sia una tensione questa non può essere considerata costante in modulo in tutti i punti della corda, come si può facilmente constatare spostando longitudinalmente un punto della molla o dell'elastico: la forza necessaria per effettuare tale spostamento introduce una discontinuità nella tensione nel punto di applicazione, ma anche nella densità, che risulta da una parte maggiore, dall'altra minore di quella che si osserva in assenza di quella forza; se sulla corda (o sulla molla o sull'elastico) sono presenti onde longitudinali di densità, ecco che anche la tensione presenta variazioni spazio-temporali a carattere ondulatorio, con una propria frequenza.

Da queste semplici considerazioni si capisce che una descrizione realistica di una corda dovrebbe prevedere tutti questi fenomeni, e anche il modo con cui l'energia cinetica e potenziale fornita alla corda dal meccanismo di eccitazione viene in tutto o in parte trasformata in un suono udibile; le equazioni sono certamente complicate, e non voglio qui discuterle in dettaglio, ma vale la pena (al di là della curiosità scientifica) affrontare il problema nella sua interezza (un sistema di equazioni integro-differenziali non lineari accoppiate) o non piuttosto individuare quegli aspetti che sono rilevanti al fine dell'uso della corda a scopi musicali? È chiaro che se i modi longitudinali, o torsionali, influiscono pesantemente sul suono, occorre tenerne conto fin dall'inizio, altrimenti si possono ignorare del tutto o introdurli come una piccola (?) correzione dopo aver risolto un problema semplificato. Le onde longitudinali, come quelle torsionali, influenzano localmente la densità e la tensione, e quindi sono in grado di produrre delle disomogenità nei parametri della corda, al punto tale che in ogni sito le forze e i parametri rilevanti dipendono dall'intera configurazione della corda, e quindi sembra che occorra tenerne conto; tuttavia i meccanismi di eccitazione normalmente usati negli strumenti musicali (pizzico, percussione, sfregamento trasverso) indicano che i modi longitudinali non vengono mai attivati, mentre quelli torsionali vengono attivati solo in modo marginale nel caso dello sfregamento: quindi possiamo concludere che, almeno in una fase iniziale, possiamo trascurarli.

Le modifiche dovute alla rigidità della corda invece devono essere prese in considerazione, sia pure come piccola correzione, mentre gli aspetti dissipativi possono essere in un primo momento trascurati, se pensiamo che nella maggior parte dei casi il tempo di smorzamento (alcuni secondi) è molto maggiore del periodo dei suoni emessi (circa 1/30 di secondo per la corda più bassa del pianoforte). Anche le variazioni di densità e di tensione dovute agli allungamenti della corda possono essere trascurati, visto che ad uno spostamento trasversale "infinitesimo del primo ordine", che in un caso realistico può essere al massimo dell'ordine di un centesimo della lunghezza della corda, corrisponde un allungamento (e un corrispondente incremento della tensione) che è un infinitesimo del secondo ordine.

3 - Le equazioni semplificate per la corda

Dopo tutte queste precisazioni è possibile schematizzare la corda come una linea, cioè un oggetto unidimensionale, fissa agli estremi che ne determinano quindi la lunghezza L , e sottoposta ad una tensione τ uguale in ogni punto, trascurando ovviamente la gravità; la sua configurazione di equilibrio è dunque un segmento di retta e le altre configurazioni sono linee continue che congiungono i due estremi e si discostano "molto poco" dal segmento di retta. Pertanto, avendo fissato una coordinata x sulla retta, per ogni elemento dx si può considerare lo spostamento rappresentato da un vettore \mathbf{s} di componenti y, z nel piano perpendicolare all'asse x ; in ogni punto la tensione ha modulo τ e direzione coincidente con la tangente alla corda, che è un vettore di componenti $\partial y/\partial x, \partial z/\partial x$; la forza che si esercita sull'elemento infinitesimo della corda è data dalla differenza tra le tensioni ai suoi estremi, ancora un vettore le cui componenti sono le derivate seconde del vettore spostamento. Pertanto, detta μ la densità lineare della corda, l'equazione del moto per l'elemento infinitesimo è

$$\mu dx \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial t^2} = \tau dx \frac{\partial^2 \mathbf{s}}{\partial x^2}, \quad (3.1)$$

che è la ben nota equazione delle onde trasversali in una dimensione, per un vettore spostamento a due componenti, con condizione di estremi fissi e condizioni iniziali determinate dal meccanismo di eccitazione. La (3.1) è separabile nelle due componenti y, z , nonché nella parte temporale e in quella spaziale: dato che le equazioni delle componenti sono identiche ne risolveremo solo una, tenendo però presente che, mentre ognuna delle due determina un moto della corda in un piano di polarizzazione, sono possibili loro combinazioni lineari che descrivono non solo moti in piani diversi dai due principali, ma anche moti non piani.

Ogni componente dello spostamento, per esempio la prima, soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (3.2)$$

dove $c^2 = \tau/\mu$ rappresenta il quadrato della velocità di propagazione delle perturbazioni lungo la corda. La separabilità dell'equazione ci dice che la soluzione può essere scritta come il prodotto di una funzione $T(t)$ del solo tempo, per una funzione $X(x)$ della sola coordinata spaziale, e queste funzioni soddisfano le equazioni $X'' + k^2X = 0$; $T'' + \omega^2T = 0$; $k = \omega/c$; le soluzioni sono in entrambi i casi combinazioni lineari di funzioni sinusoidali o di esponenziali oscillanti. Per la dipendenza spaziale si ha dunque $X(x) = a \sin(kx) + b \cos(kx)$ con le condizioni $X(0) = X(L) = 0$, da cui si ricava $b = 0$ e $k = n\pi/L$; $n = 1, 2, \dots$, mentre la dipendenza temporale è del tipo $T_n(t) = \cos(\omega t + \phi_n)$; $\omega = c\pi/L$. La condizione che gli estremi siano fissi produce la "quantizzazione" delle frequenze (temporali e spaziali), che possono assumere soltanto valori multipli interi della frequenza fondamentale: questi sono i "modi normali".

La soluzione generale per ogni componente può essere espressa da una combinazione lineare di modi normali con coefficienti determinati dalla configurazione iniziale $f(x)$ e dalla velocità iniziale $v(x)$ di ogni punto della corda:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi \frac{x}{L}) \cos(n\omega t + \phi_n), \quad (3.3)$$

con le
condizioni

$$y(x, 0) = f(x); \quad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = v(x); \quad (3.4)$$

da queste si ricava

$$f(x) = \sum C_n \sin(n\pi \frac{x}{L}) \cos(\phi_n), \quad (3.5a)$$

e

$$v(x) = - \sum C_n \sin(n\pi \frac{x}{L}) n\omega \sin(\phi_n) : \quad (3.5b)$$

come si vede i coefficienti C_n e le fasi ϕ_n sono legati ai coefficienti dello sviluppo di Fourier delle condizioni iniziali: infatti, detti f_n e v_n i coefficienti dello sviluppo di Fourier della $f(x)$ e della $v(x)$ si ha $f_n = C_n \cos \phi_n$; $v_n = -C_n n\omega \sin \phi_n$ e infine $C_n^2 = f_n^2 + (v_n/n\omega)^2$ e $\tan \phi_n = -v_n/(n\omega f_n)$.

Per renderci conto del moto della corda di uno strumento musicale dobbiamo esaminare (e possibilmente schematizzare) i meccanismi di eccitazione che sono tre: pizzico (chitarra, liuto, contrabbasso, arpa, clavicembalo), percussione (pianoforte, cymbalon, clavicordo), e sfregamento (strumenti ad arco). Il primo è quello più semplice in cui la corda viene spostata dalla sua posizione di riposo in un certo punto, con il plettro, l'unghia, il polpastrello o altro, e lasciata andare: la configurazione iniziale è grosso modo triangolare, anche se il vertice non è veramente spigoloso ma semmai alquanto arrotondato, e la velocità iniziale dipende dalla "storia precedente" della corda. Normalmente si assume, per semplicità, che la forma sia veramente triangolare, e che la velocità iniziale sia nulla: questo comporta che le fasi iniziali siano tutte nulle $\phi_n = 0$ e per i coefficienti $C_n = f_n$.

Per calcolare i coefficienti occorre fare la trasformata di Fourier di un triangolo che ha per base la corda di lunghezza L e il suo vertice nel punto a di eccitazione e altezza unitaria; è più semplice fare la trasformata di Fourier della derivata seconda della configurazione triangolare: infatti la derivata prima è costante a sinistra di a dove vale $1/a$ e a destra, dove vale $-1/(L-a)$; pertanto la derivata seconda può essere rappresentata dalla delta di Dirac $-[1/a + 1/(L-a)]\delta(x-a)$ e per il coefficiente si ha

$$C_n = -\frac{L^2}{n^2\pi^2} \frac{L}{a(L-a)} \sin \frac{n\pi a}{L} : \quad (3.6)$$

come si vede la dipendenza da n consta di due fattori, uno monotono (in questo caso l'inverso del quadrato) che dipende dal meccanismo di eccitazione, ed uno che dipende dal punto di eccitazione, in modo tale che è possibile eliminare certi armonici: infatti se $a = Lp/q$ con p, q interi $C_k = 0$ per ogni k tale che kp/q sia intero; ad esempio pizzicando la corda ad un settimo della sua lunghezza si elimina il settimo armonico (Si bemolle per una corda il cui fondamentale è un Do), mentre pizzicandola nel punto di mezzo si eliminano tutti gli armonici di ordine pari, e per quelli dispari rimane la dipendenza quadratica inversa con alternanza di segno. Nelle Figg.1 e 2 sono rappresentate stroboscopicamente le posizioni e le velocità di una corda pizzicata ad un quinto della sua lunghezza.

Per la corda percossa, con un percussore più o meno localizzato, si fanno delle approssimazioni analoghe a quelle fatte per la corda pizzicata: si assume che la configurazione iniziale sia quella rettilinea e che la velocità iniziale sia diversa da zero solo nel punto di percussione $x = a$: in tal caso conviene porre $\phi_n = -\pi/2$ e calcolare la trasformata di Fourier della velocità iniziale v_o unitaria che è rappresentata dalla delta di Dirac: si ottiene così $C_n = [v_o/n\omega] \sin(n\pi a/L)$. La dipendenza dal punto di eccitazione è la stessa del caso precedente, ma il modulo dei coefficienti decade solo con l'inverso di n e il suono risulta più duro, cioè più ricco di armonici alti. Nelle Figg.3 e 4 sono rappresentate posizione e velocità di una corda percossa a un quinto della sua lunghezza.

I moti rappresentati nelle figure sono quelli di una corda che oscilla nel vuoto in assenza di campo gravitazionale. Cerchiamo ora di capire come il movimento della corda produce il suono: in nessun modo, se la corda si comportasse veramente come impongono le equazioni che abbiamo risolto, che sono tuttavia approssimate perché non tengono conto della resistenza dell'aria, né degli estremi, che non sono rigorosamente fissi. All'aria va pochissima energia, tant'è vero che se non ci fossero il ponticello e la tavola armonica il suono sarebbe quasi inudibile, se non a brevissima distanza; il grosso dell'energia viene trasmesso alla tavola armonica per mezzo del ponticello, e da questa all'aria circostante. La forza che agisce sul ponticello è la tensione della corda, che è diretta come la corda nel punto di contatto (supponiamo che sia l'origine dell'asse x) con il ponticello, e quindi varia nel tempo, in direzione e in modulo: ricordando che le ampiezze sono molto più piccole della lunghezza L ci sarà quindi una componente diretta come x , pari alla tensione istantanea $\tau(t)$ della corda, ed una componente perpendicolare, proporzionale a $\tau(t)$, moltiplicata per la

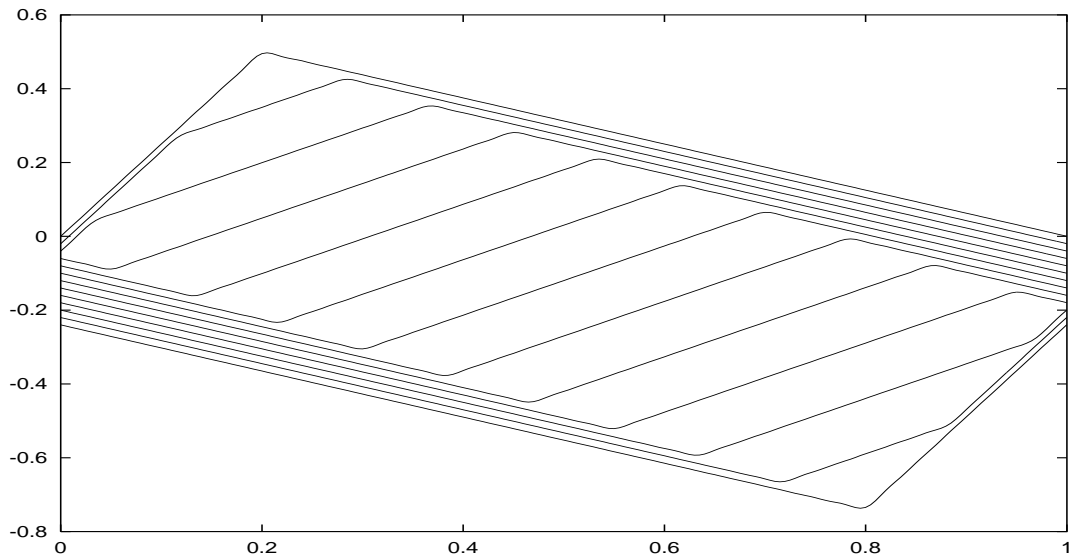


Fig. 1: Posizioni di una corda pizzicata a un quinto della sua lunghezza durante mezzo periodo; il tempo va dall'alto in basso.

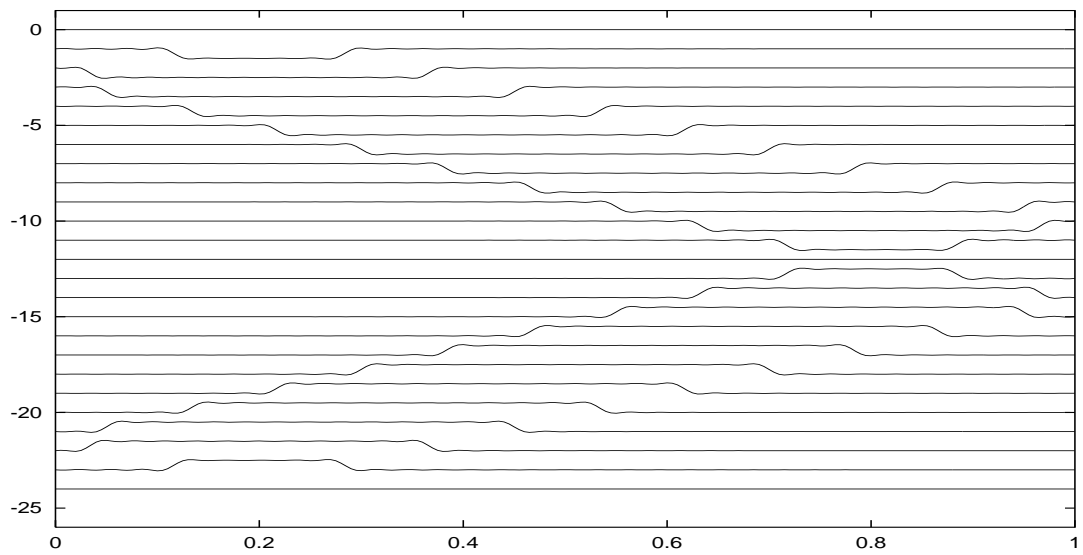


Fig. 2: Velocità di una corda pizzicata a un quinto della sua lunghezza durante un periodo; il tempo va dall'alto in basso.

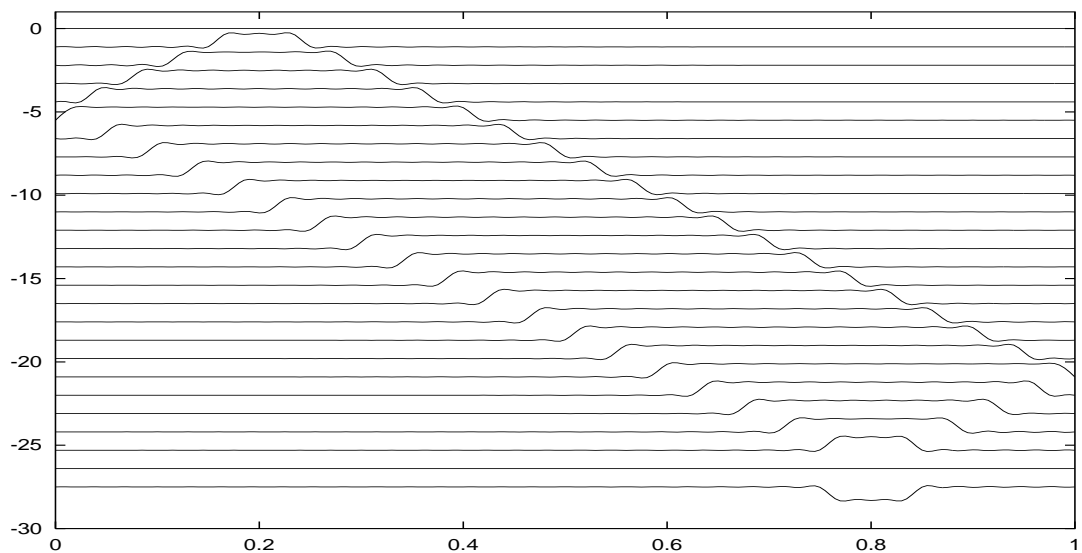


Fig. 3: Posizioni di una corda percossa a un quinto della sua lunghezza durante mezzo periodo; il tempo va dall'alto in basso.

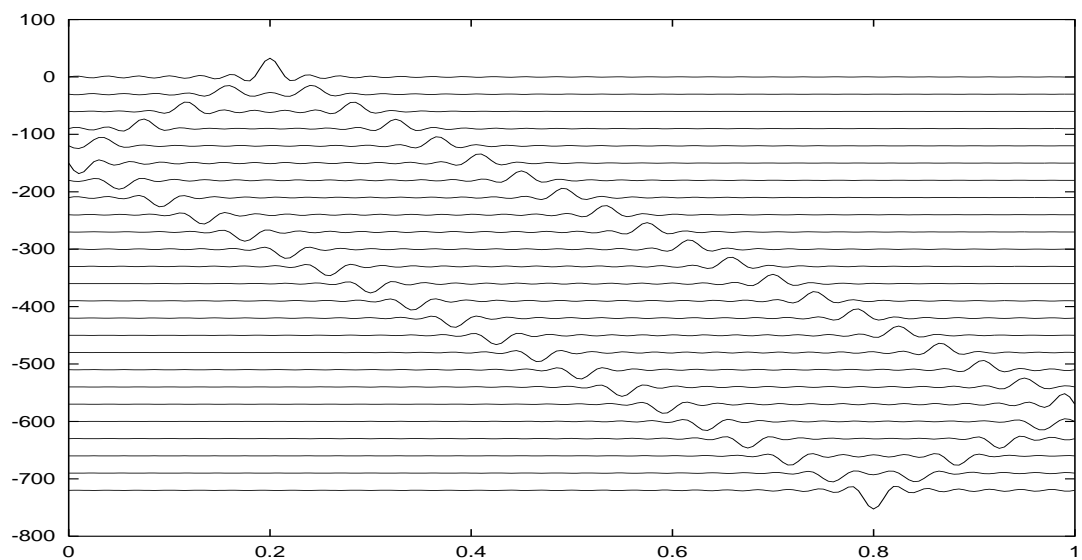


Fig. 4: Velocità di una corda percossa a un quinto della sua lunghezza durante mezzo periodo; il tempo va dall'alto in basso.

derivata prima spaziale della configurazione calcolata sul ponticello che assumiamo come origine. La derivata in questione è

$$y_x(0, t) = \sum C_n n \frac{\pi}{L} \cos(n\omega t + \phi_n), \quad (3.7)$$

mentre l'allungamento della corda è

$$\delta L = \frac{1}{4L} \sum C_n^2 n^2 \pi^2 \cos^2(n\omega t + \phi_n). \quad (3.8)$$

Se riferiamo tutti i coefficienti a quello fondamentale C_1 che poniamo uguale a d , l'elongazione della corda nel punto di mezzo, e supponiamo che sia $d \ll L$, vediamo che la componente trasversale della forza sul ponticello è proporzionale a d/L , mentre la parte variabile di quella longitudinale è proporzionale a $(d/L)^2$, ed è quindi trascurabile. Si vede immediatamente che la componente trasversale ha uno spettro più duro di quello della corda, a causa del fattore n , mentre quella longitudinale, essendo quadratica nei coefficienti, dipende dal loro andamento che va esaminato caso per caso.

Può essere interessante valutare l'influenza dell'aria sul moto della corda, tenendo presente che l'effetto è molto piccolo, data la piccolissima resistenza che un gas offre al movimento di una linea: introduciamo perciò nell'equazione del moto della corda un termine frenante, proporzionale alla velocità, in modo che l'equazione assume la forma

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \tau \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + s \frac{\partial y}{\partial t} = 0 : \quad (3.9)$$

l'equazione è ancora separabile, ma l'equazione che lega la frequenza ω al numero d'onde k diventa $\omega^2 - i\omega s/\mu - k^2 c^2 = 0$ e le sue radici, se $s/\mu \ll kc$ sono:

$$\omega = kc \left(1 - \frac{s^2}{8k^2 \mu \tau} \right) + \frac{is}{2\mu}, \quad (3.10)$$

e se i modi normali sono caratterizzati dal numero d'onde $k_n = n\pi/L$ allora le corrispondenti frequenze diventano

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L} \left(1 - \frac{s^2}{8\mu\tau\pi^2 n^2} \right) + \frac{is}{2\mu}; \quad (3.11)$$

come si vede il coefficiente di smorzamento è lo stesso per tutti i modi normali, ma le frequenze dei modi normali vengono leggermente abbassate, tanto meno quanto maggiore è n , per cui tutti gli intervalli tra gli armonici risultano leggermente crescenti. In realtà le cose vanno diversamente, perché l'accoppiamento con l'aria è più complicato e deve tener conto di moti turbolenti, che esercitano un'azione di frenamento più complessa. Inoltre una certa quantità di energia viene dissipata all'interno della corda, "scaldando il reticolo cristallino" e questo effetto è più importante per i modi di alto n , in cui la curvatura della corda è maggiore, che pertanto vengono smorzati più rapidamente.

Un caso un po' più complicato ma anche più realistico è quello della corda pizzicata, quando la velocità iniziale non è nulla al momento del rilascio: il plettro o l'unghia che trascinano la corda lo fanno con una certa velocità, e nell'istante del rilascio la corda non è ferma. Non è semplice valutare esattamente la configurazione e la velocità della corda, in quanto entrambe dipendono dalla tecnica di esecuzione: tuttavia se pensiamo al fatto che durante il trascinamento non c'è suono possiamo assumere, con discreta approssimazione, che la configurazione della corda sia ancora di tipo triangolare, e che la velocità sia proporzionale all'elongazione; con questa scelta è facile determinare i coefficienti e le fasi: infatti se i coefficienti di Fourier C_n della forma triangolare con velocità iniziale nulla sono quelli determinati dalla (6) e se la configurazione della velocità iniziale è data da $v(x, 0) = qy(x, 0)$, dalle (5) si ottiene, per i nuovi coefficienti $A_n = C_n \sqrt{1 + q^2/\omega^2 n^2}$ e per le fasi $\tan \phi_n = -q/\omega n$: le configurazioni successive della corda, al crescere della velocità iniziale, mostrano ancora la propagazione della discontinuità iniziale nelle due direzioni, ma i vertici, anziché seguire un percorso rettilineo, seguono una traiettoria curvilinea, che assomiglia molto alle cosiddette onde di Helmholtz che si osservano quando la corda viene eccitata con l'archetto; i due casi infatti si assomigliano abbastanza, anche se c'è un'importante differenza dovuta al fatto che l'approssimazione che abbiamo fatto non è più valida nel caso dell'arco. Nelle successive Figg. 5,6 e 7 sono mostrate stroboscopicamente le posizioni di una corda pizzicata e lasciata andare con velocità iniziale non nulla.

Il meccanismo di eccitazione con l'arco infatti sfrutta la differenza fra l'attrito statico e quello dinamico tra il crine dell'arco, opportunamente impeciato, e la corda. Quando, a corda ferma, si comincia a tirare l'arco, esercitando una adeguata pressione, l'attrito statico fa sì che la corda rimanga attaccata all'arco, assumendo quindi una configurazione del tipo triangolare, finché la componente della tensione parallela all'arco non raggiunge il valore dell'attrito di primo distacco, e la corda inizia il suo moto, analogo a quello che abbiamo descritto per la corda pizzicata, con la sola differenza che l'arco continua ad esercitare un'azione di frenamento: quando la corda inverte il suo moto e la sua velocità differisce poco da quella dell'arco, essa viene riagganciata e trascinata finché non si raggiungono di nuovo le condizioni per il distacco. Durante ogni ciclo la (o le) discontinuità si muovono lungo la corda determinando una traiettoria qualitativamente simile a quella vista in precedenza.

L'azione del moto della corda sul ponticello, essenziale affinché l'energia venga trasmessa alla tavola armonica ed infine irraggiata nell'ambiente, è molto diversa nei tre casi che abbiamo trattato, ed è illustrata nelle Figg.8,9,10, che mostrano in funzione del tempo la componente trasversale della forza che agisce sul ponticello durante due periodi. Nelle Figg.11,12,13 sono rappresentate in funzione del tempo, per ognuno dei casi delle Figg.8,9,10, le posizioni del punto di eccitazione e di un punto della corda a un decimo della sua lunghezza.

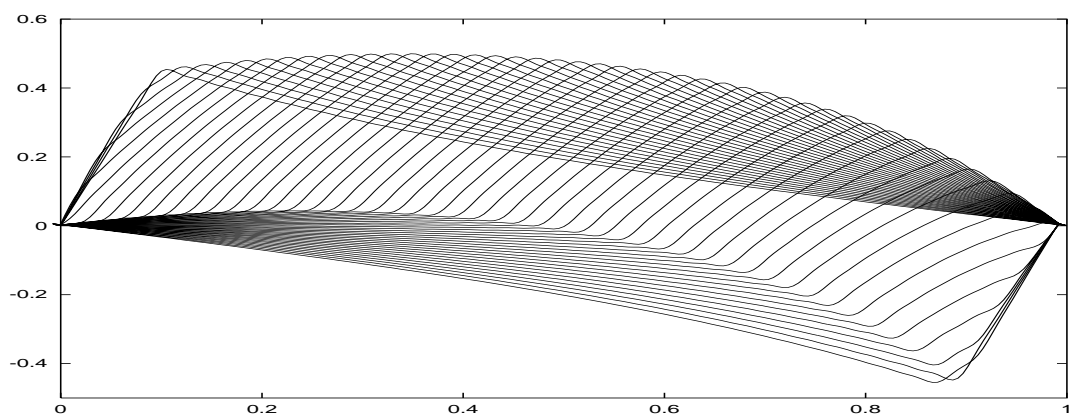


Fig. 5: Posizioni di una corda pizzicata a un decimo della sua lunghezza; $q=0.9$.

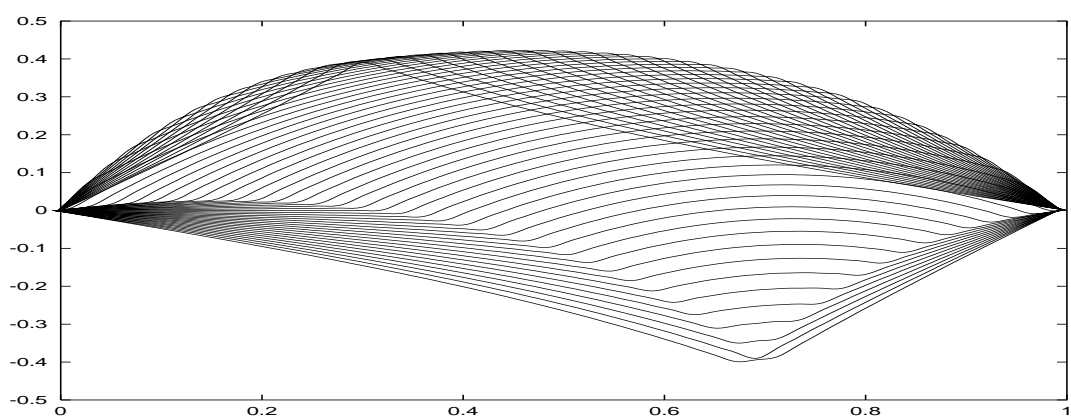


Fig. 6: Posizioni di una corda pizzicata a tre decimi della sua lunghezza; $q=1$.

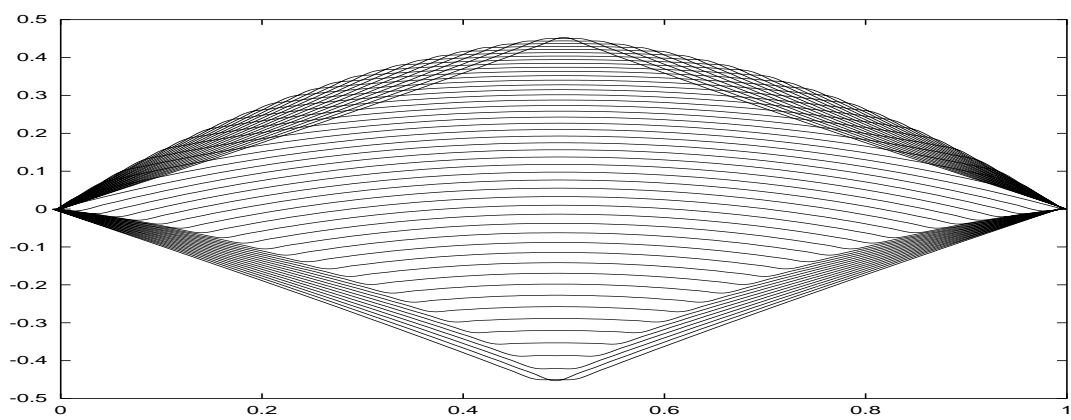


Fig. 7: Posizioni di una corda pizzicata nel punto di mezzo; $q=0.5$.

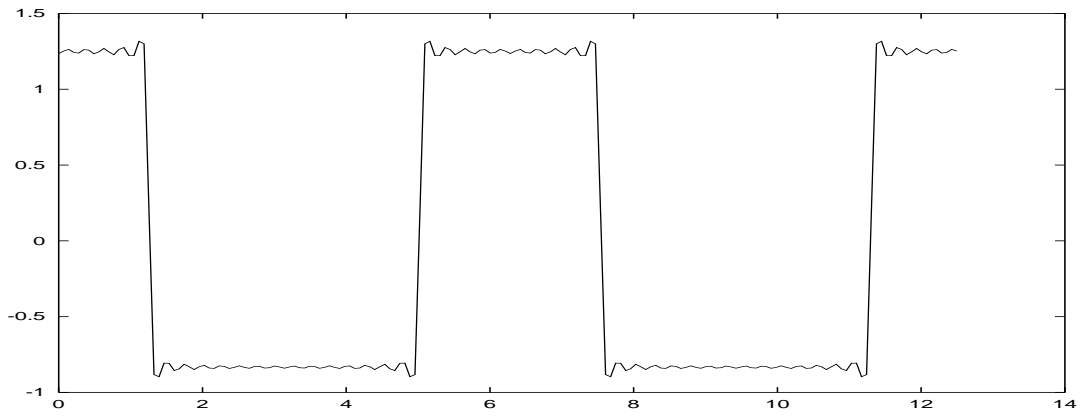


Fig. 8: Forza sul ponticello in funzione del tempo; corda pizzicata in $a = .2L$.

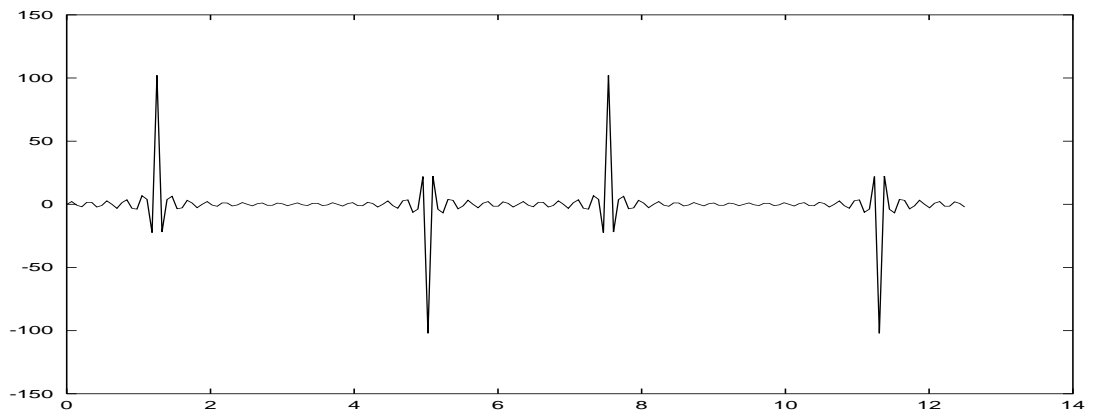


Fig. 9: Come sopra; corda percossa in $a = .2L$.

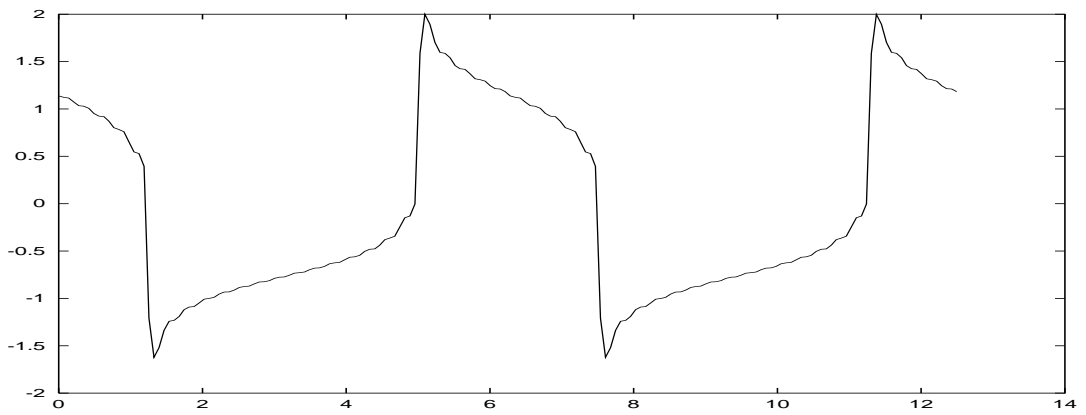


Fig. 10: Come sopra; corda pizzicata in $a = .2L$; velocità iniziale non nulla $q=.5$.

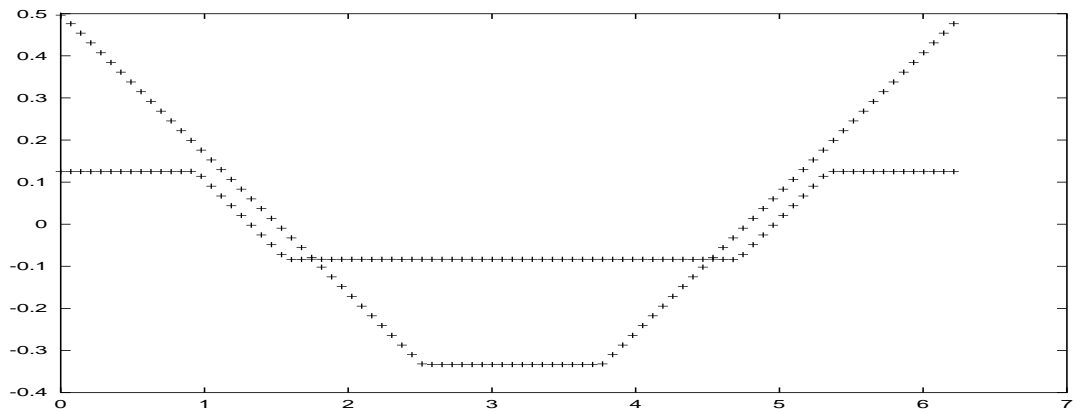


Fig. 11: $y(0.2L,t)$ e $y(0.1L,t)$ per una corda pizzicata in $a=.2L$.

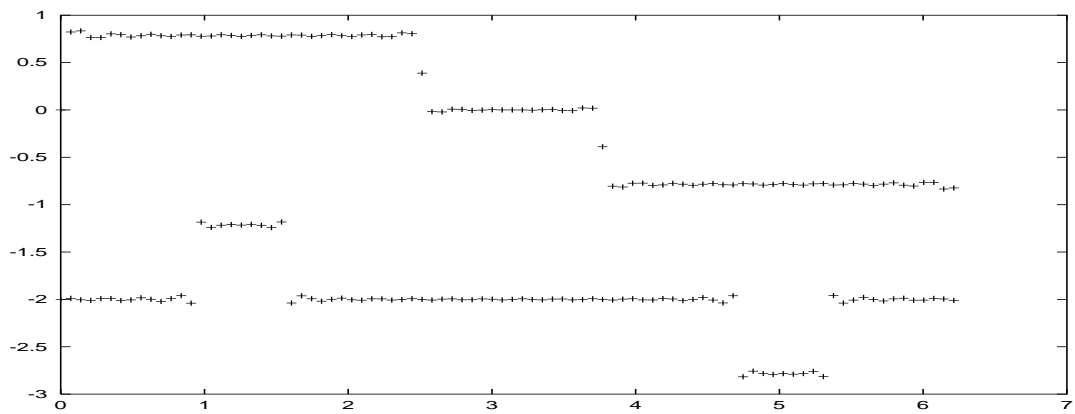


Fig. 12: $y(0.2L,t)$ e $y(0.1L,t)$ per una corda percossa in $a=.2L$.

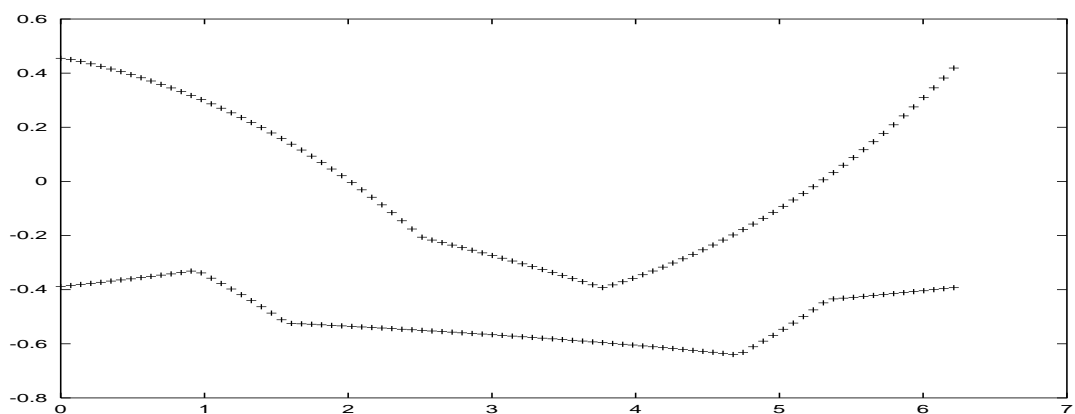


Fig. 13: $y(0.2L,t)$ e $y(0.1L,t)$ per una corda pizzicata in $a=.2L$ con velocità iniziale non nulla; $q=0.5$.