PARTE PRIMA

L'UNIVERSO DEI SUONI

1 - Di che cosa stiamo parlando?

In un certo ambiente, contenente aria e vapore acqueo, hanno luogo dei fenomeni che coinvolgono la pressione, la temperatura, la condensazione del vapore o l'evaporazione del liquido, il movimento delle varie parti, ecc.: stiamo parlando di fenomeni sonori o meteorologici? In che cosa la formazione delle nubi, il vento, le precipitazioni, differiscono da quel che avviene dentro un trombone, un flauto o il tratto vocale di un animale o di un essere umano? Le equazioni che governano le due classi di fenomeni sono in fondo le stesse; la differenza sta nella scala spazio-temporale, grande e lenta per la meteorologia, piccola e veloce per i suoni, e per un altro aspetto, la collocazione dell'ambiente sulla terra in rotazione, cosa rilevante per i fenomeni atmosferici ma non per quelli sonori, per i quali la terra è un sistema inerziale e il campo gravitazionale ha un'influenza trascurabile. Occorre anche aggiungere che nei fenomeni meteorologici hanno grande rilevanza gli spostamenti delle masse d'aria, che sono invece trascurabili in quelli acustici. C'è in realtà un'altra differenza, forse più importante: i suoni vengono **ascoltati** da un'apparato uditivo (anche i tuoni però, e lo stormire delle foglie agitate dal vento), mentre i fenomeni meteorologici vengono percepiti da altri sistemi percettivi, naturali o artificiali.

Dobbiamo pertanto domandarci che cosa sia un suono in funzione dell'apparato uditivo che lo ascolta: per l'orecchio umano un suono è una variazione della pressione che si esercita sulla membrana del timpano, con una frequenza compresa tra, circa, 20 e 20.000 Hertz; per l'orecchio di molti altri animali cambia solo l'intervallo delle frequenze udibili, più alte per gli animali piccoli, più basse per quelli grandi. Ma esistono animali in cui l'apparato uditivo, capace di rivelare le variazioni della pressione, non è fatto come l'orecchio, ed utilizza come organo sensorio una parte della superficie corporea: d'altra parte chiunque sia entrato in una discoteca si è reso conto che certi suoni si percepiscono molto meglio con l'addome che con le orecchie.

Fermo restando che il suono è una variazione di pressione, ogni apparato uditivo definirà suono quell'insieme di variazioni di pressione che è capace di percepire: per evitare confusione possiamo chiamare suono le variazioni di pressione governate dalle equazioni per cui la terra non ruota e la gravità non esiste, e chiamare invece stimoli sonori (in relazione ad un particolare apparato uditivo) quelli effettivamente percepiti.

Parliamo allora di suoni cioè della pressione p, che è una funzione scalare della posizione $\mathbf{r}$ e del tempo t, soluzione dell'equazione di d'Alembert che descrive la propagazione delle onde in un mezzo continuo:

$$\Delta p(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c(\mathbf{r}, t)^2} \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0. \tag{1.1}$$

dove nel caso più generale la velocità del suono $c(\mathbf{r}, t)$ può dipendere sia dalla posizione che dal tempo, oltre che da altri parametri, quali ad esempio la temperatura, la natura del gas e la sua densità. Questa equazione descrive la propagazione del suono; ad essa vanno aggiunte le informazioni relative alle sorgenti del suono ed all'ambiente in cui la propagazione si sviluppa, cioè alla natura degli ostacoli (riflettenti, assorbenti, misti) che il suono incontra lungo il suo cammino.

Nella maggior parte dei casi che ci interessano la velocità del suono può essere considerata con buona approssimazione costante, e l'equazione (1.1) può essere risolta con il metodo della separazione delle variabili, cercando soluzioni che siano il prodotto di una funzione del tempo per una funzione delle coordinate spaziali; il fattore dipendente al tempo ha la forma periodica $e^{i\omega t}$ dove la pulsazione $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ mentre il fattore spaziale può essere determinato solo se si conosce la forma dell'ambiente in cui il suono deve viaggiare: solo in casi geometricamente semplici (cavità a pareti perfettamente riflettenti, parallelepipede, sferiche, cilindriche, coniche, oppure lo spazio infinito) è possibile rappresentare in forma analitica le soluzioni dell'equazione spaziale. Queste soluzioni hanno comunqe un andamento spaziale ondulatorio e a ciascuna di esse corrisponde una ben determinata frequenza: le frequenze proprie costituiscono un'infinità, numerabile se l'ambiente è finito, non numerabile in un ambiente infinito, mentre le soluzioni spaziali sono un insieme completo e ortonormale: questo è importante perché la soluzione più generale può essere ottenuta per mezzo di una combinazione lineare di soluzioni elementari:

$$p(\mathbf{r}, t) = \sum a(\omega) R_\omega(\mathbf{r}) e^{i\omega t}; \tag{1.2}$$

la somma si trasforma in un integrale quando lo spazio è infinito e tutte le frequenze sono possibili.

Il problema completo consiste nella determinazione della propagazione del suono, generato da una o più sorgenti, in un ambiente assegnato: una volta trovate le frequenze proprie e le corrispondenti autofunzioni spaziali (che dipendono soltanto dall'ambiente) bisogna rappresentare la distribuzione spaziale e in frequenza delle sorgenti per mezzo di una combinazione lineare di autofunzioni, determinando i coefficienti $a(\omega)$. Un tipico problema inverso (di soluzione molto più difficile, se non impossibile) è quello di determinare la posizione delle sorgenti sonore, utilizzando le informazioni ottenute misurando la pressione in uno o più punti dello spazio: questa è data dai valori della (1.2) nei punti di coordinate $\mathbf{r}_i$: in ognuno di questi punti troviamo una combinazione lineare di funzioni periodiche, dove ogni coefficiente è il prodotto del coefficiente $a(\omega)$, che dipende dalla sorgente, per il valore della corrispondente autofunzione spaziale in quel punto, che dipende soltanto dall'ambiente; a meno di non conoscerlo perfettamente, dal punto di vista acustico, è impossibile separare i due fattori e quindi il problema non è risolubile. Eppure la nostra esperienza quotidiana ci dice che noi, e ancor meglio molti animali, questo problema in qualche modo lo risolviamo, disponendo soltanto di due orecchie, ma forse anche di qualche altra cosa.

Dimentichiamo per un po' la localizzazione delle sorgenti ed occupiamoci di quel che un singolo orecchio, naturale o artificiale, è in grado di percepire quando si trova, fermo, sotto l'azione di uno stimolo sonoro: se l'orecchio è **perfetto**, cioè se è un analizzatore di Fourier (che è una pura astrazione matematica), percepisce i coefficienti di ogni componente periodica del suono in questione: dato che questi coefficienti sono numeri complessi, sono rappresentabili per mezzo di un'ampiezza e di una fase: quindi infiniti numeri, anche se in molti casi d'interesse, soprattutto musicale, solo un numero finito e piccolo di questi numeri è diverso da zero; deve però rimanere la possibilità di misurarli tutti, magari non simultaneamente, e di riporli da qualche parte, il che pone qualche problemuccio di spazio di memoria.

C'è tuttavia un altro problema, assai più importante, legato alla circostanza che la pressione, di cui vogliamo in modo più o meno completo misurare le componenti di Fourier, è una funzione del tempo, e un analizzatore di Fourier deve aver a disposizione tutta la funzione, dall'inizio alla fine; anche senza arrivare alla situazione estrema, in cui l'integrazione sul tempo va da meno infinito a più infinito, un evento acustico, per esempio un brano musicale, un discorso, il rumore di una valanga, svela il suo contenuto spettrale solo quando si è completamente svolto: sarebbe invece conveniente disporre, fin dall'inizio dell'evento, di una qualche informazione, magari incompleta, tuttavia utile ad un essere vivente per prendere delle decisioni che potrebbero essere di vitale importanza. Una possibilità è quella, ovvia, di effettuare l'integrazione dall'inizio dell'evento fino a **adesso**, cioè al tempo corrente: questa procedura fornisce ad ogni istante lo spettro della parte dell'evento che si è effettivamente svolta, ma presenta il difetto che le parti più recenti dell'evento pesano sempre meno rispetto all'integrale valutato fino a quel momento, per non parlare del fatto che si perde la normalizzazione. Val la pena di osservare che questi procedimenti, per quanto macchinosi, conservano l'informazione, nel senso che permettono di ricostruire in modo completo l'andamento temporale della pressione.

Questa ricostruzione richiede una procedura altrettanto macchinosa della precedente, se non in casi particolarmente semplici: è ben noto che un evento semplicemente periodico $p(t) = e^{i\omega_0 t}$ ha una rappresentazione spettrale costituita dall'unica frequenza ω_0, se analizzato per un tempo infinito, o da una distribuzione centrata intorno a quel valore, la cui larghezza è inversamente proporzionale alla durata dell'analisi; se l'evento è molteplicemente periodico, come accade se sono presenti gli armonici di un fondamentale o se più suoni semplici vengono presentati contemporaneamente, lo spettro è costituito da altrettante distribuzioni con lo stesso comportamento ed un'altezza proporzionale all'intensità di quella componente.

Le Figg.1,2 illustrano l'ampiezza di Fourier della funzione $\sin \omega_0 t; \omega_0 = 1$, per diverse lunghezze dell'intervallo di integrazione; le due righe dovrebbero trovarsi in $\omega = \pm 1$, ma solo quando l'intervallo d'integrazione diventa grande rispetto al periodo $T = 2\pi$ queste risultano ben separate.

Nelle Figg.3,4 si vedono le intensità, cioè i quadrati delle ampiezze presentate in Figg.1,2.

Se i suoni hanno una durata limitata e vengono presentati simultaneamente o in successione il risultato è analogo al precedente con la sola differenza che la larghezza

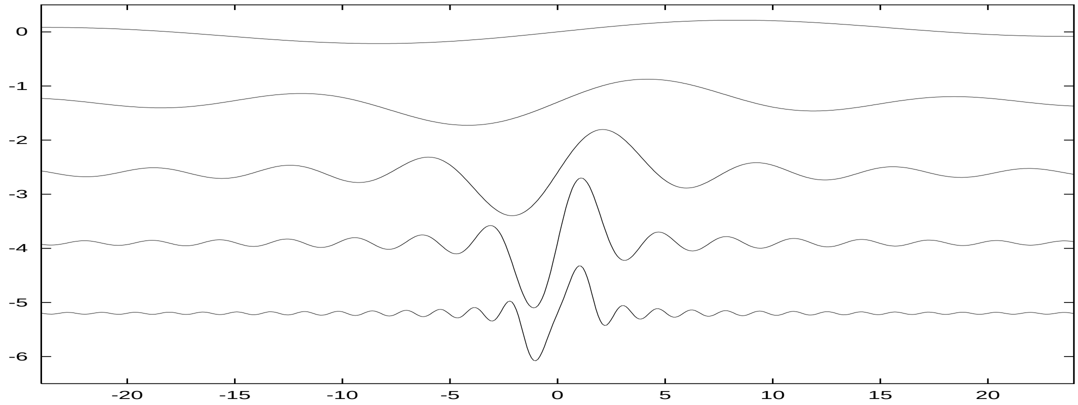

Fig. 1: Ampiezza di Fourier vs ω - Finestra 1/4,1/2,1,2,4

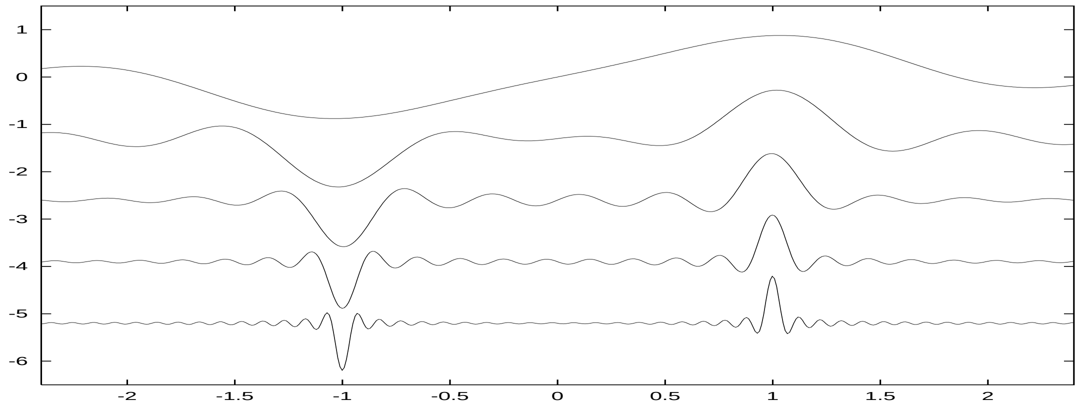

Fig. 2: Ampiezza di Fourier vs ω - Finestra 4,8,16,32,64

della distribuzione non può scendere al disotto dell'inverso della durata di ciascuna componente semplice. È facile rendersi conto che un evento acustico lungo e complesso darà luogo ad una distribuzione spettrale praticamente continua, molto difficile da interpretare, se non dopo una laboriosa analisi. La parte più difficile della ricostruzione dell'evento è il suo andamento temporale: supponiamo infatti di proporre due suoni semplici di uguale durata e intensità ma diversa frequenza, presentati vuoi simultaneamente, vuoi con un ritardo tra l'uno e l'altro, che può andare da zero fino a molte volte la loro durata; in che modo la trasformata di Fourier dipende dal ritardo? La trasformata, in quanto funzione lineare e complessa della frequenza, è data dalla somma delle trasformate dei singoli suoni, ciascuna moltiplicata per un fattore di fase che dipende dal ritardo e dalla frequenza: tuttavia la maggior parte degli analizzatori (non rigorosamente matematici) calcola il modulo quadro della funzione complessa e perde l'informazione riguardante la fase, se con

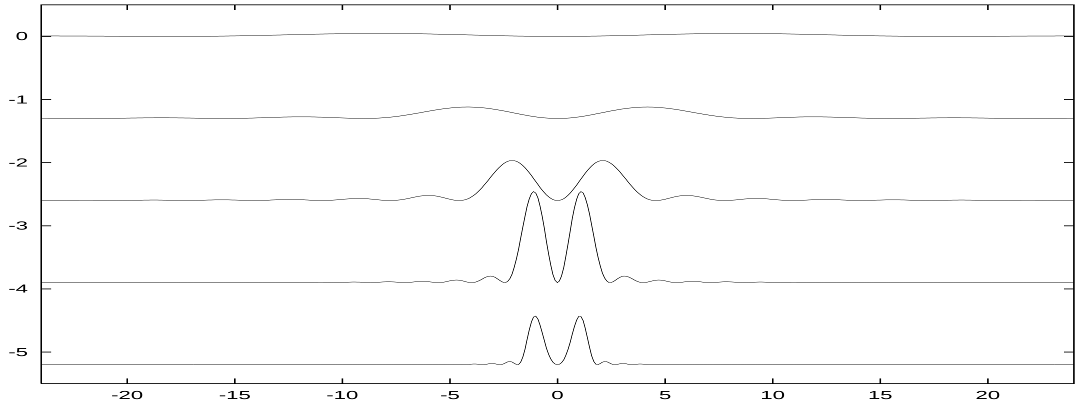

Fig. 3: Intensità di Fourier vs ω - Finestra 1/4,1/2,1,2,4

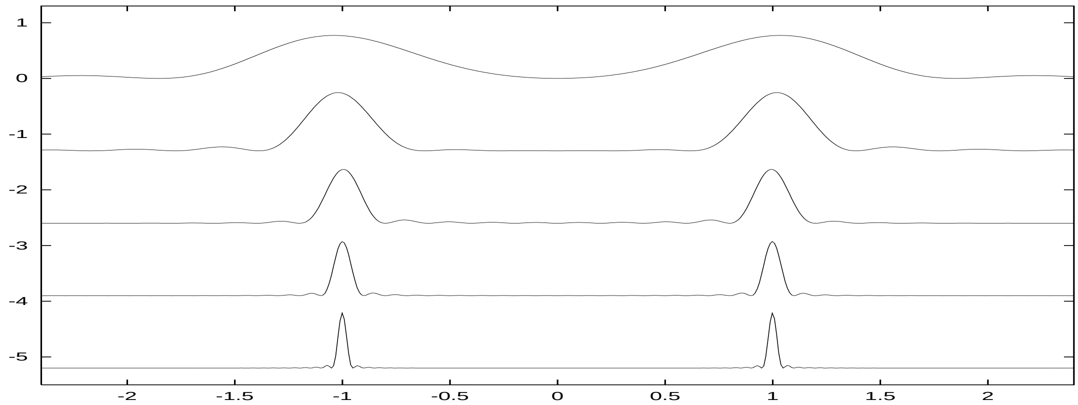

Fig. 4: Intensità di Fourier vs ω - Finestra 4,8,16,32,64

conservandola solo in parte, come contributo oscillante che influisce sulla sovrapposizione delle trasformate dei singoli suoni. Se i suoni hanno frequenze abbastanza lontane tra loro (il che vuol dire che la distanza tra le frequenze è molto maggiore dell'indeterminazione di ogni frequenza) il modulo della trasformata è praticamente insensibile al ritardo. Nella serie delle Fig.5-8 si vedono le intensità di Fourier per due suoni monocromatici di frequenza 1 e 1.5, presentati con ritardi variabili da 100 a zero, e analizzati con finestre temporali di varia lunghezza,

Il modo migliore è quello di effettuare la trasformata in un intervallo di tempo dt piccolo, e ripetere questa operazione man mano che il tempo passa, facendo scorrere l'intervallo: si ottiene in questo modo qualcosa di analogo al cosiddetto sonogramma, che consiste sostanzialmente in una successione temporale (discretizzata) di (moduli di) trasformate di Fourier, cioè di distribuzioni spettrali, dipendenti dal tempo e, ovviamente, dalla larghezza dell'intervallo; con questo sistema l'ambiguità

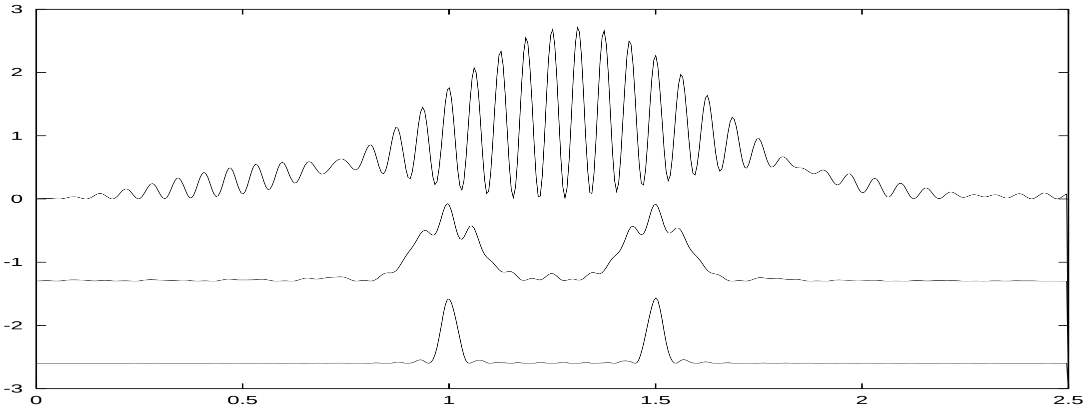

Fig. 5: Risposta alla doppia riga con ritardo 100; finestra 4,16,64

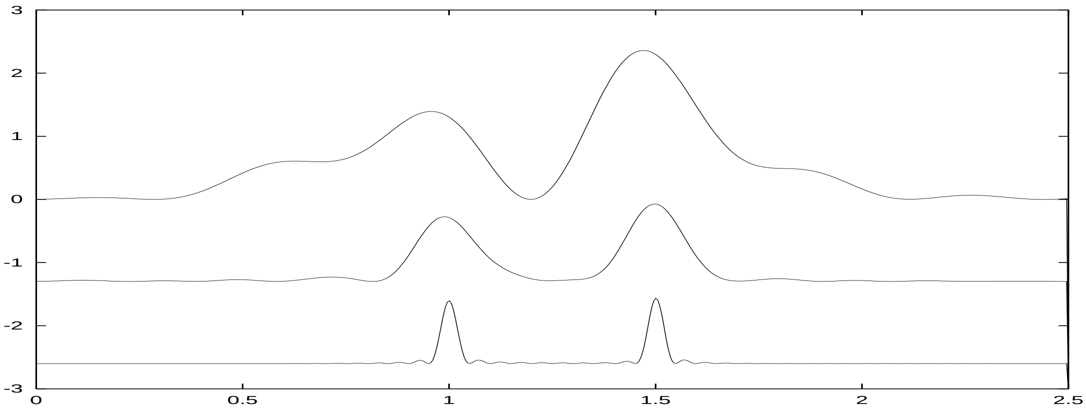

Fig. 6: Risposta alla doppia riga con ritardo 10; finestra 4,16,64

tra suoni simultanei e suoni in successione viene risolta, se non per quei suoni che si svolgono all'interno dello stesso intervallo; si paga naturalmente un prezzo: la distribuzione spettrale riguarda solo le frequenze più grandi dell'inverso dell'intervallo. In questo modo l'informazione sull'andamento della pressione, che inizialmente è solo nel tempo, per mezzo della trasformata di Fourier viene totalmente trasferito nel dominio della frequenza, ed infine con la trasformata a finestra mobile viene distribuito in entrambi i dominii, tempo e frequenza. Per poter utilizzare un'informazione, singola come la pressione o multipla come la distribuzione spettrale, che si evolve nel tempo, è necessaria una memoria: la capacità di questa memoria dovrà dipendere dalla struttura dell'informazione, che analizzeremo in uno dei prossimi paragrafi.

Possiamo ora esaminare i vari tipi di distribuzioni spettrali che possiamo trovare in un singolo intervallo dt: il caso più semplice è quello di una riga, prodotta da un suono semplicemente sinusoidale; segue il caso di un qualsiasi suono periodico, il cui

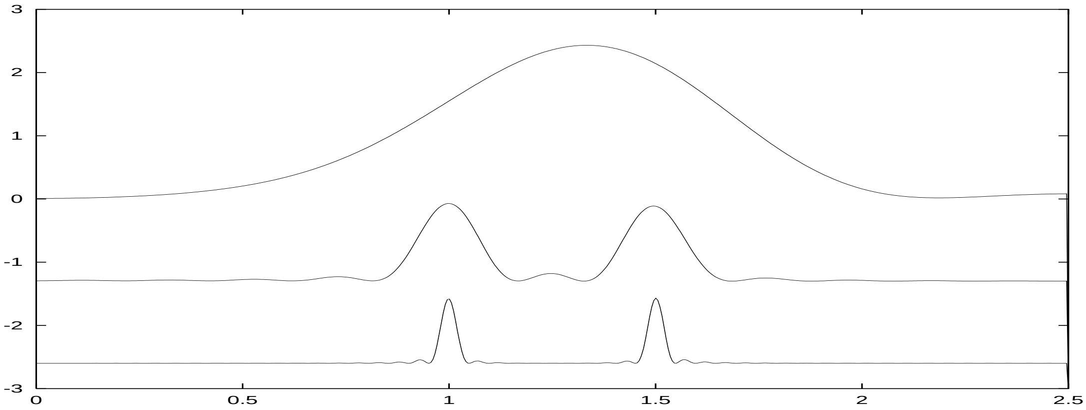

Fig. 7: Risposta alla doppia riga con ritardo 1; finestra 4,16,64

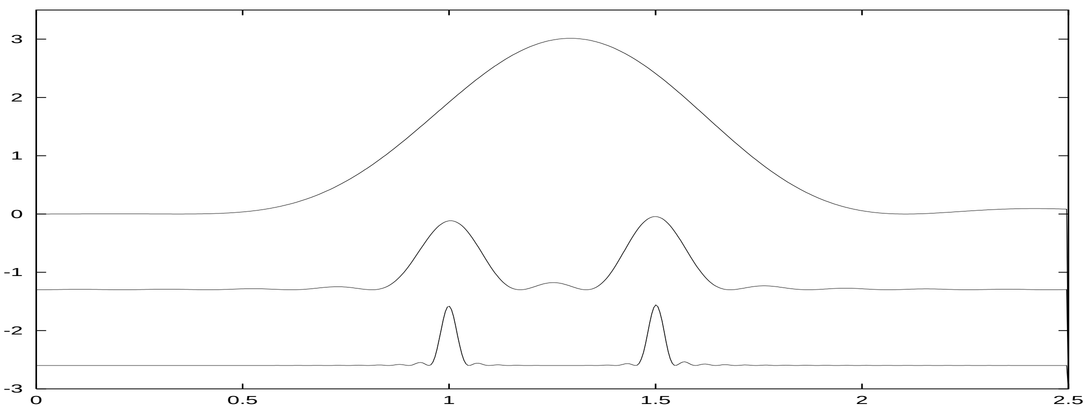

Fig. 8: Risposta alla doppia riga senza ritardo; finestra 4,16,64

spettro è dato da numerose righe, le cui frequenze sono date da multipli interi di una frequenza detta fondamentale, non necessariamente presente nello spettro; uno spettro di righe può presentare anche frequenze che non soddisfano la condizione precedente, segno che il fenomeno non è periodico; in questi tre casi la distribuzione spettrale è nulla quasi ovunque, salvo che per le frequenze coinvolte; una classe di suoni completamente diversa è quella dei cosiddetti **rumori**, caratterizzati da uno spettro continuo, quasi mai nullo. In uno stesso intervallo temporale i vari tipi di spettri possono presentarsi separatemente o sovrapposti.

Se esaminiamo l'evoluzione temporale delle distribuzioni spettrali possiamo trovare anche in questo caso diversi tipi di comportamenti: quello stazionario in cui lo spettro rimane invariato su due o anche molti intervalli, quello lentamente variabile, in cui le variazioni relative di intensità e/o di frequenza dei massimi o dei minimi della distribuzione tra un intervallo e l'altro sono piccole, e infine quello rapidamente variabile. A seconda dei casi sarà possibile effettuare una certa compressione dell'informazione, per esempio segnalando che una certa distribuzione spettrale è rimasta la stessa per un certo tempo, analogamente quanto si fa nell'informazione visiva, quando si dice che su di una superficie racchiusa da un certo contorno il colore è costante.

Che caratteristiche deve avere uno strumento capace di raccogliere queste informazioni e renderle disponibili nel più breve tempo possibile? Se pensiamo a qualcosa di equivalente alla trasformata di Fourier a finestra mobile, una volta stabilita la durata della finestra il tempo più breve è dell'ordine di grandezza di questa durata, che fissa anche il limite inferiore delle frequenze misurabili. Se lo strumento deve essere costituito da uno o più oggetti materiali occorre che questi entrino in funzione e si rendano nuovamente disponibili sulla stessa scala di tempi e abbiano sensibilità e precisione confrontabili su un ampio intervallo di frequenze. Per renderci conto delle caratteristiche di alcuni sistemi biologici che effettuano questa o analoghe operazioni notiamo che l'orecchio umano è in grado di percepire frequenze da 20 a 20000 Hz, sia pure con sensibilità e precisioni molto diverse, e una dinamica molto elevata (100db); alle dieci ottave dell'orecchio si contrappone la sola ottava dell'occhio (400-800 nanometri di lunghezza d'onda) con una dinamica molto inferiore. Anche se la natura fisica dei due sistemi percettivi è molto diversa, meccanica per l'orecchio, fotochimica per l'occhio, il principio logico è simile: vi sono dei subsistemi che rispondono selettivamente alle frequenze. Nel caso della percezione cromatica i subsistemi sono di tre tipi, i cosiddetti coni, con risposte centrate su tre valori della lunghezza d'onda e parzialmente sovrapposte, mentre nell'orecchio vi sono circa tremila unità con risposte centrate su altrettanti valori della frequenza e anch'esse sovrapposte. Questa enorme differenza nel numero dei subsistemi si traduce in una differenza nella precisione: l'occhio, contrariamente a quanto crediamo, è un sistema assai poco preciso nella determinazione del colore, tant'è vero che la stessa percezione cromatica può essere prodotta da un numero enorme di diverse distribuzioni spettrali (metameri); l'orecchio, al contrario, è capace di discriminare tra distribuzioni spettrali poco diverse, soprattutto per quelle di righe.

Vediamo allora concretamente come può essere fatto un orecchio, dal punto di vista meccanico; chiunque abbia una certa dimestichezza con il pianoforte sa che le sue corde entrano in vibrazione non solo quando vengono percosse, ma anche quando un breve suono sufficientemente intenso le investe: questo suono può essere di origine esterna allo strumento, ad esempio possiamo proiettare verso le corde il suono della voce, di una tromba o di un colpo di pistola, oppure può essere generato internamente, suonando un tasto; se lasciamo le corde libere di vibrare possiamo ascoltare quel suono per un tempo molto più lungo della durata della causa e, se potessimo osservare l'ampiezza delle oscillazioni di ogni corda, avremmo a disposizione la distribuzione spettrale; e che la distribuzione spettrale sia fedele a quella del suono originario è confermato dal fatto che un suono monocromatico mette in vibrazione una sola corda, segno evidente che la "larghezza della risposta" è minore di un semitono; tuttavia se un secondo stimolo investe le corde prima che le loro oscillazioni si siano smorzate non possiamo separare le due distribuzioni. Si vede allora che un rivelatore, per essere soddisfacente sia nel dominio della frequenza che in quello del tempo, deve essere dotato di alcune caratteristiche che ora analizzeremo in dettaglio, e che non sono necessariamente compatibili tra loro.

Il modo più semplice di affrontare il problema è quello di considerare ogni singolo elemento del rivelatore come un oscillatore armonico unidimensionale smorzato, di massa m, costante di richiamo elastica k e coefficiente di smorzamento s: un rivelatore **vero** è in genere più complicato, ma obbedisce alla stessa logica. L'oscillatore in questione viene forzato da una forza esterna, la pressione sonora dipendente dal tempo, e noi vogliamo esaminare la sua risposta: l'equazione del moto è

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + s\frac{dx}{dt} + kx = F(t), \tag{1.3}$$

dove x è lo spostamento dalla posizione di equilibrio, k la costante di richiamo elastica e s il coefficiente di smorzamento; occorre conoscere anche la posizione e la velocità iniziale $x(0)$ e $v(0)$. Prendiamo dapprima in esame il caso in cui la forza esterna è nulla e cerchiamo una soluzione della forma

$$x(t) = ae^{i\omega t}, \tag{1.4}$$

che inserita nella (1.3) dà luogo all'equazione di secondo grado in ω

$$-m\omega^2 + is\omega + k = 0, \tag{1.5}$$

che ha soluzioni:

$$\omega = is/2m \pm \omega_0\sqrt{1 - s^2/4mk}, \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}. \tag{1.6}$$

Come si vede si possono individuare due regimi: il primo, valido per $s^2 < 4mk$ corrisponde ad oscillazioni smorzate, mentre il secondo,valido per $s^2 > 4mk$ mostra solo lo smorzamento, senza oscillazioni. In ogni caso $x(t)$ si ottiene dalla combinazione lineare di due esponenziali, con coefficienti tali da soddisfare le condizioni iniziali; quando lo smorzamento è subcritico si ha

$$x(t) = \left[x_0 \cos\omega(s)t + \frac{(v_0 + x_0\gamma)}{\omega(s)} \sin\omega(s)t)\right] e^{-\gamma t} \tag{1.7}$$

dove $\omega(s) = \omega_0\sqrt{1 - s^2/4mk}$ e $\gamma = s/2m$, mentre nel caso di smorzamento supercritico si ha, avendo posto $\delta = \sqrt{1 - {\omega_0}^2/\gamma^2}$

$$x(t) = [\gamma\delta x_0 \cosh\delta t + (v_0 + \gamma x_0)\sinh\delta t]\,\frac{e^{-\gamma t}}{\gamma\delta}. \tag{1.8}$$

Un discorso a parte merita il caso di smorzamento critico, in cui le due soluzioni della (1.5) coincidono, in quanto sia l'argomento del seno che del seno iperbolico si annullano; occorre trovare una seconda forma per la soluzione, $x(t) = te^{-\gamma t}$, che soddisfa la (1.3) per $\gamma = \omega_0$; si ha allora

$$x(t) = [x_0 + (v_0 + x_0\gamma)t]e^{-\gamma t}; \tag{1.9}$$

esaminando i vari andamenti si vede che lo smorzamento critico è quello al quale corrisponde lo smorzamento più veloce, che è dell'ordine di un periodo di oscillazione propria.

Nelle Fig.9-11 è illustrato l'andamento temporale di un oscillatore armonico, con diversi valori del coefficiente di smorzamento e diverse condizioni iniziali.

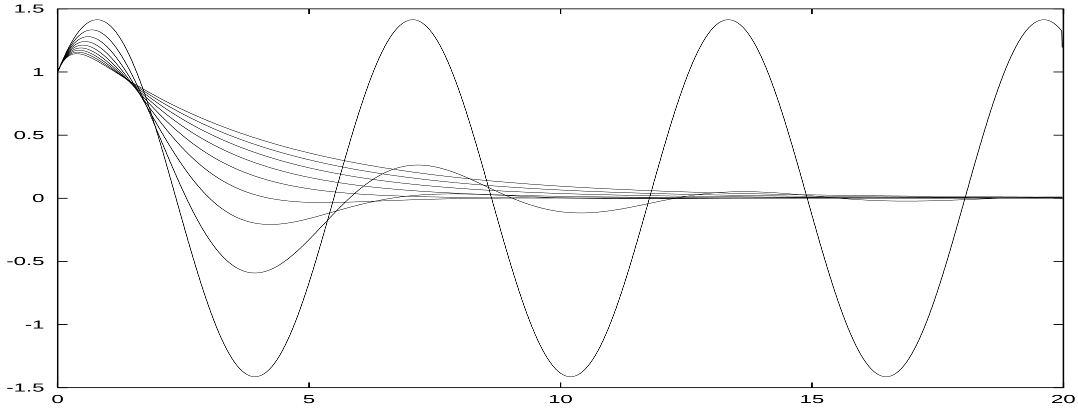

Fig. 9: Oscillazioni smorzate; $x(0) = 1, v(0) = 1; s = 0, 0.5, ..., 4$

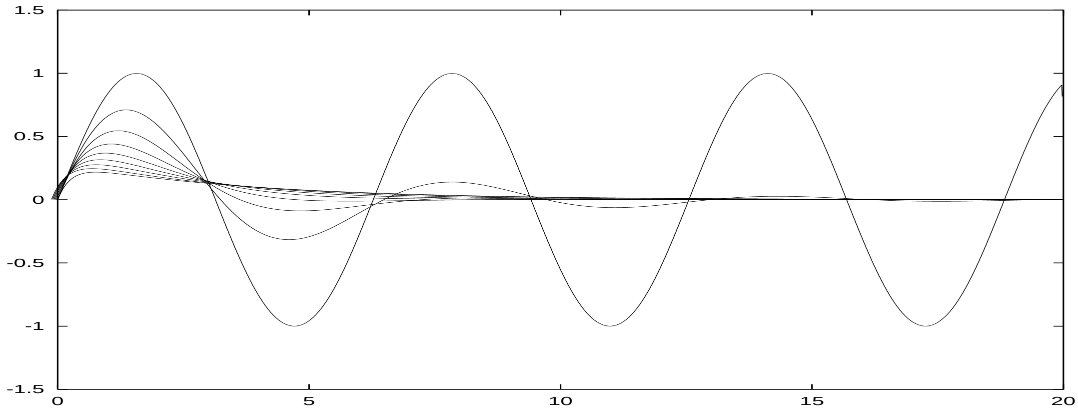

Fig. 10: Oscillazioni smorzate; $x(0) = 0, v(0) = 1; s = 0, 0.5, ..., 4$

Esaminiamo ora il caso che più ci interessa, quello dell'oscillatore smorzato e forzato dall'esterno con una forza di tipo sinusoidale, che rappresenteremo, per ora con il solito esponenziale complesso $F(t) = A\exp(i\Omega t)$; l'equazione del moto (1,3)

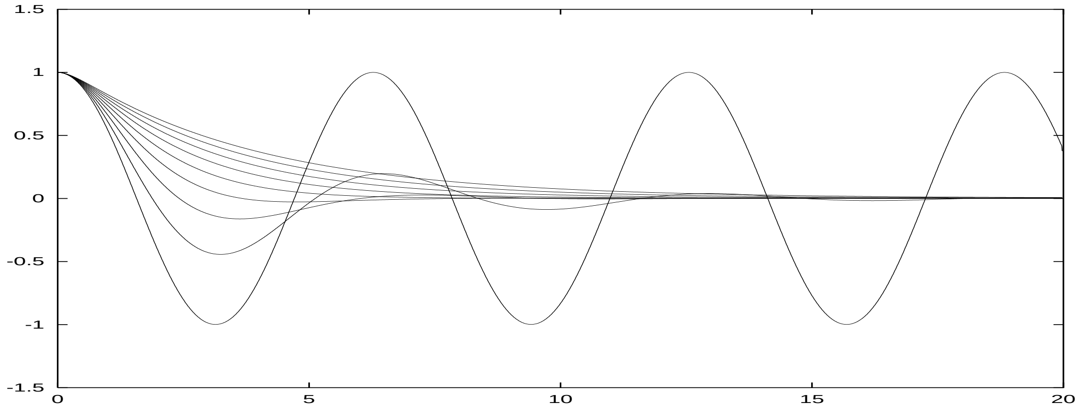

Fig. 11: Oscillazioni smorzate; $x(0) = 1, v(0) = 0; s = 0, 0.5, ..., 4$

si risolve con una combinazione lineare della soluzione generale dell'equazione omogenea precedentemente discussa e di una soluzione particolare dell'equazione disomogenea, che assumiamo della forma $X \exp(i\Omega t)$; inserendola nella (1,3) si ottiene per l'ampiezza X dell'oscillazione forzata

$$X = \frac{A}{-m\Omega^2 + is\Omega + k} = \frac{e^{i(\Omega t - \arctan(s\Omega/(k-m\Omega^2))}}{\sqrt{m^2\Omega^4 - (s^2 - 2mk)\Omega^2 + k^2}}; \tag{1.10}$$

si vede che il denominatore presenta un minimo (e quindi un massimo per l'ampiezza) per

$$\Omega^2 = {\omega_0}^2 - 2\gamma^2, \tag{1.11a}$$

nel qual caso l'ampiezza vale

$$X_{max} = \frac{1}{2m\gamma\sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2}}; \tag{1.11b}$$

si vede che la frequenza di risonanza decresce all'aumentare del coefficiente di smorzamento, fino a diventare immaginaria quando $\gamma^2 = {\omega_0}^2/2$; la semilarghezza a metà altezza del quadrato dell'ampiezza (che corrisponde all'intensità) è $\gamma\sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2}$ che si riduce a $\gamma\omega_0$ quando $\gamma << \omega_0$; nelle stesse condizioni la larghezza relativa è γ/ω_0.

Osservando la Fig.12 che mostra l'andamento della risposta in funzione della frequenza forzante e del coefficiente di smorzamento si nota la transizione tra il regime risonante ($\gamma << \omega_0$) e quello critico o supercritico: in regime risonante il sistema risponde in modo selettivo agli stimoli, esaltando la componente corrispondente alla sua frequenza propria; al contrario avvicinanodsi al regime critico il sistema presenta una risposta, relativamente piatta per tutte le frequenze inferiori a circa $0.7\omega_0$ e pari alla risposta statica, che poi decade di circa un ordine di grandezza per frequenza

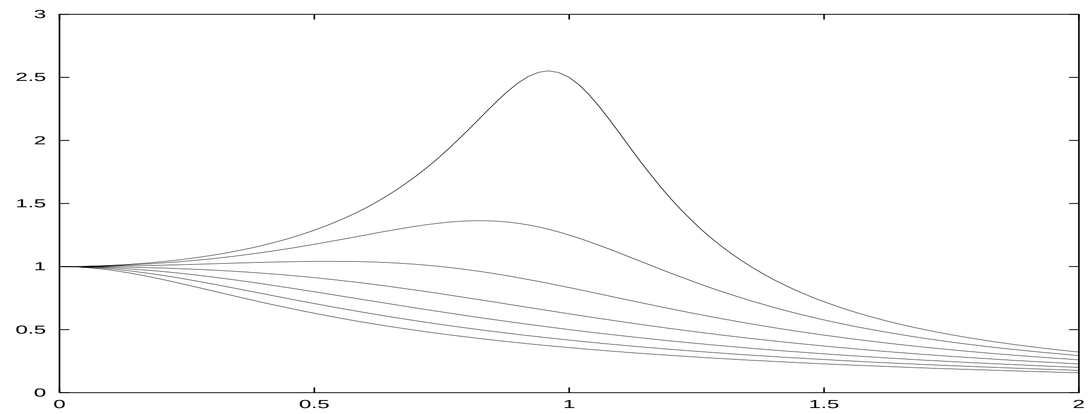

Fig. 12: Risposta di un oscillatore forzato per diversi valori dello smorzamento: s(i)=i/2.5.

quadrupla della frequenza propria; superato il valore critico la risposta risulta sempre inferiore a quella statica. Si può allora concludere che per progettare una sistema capace di riprodurre gli stimoli in un certo intervallo di frequenza senza introdurre apprezzabili distorsioni, conviene scegliere la sua frequenza propria in modo che sia circa una volta e mezzo più grande della massima frequenza d'interesse; al contrario un sistema che deve analizzare il contenuto in frequenza di un segnale complesso deve essere molto selettivo, ma deve essere costituito da un grande numero di rivelatori al fine di coprire un intervallo di frequenza grande rispetto alla larghezza di risposta di ogni singolo elemento. Il prezzo che si paga per ottenere questo risultato è una scarsa precisione nella risposta temporale, dato che ogni elemento eccitato, a causa del piccolo smorzamento, continuerà a oscillare anche dopo la cessazione dello stimolo, per un tempo inversamente proporzionale a γ.

Supponiamo di dover progettare un sistema di analisi in frequenza basato su un certo numero di oscillatori: in che modo conviene sceglierne le frequenze proprie, i coefficienti di smorzamento, e quindi le caratteristiche fisiche che determinano questi parametri che, per un sistema meccanico sono le masse le superfici e le costanti di richiamo elastiche? Per fissare le idee immaginiamo che ogni oscillatore il quale, ricordiamolo, deve essere unidimensionale per obbedire alla (1,3), sia costituito da un dischetto circolare di massa m, area S, spessore d, mantenuto nella sua posizione di riposo da una molla di costante k: possiamo scegliere a piacere tutte queste grandezze, tenendo presente che esiste la relazione $m = Sd\rho$, dove ρ è la densità del materiale.

Le nostre esigenze sono quelle di coprire un certo intervallo di frequenza, di avere una certa precisione (assoluta o relativa) nella determinazione delle frequenze, di avere dei tempi di latenza non troppo lunghi, di impiegare non più di un certo numero di rivelatori, e "last but not least" di non spendere troppo. L'intervallo di frequenza vada da 1 a 10, in unità arbitrarie e il numero di oscillatori sia n; come scegliere le frequenze proprie e le larghezze in modo da non avere buchi nella risposta complessiva? La distanza tra una frequenza propria e quella successiva deve essere circa uguale alla larghezza della risposta, in modo che la sovrapposizione coinvolga solo primi vicini: questo suggerirebbe di dividere l'intervallo in n parti uguali e dare a ogni oscillatore una larghezza di banda pari ad una di queste parti; in questo modo l'errore sulla frequenza è costante, ma l'errore relativo decresce all'aumentare della frequenza; la cosa è irrilevante se l'intervallo è piccolo rispetto alla sua frequenza centrale, ma diventa catastrofica se l'intervallo è grande, come nel caso del nostro orecchio che copre circa tre ordini di grandezza: un'errore di 20Hz è trascurabile a 20000Hz ma diventa enorme a 20Hz.

Conviene allora che γ sia proporzionale alla frequenza, in modo che la larghezza relativa sia costante; ma allora la distanza tra le frequenze dei risuonatori non può essere costante, perché la sovrapposizione tra le risposte dei primi vicini non sarebbe ottimale; occorre allora che la distanza varii, e questo lo si ottiene facendo sì che il rapporto tra le frequenze sia costante. Come si vede dalle figure il risultato è notevole, perché anche l'ampiezza della risposta risulta indipendente alla frequenza. Il solo inconveniente di un sistema siffatto è il lungo tempo di decadimento, che lo rende poco adatto all'analisi spettrale e alla rilevazione di segnali rapidamente variabili: se pensiamo ad un sistema percettivo naturale, che debba anche avvertire l'utente dell'esistenza e della variazione d'intensità di un segnale, possiamo associare al banco dei rivelatori appena progettato un singolo risuonatore, di frequenza propria molto grande, a smorzamento critico, dotato quindi di un tempo di reazione estremamente rapido.

Il sistema proposto è estremamente semplice, in quanto si basa su oscillatori unidimensionali esposti direttamente allo stimolo acustico senza nessuna struttura intermedia, ed è quindi ben lontano dalla complessità dell'orecchio, in cui tra il banco di oscillatori con cui si suole schematizzare la coclea e lo stimolo acustico si trovano la membrana del timpano, la catena ossicolare dell'orecchio medio, la finestra ovale e il liquido che trasmette le vibrazioni; per di più gli oscillatori sono certamente più complessi. Eppure la loro distribuzione in frequenza e le loro larghezze assomigliano molto a quanto illustrato nella Figg.17,18.

Forse questo non è casuale, e significa probabilmente che soddisfa un certo requisito di efficienza e di economicità.

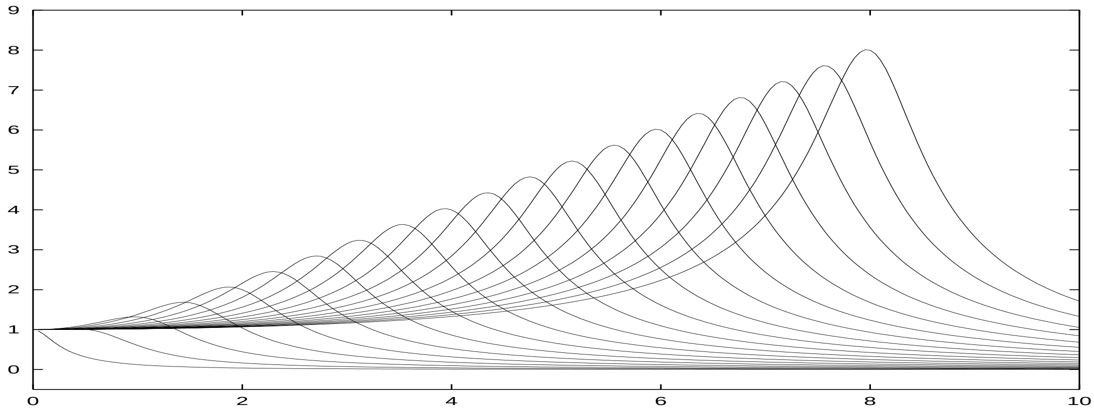

Fig. 13: Risposta di un banco di risuonatori con frequenze proprie equidistanziate; scala lineare; $\gamma = 0.5$

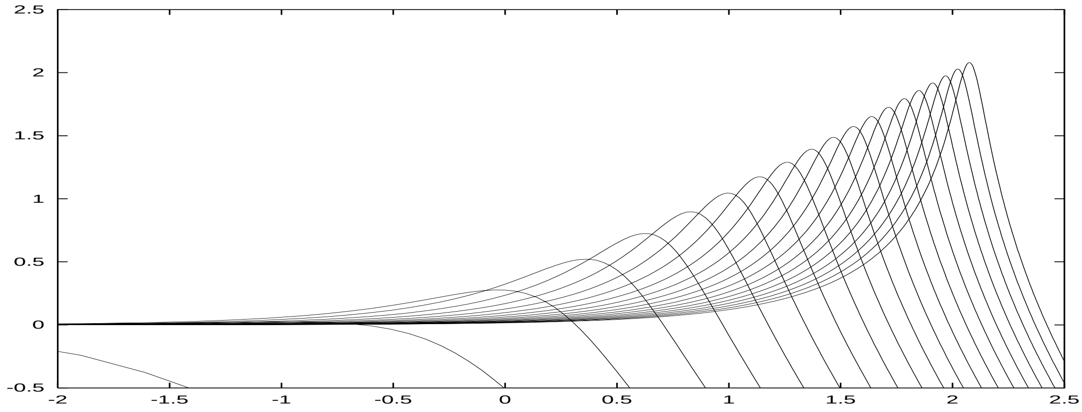

Fig. 14: Come nella figura precedente; scala logaritmica; $\gamma = 0.5$

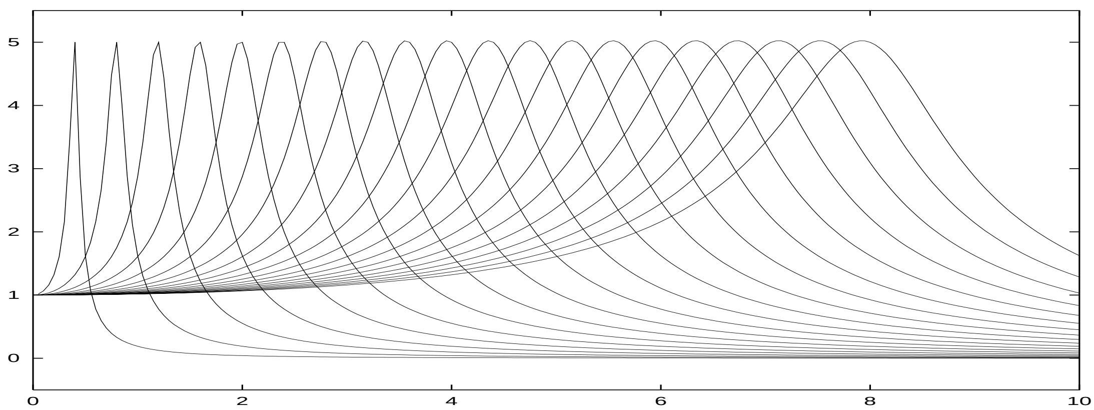

Fig. 15: Risposta di un banco di risuonatori con frequenze proprie equidistanziate; scala lineare; $\gamma = 0.1\omega$

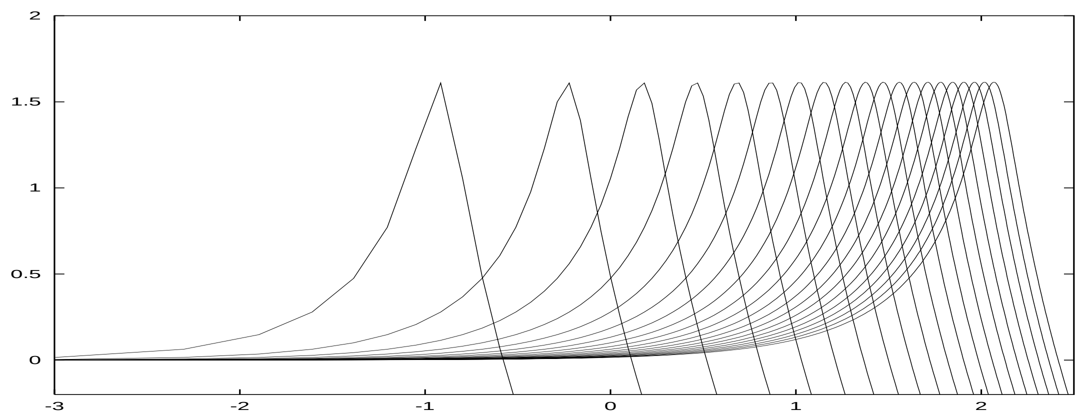

Fig. 16: Come nella figura precedente;; scala logarimica; $\gamma = 0.1\omega$

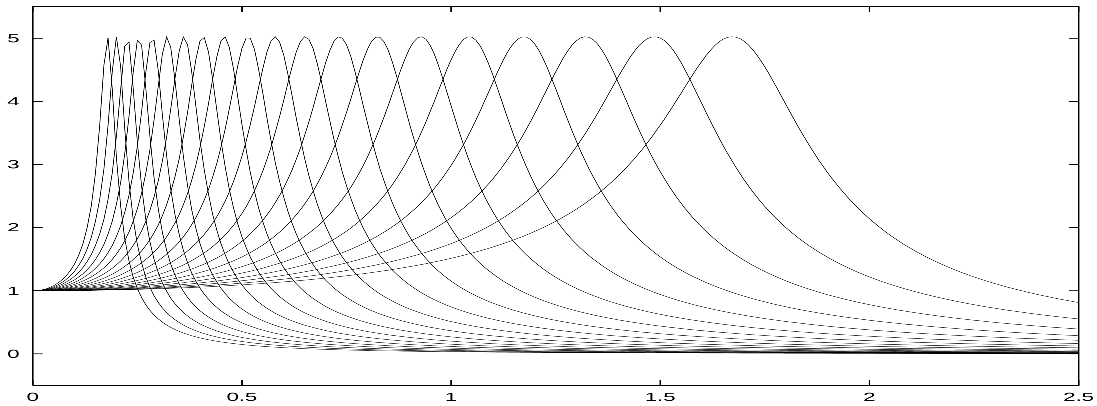

Fig. 17: Risposta di un banco di risuonatori con frequenze proprie ad incremento relativo costante; scala lineare; $\gamma = 0.1\omega$

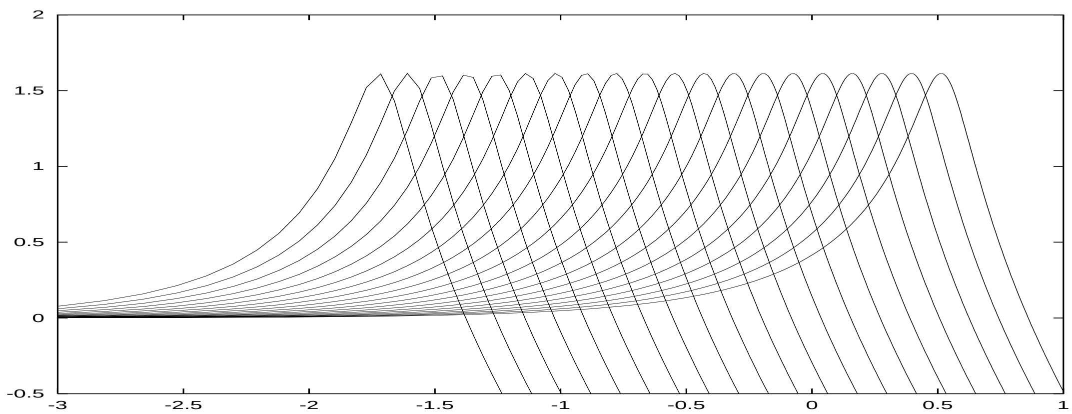

Fig. 18: Come nella figura precedente; scala logaritmica;$\gamma = 0.1\omega$