Roma, 4-8 febbraio 2008
Dip.to di Matematica, Università "La Sapienza"
Seminario: Didattica "a ruota libera"

Talvolta alcuni esercizi ci sorprendono lasciandoci di primo acchitto disorientati, per regalarci, poi, inattese soddisfazioni, o insoliti spunti didattici, allorché ne veniamo fuori in qualche modo. Sono perlopiù esercizi della tipologia proposta nelle varie competizioni (ovviamente per studenti delle superiori). Credo valga la pena, per la propria formazione di insegnante, sapersi costruire e coltivare nel tempo un proprio personale portafoglio di tali esercizi, proponendone magari qualcuno, ogni tanto, a quegli studenti più promettenti o comunque più esigenti, e magari a qualche collega bendisposto a misurarsi. Potremmo allora scoprire che qualcun altro, solleticato dal nostro "guanto di sfida", abbia saputo cogliere qualche aspetto interessante, un "escamotage", sfuggito alla nostra attenzione. Questo non fa che arricchirci sempre di più e certamente contribuisce, a mio avviso, a creare tra studenti, tra studenti e insegnanti, e magari tra colleghi, quel clima di amichevole confronto-sfida e scambio reciproco necessari, direi indispensabili, per un'autentica crescita e maturazione matematica.

Con tale spirito, verranno proposti e discussi insieme alcuni di tali esercizi che hanno colpito il sottoscritto, riportati in questo documento e appositamente tratti dalla mia raccolta "*A ruota libera*", *Esercizi di matematica elementare a sviluppo didattico*

Luigi Cenci

Mathematics is made of :
50 percent definitions and theorems,
50 percent proofs,
and 50 percent imagination.

Golden rule for math teachers :
You must tell the truth,
and nothing but the truth,
but not the whole truth.

(http://www.math.unipd.it/~maurizio/indexV.html)

luigi.cenci@alice.it
333-85.90.627
Albano Laziale (RM)

ES-071

---

a) Spiegare il seguente paradosso: $-1=1$

“<u>Dim.</u>” $$-1=(-1)^1=(-1)^{\frac{1}{1}}=(-1)^{\frac{2}{2}}=\left((-1)^2\right)^{\frac{1}{2}}=1^{\frac{1}{2}}=1$$

b) Provare che $\dfrac{10^n-9\cdot n-1}{81}=123\ldots(n-1)$, $\forall n\in\mathbb{N}:\ 2\le n\le 10$

c) Congetturare e provare una formula che spieghi i seguenti *patterns* numerici:

i)
$$\begin{aligned}
12345679\cdot 9 &= 111111111\\
12345679\cdot 18 &= 222222222\\
12345679\cdot 27 &= 333333333\\
12345679\cdot 36 &= 444444444\\
12345679\cdot 45 &= 555555555\\
12345679\cdot 54 &= 666666666\\
12345679\cdot 63 &= 777777777\\
12345679\cdot 72 &= 888888888\\
12345679\cdot 81 &= 999999999
\end{aligned}$$

ii)
$$\begin{aligned}
1\cdot 9+2 &= 11\\
12\cdot 9+3 &= 111\\
123\cdot 9+4 &= 1111\\
1234\cdot 9+5 &= 11111\\
12345\cdot 9+6 &= 111111\\
123456\cdot 9+7 &= 1111111\\
1234567\cdot 9+8 &= 11111111\\
12345678\cdot 9+9 &= 111111111\\
123456789\cdot 9+10 &= 1111111111
\end{aligned}$$

iii)
$$\begin{aligned}
9\cdot 9+7 &= 88\\
98\cdot 9+6 &= 888\\
987\cdot 9+5 &= 8888\\
9876\cdot 9+4 &= 88888\\
98765\cdot 9+3 &= 888888\\
987654\cdot 9+2 &= 8888888\\
9876543\cdot 9+1 &= 88888888\\
98765432\cdot 9+0 &= 888888888\\
987654321\cdot 9+(-1) &= 8888888888
\end{aligned}$$

iv)
$$\begin{aligned}
49 &= 7^2\\
4489 &= 67^2\\
444889 &= 667^2\\
44448889 &= 6667^2\\
4444488889 &= 66667^2\\
\iddots\quad &\vdots\quad \iddots
\end{aligned}$$

d) Calcolare mentalmente $\dfrac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}$

[**a)** Contradictions 1.2.3 di FAQ fr.sci.maths, Gruppo di discussione francese, gestito da Raphaël Giromini, destinato a raccogliere interessanti questioni e problemi vari di matematica - http://usenet.alea.net/entraide/rg/maths/FAQ.pdf. **b)** Ex 53 pag. 99, **c**.i) Ex 17 pag. 98, **c**.ii) Ex 2.18 pag. 94, **c**.iii) Ex 2.21 pag. 97, Chap. 2, *Elementary Number Theory with Applications*, di Thomas Koshy - Harcourt/Academic Press, 2002; **c**.iv) Ex 5.2.32, Course Mathematics 208b-2003 “Introduction to Mathematical Problems”, by Mike Dawes, Associate Professor, Department of Mathematics of the University of Western Ontario, London, Ontario, Canada - http://www.math.uwo.ca/~mdawes/courses/208/03/. **d)** Esercizio del 30-01-2007, corso di Didattica della Matematica, prof. Paolo Maroscia - S.S.I.S. Lazio, Indirizzo F.I.M., VIII Ciclo, A.A. 2006-07]

---

a)

L’errore sta nel passaggio $(-1)^{\frac{2}{2}} = \left((-1)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

In $\mathbb{R}$, la nozione di *potenza* viene estesa ad esponenti razionali *soltanto per basi positive* :

$(\forall a \in \mathbb{R}: \ a > 0) \wedge (\forall m, n \in \mathbb{Z}: \ n > 1)$, si pone

dapprima $a^{\frac{1}{n}} \overset{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a}$, sapendo già cosa sia $\sqrt[n]{a}$ [quell'unico numero reale positivo x tale che $x^n = a$]

e *solo poi* $a^{\frac{m}{n}} \overset{\text{def}}{=} \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

Si potrebbe obiettare che la restrizione $a > 0$ contenuta nella suddetta definizione, mentre è senz’ombra di dubbio necessaria, se si vuole rimanere in $\mathbb{R}$, allorché n è pari, sia invece fuori luogo per n dispari, giacché sappiamo bene che, ad esempio, $\sqrt[3]{-1} = -1$ in $\mathbb{R}$. Basta allora controbattere che $\sqrt[3]{-1} = -\sqrt[3]{+1}$, ossia che il senso da dare a $\sqrt[3]{-1}$ è quello di essere semplicemente l’*opposto* di $\sqrt[3]{+1}$, rientrando così di diritto nell’alveo della suddetta restrizione concentrandoci su $\sqrt[3]{+1}$ e non su $\sqrt[3]{-1}$. Ad esempio, la scrittura $\left(\sqrt[3]{-1}\right)^n = (-1)^n$, *formalmente* sbagliata, viene accettata nella prassi per abbreviare la scrittura $\left(\sqrt[3]{-1}\right)^n = \left(-\sqrt[3]{+1}\right)^n = (-1)^n \cdot \left(\sqrt[3]{+1}\right)^n = (-1)^n \cdot (+1)^n = (-1)^n \cdot (+1) = (-1)^n$, più precisa ma noiosa.

La morale è che è sempre preferibile una definizione che sia più generale, più ampia, possibile, senza doversi impelagare nella distinzione di casi e sottocasi.

Tornando al nostro paradosso, è lecito, pertanto, scrivere $-1 = (-1)^{\frac{n}{n}}$, $\forall n \in \mathbb{Z}: \ n > 1$, e lo è, certamente, anche scrivere $(-1)^{\frac{n}{n}} = (-1)^{\frac{1}{n}\cdot n} = (-1)^{n \cdot \frac{1}{n}}$, ma qui *mi fermo*, dato che la presenza di una base negativa impedisce l’utilizzo della nozione di potenza ad esponente razionale. In altre parole, non posso proseguire impunemente scegliendo l’una o l’altra delle due scritture $(-1)^{\frac{1}{n}\cdot n}$, $(-1)^{n\cdot\frac{1}{n}}$, perché, tanto, vale la nota regola della potenza di potenza $a^{bd} = \left(a^b\right)^d = \left(a^d\right)^b$. Quest’ultima appartiene al dominio degli esponenti interi, si può *provare* che continua a valere per $(a > 0) \wedge (b \vee d \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z})$, ma non può essere presa in considerazione se $(a < 0) \wedge (b \vee d \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z})$.

E difatti, non posso dire che $(-1)^{\frac{n}{n}} = \left((-1)^{\frac{1}{n}}\right)^n$ perché violo la definizione di potenza ad esponente razionale - introducendo, peraltro, un possibile, e non richiesto, elemento $\notin \mathbb{R}$ - e non posso dire che $(-1)^{\frac{n}{n}} = \left((-1)^n\right)^{\frac{1}{n}}$ perché implica l’assurdo $-1 = 1$.

b)

Uso le progressioni geometriche

$$\mathrm{RHS} = 123\ \ldots\ (n-1)$$

$$=1\cdot 10^{n-2}+2\cdot 10^{n-3}+3\cdot 10^{n-4}+\ \ldots\ +(n-2)\cdot 10+(n-1)$$

$$\begin{array}{rrrrrrl}
= & 10^{n-2}+ & 10^{n-3}+ & 10^{n-4}+\ \ldots\ + & 10+ & 1 & =\dfrac{10^{n-1}-1}{10-1}=\dfrac{10^{n-1}}{9}-\dfrac{1}{9} \\
 & + & 10^{n-3}+ & 10^{n-4}+\ \ldots\ + & 10+ & 1 & =\dfrac{10^{n-2}-1}{10-1}=\dfrac{10^{n-2}}{9}-\dfrac{1}{9} \\
 & & + & 10^{n-4}+\ \ldots\ + & 10+ & 1 & =\dfrac{10^{n-3}-1}{10-1}=\dfrac{10^{n-3}}{9}-\dfrac{1}{9} \\
 & & & \ddots \quad \vdots & \vdots & \vdots & \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
 & & & +10^{2}+ & 10+ & 1 & =\dfrac{10^{3}-1}{10-1}=\dfrac{10^{3}}{9}-\dfrac{1}{9} \\
 & & & + & 10+ & 1 & =\dfrac{10^{2}-1}{10-1}=\dfrac{10^{2}}{9}-\dfrac{1}{9} \\
 & & & & + & 1 & =\dfrac{10-1}{10-1}=\dfrac{10}{9}-\dfrac{1}{9}
\end{array}$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\left(10^{n-1}+10^{n-2}+10^{n-3}+\ \ldots\ +10^{3}+10^{2}+10\right)-\frac{1}{9}\cdot(n-1)$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{10^{n}-10}{10-1}-\frac{1}{9}\cdot(n-1)$$

$$=\frac{10^{n}-1-9}{81}-\frac{1}{9}\cdot n+\frac{1}{9}$$

$$=\frac{10^{n}-1}{81}\cancel{-\frac{1}{9}}-\frac{1}{9}\cdot n\cancel{+\frac{1}{9}}$$

$$=\frac{10^{n}-9\cdot n-1}{81}=\mathrm{LHS}$$

c.i)

Congettura: la riga n-esima, $\forall n\in\mathbb{N}:\ 1\le n\le 9$, è generata dalla seguente formula

$$12345679\cdot 9\cdot n=\underbrace{nnnnnnnnn}_{9\ \text{"n"}}$$

I <u>Dim.</u>

Uso la formula dell’esercizio precedente

$$\mathrm{LHS} = 12345679\cdot 9\cdot n = \left(\frac{\overbrace{10^8-9\cdot 8-1}^{1234567}}{81}\cdot 10+9\right)\cdot 9\cdot n$$

$$= \left(\frac{10^8-9\cdot 8-1}{81}\cdot 10+9\right)\cdot 9\cdot n$$

$$= \frac{10^9-10\cdot 9\cdot 8-10+9^3}{9\cdot \cancel{9}}\cdot \cancel{9}\cdot n$$

$$= \frac{10^9-(9+1)\cdot 9\cdot (9-1)-10+9^3}{9}\cdot n$$

$$= \frac{10^9-9\cdot (9^2-1)-10+9^3}{9}\cdot n$$

$$= \frac{10^9\cancel{-9^3}+9-10\cancel{+9^3}}{9}\cdot n$$

$$= \frac{10^9-1}{9}\cdot n = \frac{\overbrace{999999999}^{9\ \text{"nove"}}}{9}\cdot n = \underbrace{111111111}_{9\ \text{"uno"}}\cdot n = \underbrace{nnnnnnnnn}_{9\ \text{"n"}} = \mathrm{RHS}$$

II <u>Dim.</u>

Uso opportune manipolazioni algebriche e di nuovo le progressioni geometriche

$$\mathrm{LHS} = (1\cdot 10^7+2\cdot 10^6+3\cdot 10^5+4\cdot 10^4+5\cdot 10^3+6\cdot 10^2+7\cdot 10+9)\cdot(10-1)\cdot n$$

$$= (1\cdot 10^8+2\cdot 10^7+3\cdot 10^6+4\cdot 10^5+5\cdot 10^4+6\cdot 10^3+7\cdot 10^2+9\cdot 10)\cdot n +$$
$$(\quad -1\cdot 10^7-2\cdot 10^6-3\cdot 10^5-4\cdot 10^4-5\cdot 10^3-6\cdot 10^2-7\cdot 10-9)\cdot n$$

$$= (10^8+10^7+10^6+10^5+10^4+10^3+10^2+2\cdot 10-9)\cdot n$$

$$= (10^8+10^7+10^6+10^5+10^4+10^3+10^2+10)\cdot n+10\cdot n-9\cdot n$$

$$= \frac{10^{8+1}-10}{10-1}\cdot n + n$$

$$= \frac{10^9-1-9}{9}\cdot n+n$$

$$= \frac{10^9-1}{9}\cdot n\cancel{-n}\cancel{+n}$$

$$=\frac{10^9-1}{9}\cdot n=\underbrace{nnnnnnnnn}_{9\ \text{"n"}}=\text{RHS}$$

c.ii)

Congettura: la riga n-esima, $\forall n\in\mathbb{N}:\ 1\le n\le 9$, è generata dalla seguente formula

$$(123\ \dots\ n)\cdot 9+(n+1)=\underbrace{11\ \dots\ 11}_{n+1\ \text{"uno"}}$$

<u>Dim.</u>

$$\text{LHS}=\left(1\cdot 10^{n-1}+2\cdot 10^{n-2}+3\cdot 10^{n-3}+\ \dots\ +(n-1)\cdot 10+n\right)\cdot(10-1)+(n+1)$$

$$=\left(1\cdot 10^{n}+2\cdot 10^{n-1}+3\cdot 10^{n-2}+\ \dots\ +\quad n\cdot 10+\quad\right)+$$

$$\left(\quad -1\cdot 10^{n-1}-2\cdot 10^{n-2}-\ \dots\ -(n-1)\cdot 10-n\right)+(n+1)$$

$$=\ 10^{n}+\ 10^{n-1}+\ 10^{n-2}+\ \dots\ +\ 10\cancel{-n}\cancel{+n}+1$$

$$=\frac{10^{n+1}-10}{10-1}+1$$

$$=\frac{10^{n+1}-1-9}{9}+1=\frac{10^{n+1}-1}{9}\cancel{-1}\cancel{+1}=\frac{\overbrace{99\ \dots\ 99}^{n+1\ \text{"nove"}}}{9}=\underbrace{11\ \dots\ 11}_{n+1\ \text{"uno"}}=\text{RHS}$$

c.iii)

Congettura: la riga n-esima, $\forall n\in\mathbb{N}:\ 1\le n\le 9$, è generata dalla seguente formula

$$\underbrace{987\ \dots\ (10-n)}_{\substack{9-(10-n)+1\ =\ n\ \text{cifre}\\ \text{a scalare a partire da } 9}}\cdot 9+(8-n)=\underbrace{88\ \dots\ 88}_{n+1\ \text{"otto"}}$$

<u>Dim.</u>

$$\text{LHS}=\left(9\cdot 10^{n-1}+8\cdot 10^{n-2}+7\cdot 10^{n-3}+\ \dots\ +(11-n)\cdot 10+(10-n)\right)\cdot(10-1)+(8-n)$$

$$=\left(9\cdot 10^{n}+8\cdot 10^{n-1}+7\cdot 10^{n-2}+\ \dots\ +(11-n)\cdot 10^2+(10-n)\cdot 10\qquad\right)+$$

$$\left(\quad -9\cdot 10^{n-1}-8\cdot 10^{n-2}-\ \dots\ -(12-n)\cdot 10^2-(11-n)\cdot 10\ -(10-n)\right)+(8-n)$$

$$=\ 9\cdot 10^{n}-\left(\ 10^{n-1}+\ 10^{n-2}+\ \dots\ +\ 10^2+\ 10\right)-(10-n)+(8-n)$$

$$=\ 9\cdot 10^{n}\qquad -\frac{10^{n}-10}{10-1}\qquad -\qquad 2$$

$$=(10-1)\cdot 10^{n}-\frac{10^{n}-1-9}{9}-2$$

$$=10^{n+1}-10^{n}-\frac{10^{n}-1}{9}+1-2$$

$$=10^{n+1}-\left(10^{n}+\frac{10^{n}-1}{9}\right)-1$$

$$=10^{n+1}-\frac{10^{n+1}-1}{9}-1$$

$$=\frac{(9-1)\cdot 10^{n+1}-(9-1)}{9}$$

$$=8\cdot\frac{10^{n+1}-1}{9}=8\cdot\frac{\overbrace{99\ ...\ 99}^{n+1\ \text{"nove"}}}{9}=8\cdot\underbrace{11\ ...\ 11}_{n+1\ \text{"uno"}}=\underbrace{88\ ...\ 88}_{n+1\ \text{"otto"}}=\text{RHS}$$

c.iv)

Congettura: la riga n- esima, $\forall n\in\mathbb{N}:\ n\geq 1$, è generata dalla seguente formula

$$\overbrace{\underbrace{444\ ...\ 44}_{n\ \text{"quattro"}}\underbrace{88\ ...\ 88}_{n-1\ \text{"otto"}}9}^{2n\ \text{cifre}}=\left(\overbrace{\underbrace{66\ ...\ 66}_{n-1\ \text{"sei"}}7}^{n\ \text{cifre}}\right)^{2}$$

I <u>Dim.</u>

$$\text{RHS}=\left(\left(6\cdot 10^{n-2}+6\cdot 10^{n-3}+\ ...\ +6\cdot 10+6\right)\cdot 10+7\right)^{2}$$

$$=\left(6\cdot 10^{n-1}+6\cdot 10^{n-2}+\ ...\ +6\cdot 10^{2}+6\cdot 10+\overbrace{6+1}^{7}\right)^{2}$$

$$=\left(6\cdot\left(10^{n-1}+10^{n-2}+\ ...\ +10^{2}+10+1\right)+1\right)^{2}$$

$$=\left(6\cdot\frac{10^{n}-1}{10-1}+1\right)^{2}$$

$$=\left(\frac{2\cdot 10^{n}+1}{3}\right)^{2}$$

$$=\frac{4\cdot 10^{2n}+4\cdot 10^{n}+1}{9}$$

$$=\frac{4\cdot 10^{2n}-4+4\cdot 10^{n}-4+8+1}{9}$$

$$= 4 \cdot \frac{10^{2n} - 1}{9} + 4 \cdot \frac{10^{n} - 1}{9} + \mathbf{1}$$

$$= 4 \cdot \left(10^{2n-1} + 10^{2n-2} + 10^{2n-3} + \ \dots \ + 10^{n+1} + 10^{n} \ + \ 10^{n-1} + 10^{n-2} + \ \dots \ + 10^{2} + 10 \ + 1\right) \ +$$

$$4 \cdot \left(\qquad 10^{n-1} + 10^{n-2} + \ \dots \ + 10^{2} + 10 \ + 1\right) \ +$$

$$\mathbf{1}$$

$$= 4 \cdot \left(10^{2n-1} + 10^{2n-2} + 10^{2n-3} + \ \dots \ + 10^{n+1} + 10^{n}\right) + 8 \cdot \left(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ \dots \ + 10^{2} + 10\right) \ + 9$$

$$= \ 4 \cdot \left(10^{n-1} + 10^{n-2} + 10^{n-3} + \ \dots \ + 10 + 1\right) \cdot 10^{n} \ + 8 \cdot \left(10^{n-2} + 10^{n-3} + \ \dots \ + 10 + 1\right) \cdot 10 \ + 9$$

$$= \qquad 4 \cdot \underbrace{111 \ \dots \ 11}_{n \ \text{"uno"}} \cdot 10^{n} \qquad + \qquad 8 \cdot \underbrace{11 \ \dots \ 11}_{n \ \text{"uno"}} \cdot 10 \qquad + 9$$

$$= \qquad \overbrace{\underbrace{444 \ \dots \ 44}_{n \ \text{"quattro"}} \underbrace{000 \ \dots \ 00}_{n \ \text{"zero"}}}^{2n \ \text{cifre}} \qquad + \qquad \overbrace{\underbrace{88 \ \dots \ 88}_{n-1 \ \text{"otto"}} 0}^{n \ \text{cifre}} \qquad + 9$$

$$\begin{array}{r} = 444 \ \dots \ 44000 \ \dots \ 00 + \\ 88 \ \dots \ 880 + \\ 9 \ \ \\ \hline \end{array}$$

$$= \underbrace{444 \ \dots \ 44}_{n \ \text{"quattro"}} \ \underbrace{88 \ \dots \ 88}_{n-1 \ \text{"otto"}} 9 \quad = \text{LHS}$$

II Dim.

$$\text{LHS} = \overbrace{\underbrace{444 \ \dots \ 44}_{n \ \text{"quattro"}} \underbrace{88 \ \dots \ 88}_{n-1 \ \text{"otto"}} 9}^{2n \ \text{cifre}} = \underbrace{444 \ \dots \ 44}_{n \ \text{"quattro"}} \cdot 10^{n} + \underbrace{88 \ \dots \ 88}_{n-1 \ \text{"otto"}} \cdot 10 + 9$$

$$= 4 \cdot \left(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ \dots \ + 10 + 1\right) \cdot 10^{n} + 8 \cdot \left(10^{n-2} + 10^{n-1} + \ \dots \ + 10 + 1\right) + 9$$

$$= 4 \cdot \frac{10^{n} - 1}{10 - 1} \cdot 10^{n} + 8 \cdot \frac{10^{n-1} - 1}{10 - 1} \cdot 10 + 9$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \left(10^{2n} - 10^{n}\right) + \frac{8}{9} \cdot \left(10^{n} - 10\right) + 9$$

$$= \frac{4}{9} \cdot 10^{2n} + \left(-\frac{4}{9} + \frac{8}{9}\right) \cdot 10^{n} - \frac{80}{9} + 9$$

$$= \frac{4}{9} \cdot 10^{2n} + \frac{4}{9} \cdot 10^{n} + \frac{1}{9}$$

$$= \left(\frac{2 \cdot 10^{n} + 1}{3}\right)^{2}$$

Osservo che il numero $\dfrac{2\cdot 10^n+1}{3}$ è intero, in quanto $2\cdot 10^n+1=2\underbrace{00\,...\,00}_{n\text{ "zero"}}+1=\overbrace{2\underbrace{00\,...\,00}_{n\text{ "zero"}}1}^{n+2\text{ cifre}}$ è divisibile per 3, essendo tale la somma delle sue cifre. Inoltre:

$$\frac{2\cdot 10^n+1}{3}=2\cdot\frac{10^n}{3}+\frac{1}{3}=2\cdot\underbrace{33\,...\,33}_{n\text{ "tre"}},\overline{3}+0,\overline{3}=\underbrace{66\,...\,66}_{n\text{ "sei"}},\overline{6}+0,\overline{3}=\underbrace{66\,...\,66}_{n\text{ "sei"}}+\underbrace{0,\overline{9}}_{=1}=\underbrace{66\,...\,6}_{n-1\text{ "sei"}}7$$

Pertanto, $\text{LHS}=\left(\dfrac{2\cdot 10^n+1}{3}\right)^2=\left(\overbrace{\underbrace{66\,...\,66}_{n-1\text{ "sei"}}7}^{n\text{ cifre}}\right)^2=\text{RHS}$

III Dim.

Per Induzione su $n\geq 1$

Passo iniziale: 1 "quattro", $1-1=0$ "otto" e $1-1=0$ "sei", ed è vero che $49=7^2$

Passo induttivo: $[n-1\rightarrow n\text{ , con }n>1]$

$$\text{RHS}=\left(\overbrace{\underbrace{66\,...\,66}_{n-1\text{ "sei"}}7}^{n\text{ cifre}}\right)^2=\left(6\cdot 10^{n-1}+6\cdot 10^{n-2}+\;...\;+6\cdot 10^2+6\cdot 10+7\right)^2$$

$$=\left(6\cdot 10^{n-1}+\overbrace{\underbrace{66\,...\,66}_{n-2\text{ "sei"}}7}^{n-1\text{ cifre}}\right)^2$$

$$=36\cdot 10^{2n-2}+12\cdot\underbrace{66\,...\,66}_{n-2\text{ "sei"}}7\cdot 10^{n-1}+\left(\overbrace{\underbrace{66\,...\,66}_{n-2\text{ "sei"}}7}^{n-1\text{ cifre}}\right)^2$$

$$=36\cdot 10^{2n-2}+12\cdot\underbrace{66\,...\,66}_{n-2\text{ "sei"}}7\cdot 10^{n-1}+\overbrace{\underbrace{444\,...\,44}_{n-1\text{ "quattro"}}\;\underbrace{88\,...\,88}_{n-2\text{ "otto"}}9}^{2\cdot(n-1)\text{ cifre}}\qquad[\text{ipotesi induttiva}]$$

$$=3\cdot 10^{2n-1}+6\cdot 10^{2n-2}+\underbrace{66\,...\,66}_{n-2\text{ "sei"}}7\cdot 10^n+2\cdot\underbrace{66\,...\,66}_{n-2\text{ "sei"}}7\cdot 10^{n-1}+444\,...\,4488\,...\,889$$

$$=\underbrace{\overbrace{3\underbrace{00\,...\,00}_{2n-1\text{ "zero"}}}^{2n\text{ cifre}}}_{\text{V}}+\underbrace{\overbrace{6\underbrace{00\,...\,00}_{2n-2\text{ "zero"}}}^{2n-1\text{ cifre}}}_{\text{IV}}+\underbrace{\overbrace{\underbrace{66\,...\,66}_{n-2\text{ "sei"}}7\underbrace{00\,...\,00}_{n\text{ "zero"}}}^{2n-1\text{ cifre}}}_{\text{III}}+\underbrace{\overbrace{1\underbrace{33\,...\,33}_{n-2\text{ "sei"}}4\underbrace{00\,...\,00}_{n-1\text{ "zero"}}}^{2n-1\text{ cifre}}}_{\text{II}}+\underbrace{\overbrace{\underbrace{444\,...\,44}_{n-1\text{ "quattro"}}\;\underbrace{88\,...\,88}_{n-2\text{ "otto"}}9}^{2n-2\text{ cifre}}}_{\text{I}}$$

$$\begin{array}{rrl}
= & 4\,4\,...\,4\,4\,4\,4\,8\,8\,...\,8\,8\,9\;+ & \text{I}\\
 & 1\,3\,3\,...\,3\,3\,3\,4\,0\,0\,...\,0\,0\,0\;+ & \text{II}\\
 & 6\,6\,6\,...\,6\,6\,7\,0\,0\,0\,...\,0\,0\,0\;+ & \text{III}\\
 & 6\,0\,0\,...\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,...\,0\,0\,0\;+ & \text{IV}\\
 & 3\,0\,0\,0\,...\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,...\,0\,0\,0 & \text{V}\\
\hline
\end{array}$$

$$=\underbrace{4\,4\,4\,4\,...\,4\,4\,4}_{n\text{ "quattro"}}\;\underbrace{8\,8\,8\,...\,8\,8}_{n-1\text{ "otto"}}9$$

d)

La risposta è: 2.

I soluzione

Uso la formula $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, cioè "vedo" il numeratore come

$10^2 + (10+1)^2 + (10+2)^2 + (10+3)^2 + (10+4)^2$

e vado avanti così:

$$\begin{array}{rlrcrcrcr}
a^2 & : & & & 5 & \text{volte} & 100 & = & 500 \\
2ab & : & 2+4+6+8 & = & 20 & '' & 10 & = & 200 \\
b^2 & : & 1+4+9+16 & = & 30 & '' & 1 & = & 30 \\
\hline
 & & & & & & & & 730 = 365 \cdot \mathbf{2}
\end{array}$$

II soluzione

Sapendo a memoria i quadrati di 11, 12, 13 e 14, "vedo" il numeratore come

$100+121+144+169+196$

e vado avanti così:

- lascio 100, che riprendo alla fine, e accoppio 2°-4° e 3°-5°, perché noto le unità 1-9 e 4-6 che mi danno il comodo "0 e porto 1" nella somma
- calcolo al volo le somme di ciascuna coppia
  $121+169$ come 200 e $2+6+\text{porto } 1 = 9 \to 90$, quindi 290 e standby
  $144+196$ come 200 e $4+9+\text{porto } 1 = 14 \to 140$, quindi 340 e standby
- aggiungo 100 allo standby più piccolo e poi sommo l'altro: 390 e 340 fa 730
- **lampo!** 730 è 365 per $\mathbf{2}$

PSd+

La tesi dell'esercizio b) vale $\forall n \in \mathbb{N}: n \geq 2$, a patto di interpretare la scrittura $123 \ldots (n-1)$ sempre in base 10 ma con le infinite "cifre" naturali 1, 2, 3, ... , 9 , (10), (11), ... , $(n-1)$, (n), ...

<u>Dim.</u>

Per Induzione su $n \geq 2$

Passo iniziale: $\text{LHS} = \dfrac{10^2 - 9 \cdot 2 - 1}{81} = \dfrac{81}{81} = 1$, $\text{RHS} = (2-1) = 1$

Passo induttivo

$$
\begin{aligned}
\frac{10^{n+1}-9\cdot(n+1)-1}{81} &= \frac{10\cdot 10^{n}-9\cdot n-10}{81} \\
&= \frac{10\cdot 10^{n}-9\cdot n-81\cdot n-10+81\cdot n}{81} \\
&= \frac{10\cdot\left(10^{n}-9\cdot n-1\right)+81\cdot n}{81} \\
&= \frac{10^{n}-9\cdot n-1}{81}\cdot 10+n \\
&= \underbrace{123\,...\,(n-1)}_{\text{non è un prodotto}}\cdot 10+n & \text{[ipotesi induttiva]} \\
&= 123\,...\,(n-1)n & \blacksquare
\end{aligned}
$$

<u>Esempio</u>

$$
\begin{aligned}
123\,...\,(13-1) &= \underbrace{123456789(10)(11)(12)}_{12\ \text{cifre}} \\
&= \underbrace{1\cdot 10^{11}+2\cdot 10^{10}+3\cdot 10^{9}+\ ...\ 9\cdot 10^{3}}_{\parallel}+10\cdot 10^{2}+11\cdot 10+12 \\
&= \qquad 123456789000 \qquad + 1000 + 110 + 12 \\
&= 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,0\,0\,0 \ + \\
&\qquad\qquad\qquad\quad 1\,1\,2\,2 \ = \\
&\overline{\ 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,9\,0\,1\,2\,2\ } & \text{[notare la sparizione della cifra 8]}
\end{aligned}
$$

Guardando al risultato e pensando alle sole "normali" 10 cifre, da 0 a 9, non è evidente il pattern delle 12 "cifre" consecutive a partire da 1. Occorre, ora, verificare che lo stesso risultato si ottiene effettuando il "normale" calcolo di $\frac{10^{13}-9\cdot 13-1}{81}$. Senza calcolatrice, questo si può fare

- brutalmente, sottraendo 118 da diecimila miliardi e dividendo il risultato per 81

$$
\begin{array}{cccccccccccccc|l}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - \\
 & & & & & & & & & & & 1 & 1 & 8 & = \\
\hline
 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 8 & 8 & 2 & \ 8\ 1 \\
\hline
 & 1 & 8 & 9 & & & & & & & & & & & \ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 9\ 0\ 1\ 2\ 2 \\
 & & 2 & 7 & 9 & & & & & & & & & & \\
 & & & 3 & 6 & 9 & & & & & & & & & \\
 & & & & 4 & 5 & 9 & & & & & & & & \\
 & & & & & 5 & 4 & 9 & & & & & & & \\
 & & & & & & 6 & 3 & 9 & & & & & & \\
 & & & & & & & 7 & 2 & 9 & & & & & \\
 & & & & & & & & & 0 & 9 & 8 & & & \\
 & & & & & & & & & & 1 & 7 & 8 & & \\
 & & & & & & & & & & & 1 & 6 & 2 & \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

- oppure giocando di "fino" con i seguenti nove "mattoncini (o "lego")"

$$\frac{1}{9} = \left(\frac{81}{9}\right)^{-1} = 0,\overline{\mathbf{1}}$$

$$\frac{11}{9} = \left(\frac{81}{99}\right)^{-1} = 1,\overline{\mathbf{2}}$$

$$\frac{111}{9} = \left(\frac{81}{999}\right)^{-1} = 12,\overline{\mathbf{3}}$$

$$\frac{1111}{9} = \left(\frac{81}{9999}\right)^{-1} = 123,\overline{\mathbf{4}}$$

$$\frac{11111}{9} = \left(\frac{81}{99999}\right)^{-1} = 1234,\overline{\mathbf{5}}$$

$$\frac{111111}{9} = \left(\frac{81}{999999}\right)^{-1} = 12345,\overline{\mathbf{6}}$$

$$\frac{1111111}{9} = \left(\frac{81}{9999999}\right)^{-1} = 123456,\overline{\mathbf{7}}$$

$$\frac{11111111}{9} = \left(\frac{81}{99999999}\right)^{-1} = 1234567,\overline{\mathbf{8}}$$

$$\frac{111111111}{9} = \left(\frac{81}{999999999}\right)^{-1} = 12345679\mathbf{9} \qquad \left[= 12345678,\overline{\mathbf{9}} \right]$$

$$\frac{10^{13}-9\cdot 13-1}{81} = \frac{10^{13}-1}{81} - \frac{13}{9}$$

$$= \frac{\cancel{(10-1)}\cdot\left(10^{12}+10^{11}+\ ...\ +10+1\right)}{\cancel{9}\cdot 9} - \frac{13}{9}$$

$$= \frac{\overbrace{1111111111111}^{13\ \text{"uno"}}}{9} - \frac{11+1+1}{9}$$

$$= \frac{\overbrace{111111111}^{\mathbf{9}\ \text{"uno"}}}{9}\cdot 10^{13-\mathbf{9}} + \frac{\overbrace{1111}^{4\ \text{"uno"}}}{9} - \frac{11}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9}$$

$$= 12345679\cdot 10^{4} \quad +123,\overline{4} \quad -\left(1,\overline{2}+0,\overline{1}+0,\overline{1}\right)$$

$$= 123456790000 \quad +123,\overline{4} \quad -1,\overline{4}$$

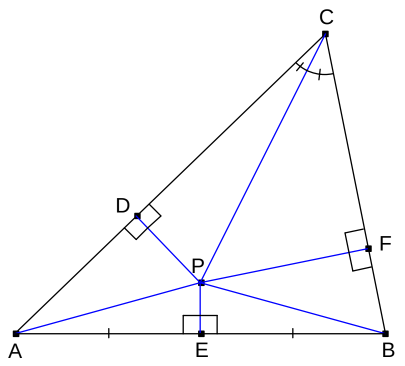
$$= 123456790000 \quad + \quad 122$$

$$= 123456790122$$

ES-096

Spiegare il seguente paradosso: tutti i triangoli sono isosceli

"Dim."



Detta P l'intersezione della bisettrice dell'angolo $A\hat{C}B$ con l'asse del lato AB, siano D ed F i piedi delle perpendicolari condotte da P rispettivamente ai lati AC e BC

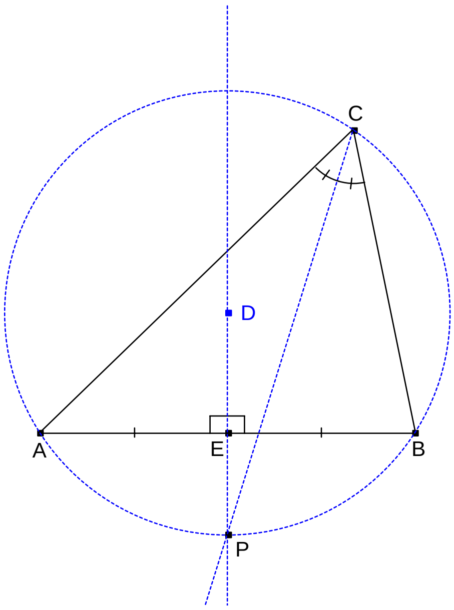
I triangoli rettangoli CDP e CFP sono congruenti, dato che hanno l'ipotenusa CP in comune e un angolo acuto congruente; quindi $CD \cong CF$ e $DP \cong FP$

Anche i triangoli rettangoli ADP e BFP sono congruenti, dato che $DP \cong FP$ e $AP \cong BP$; quindi $DA \cong FB$.

Pertanto, $CA = CD + DA \cong CF + FB = CB$

(Example 1.2 pag. 4, *Mechanical Geometry Theorem Proving*, by Shang-Ching Chou - Mathematics and Its Applications, © by 1988 D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland)

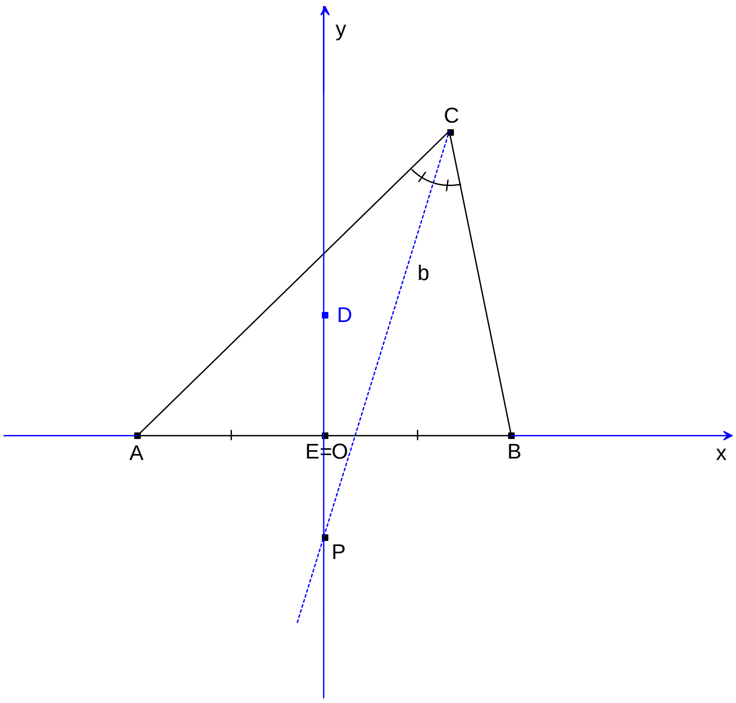
La figura è volutamente fuorviante, dato che il punto P non è mai, in realtà, interno al triangolo ABC. Infatti, esso coincide con il punto di intersezione dell'asse di AB con la circonferenza, di centro D, circoscritta ad ABC situato sull'arco $\overset{\frown}{AB}$ non contenente il vertice opposto al lato AB.



PSd+

1) Per provare che il punto P non è mai interno ad ABC posso usare anche la geometria analitica.

Escludendo per ora il caso in cui il triangolo ABC sia isoscele - per riconsiderarlo poi al limite - posso sempre (a meno di isometrie ed eventualmente rinominando i vertici) scegliere il riferimento cartesiano in modo tale che il triangolo sia situato come nella figura sottostante, con l'asse y coincidente con l’asse del segmento AB, quest’ultimo sull’asse x, e il vertice C interno al primo quadrante, cosicché $C\hat{A}B < C\hat{B}A$. Pertanto, P giace sull’asse y e, inoltre, risulta $A(-x_0\ ;0)$, $B(x_0\ ;0)$ e $C(x_1\ ;y_1)$, con x_0, x_1 e y_1 parametri reali positivi



Posto $u = \overline{CA} = \sqrt{(x_1+x_0)^2+y_1^2}$ e $v = \overline{CB} = \sqrt{(x_1-x_0)^2+y_1^2}$, ho le seguenti immediate relazioni:

$u^2 = v^2 + 4x_0x_1$, $0 < v < u$, $0 < x_0 + x_1 < u$, $0 < u - v < 2x_0 < u + v$ (disuguaglianza triangolare).

L’equazione della retta AC è: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -x_0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y_1x-(x_0+x_1)y+x_0y_1=0$

L’equazione della retta BC è: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y_1x+(x_0-x_1)y-x_0y_1=0$

L’equazione della bisettrice b di $A\hat{C}B$ è quella avente il coefficiente angolare positivo tra le seguenti due rette (tra loro perpendicolari):

$$\frac{y_1x-(x_0+x_1)y+x_0y_1}{u} = \pm\frac{y_1x+(x_0-x_1)y-x_0y_1}{v}$$, vale a dire

$(\text{scelta } -)$ $\quad b_-:\quad y = \dfrac{(u+v)y_1}{(u+v)x_1-(u-v)x_0}x + \dfrac{-(u-v)x_0y_1}{(u+v)x_1-(u-v)x_0}$

$(\text{scelta } +)$ $\qquad b_+ : \quad y = \dfrac{-(u-v)y_1}{(u+v)x_0-(u-v)x_1}x + \dfrac{(u+v)x_0y_1}{(u+v)x_0-(u-v)x_1}$

La b coincide con la b_- , in quanto:

$(u+v)y_1 > 0$ $\qquad$ [essendo $0 < y_1$, $0 < v < u$]

$$(u+v)x_1-(u-v)x_0 = (u+v)x_1 - \frac{4x_0^2x_1}{u+v} = \frac{(u+v)^2-4x_0^2}{u+v}x_1 = \frac{(u+v+2x_0)(u+v-2x_0)}{u+v}x_1 > 0$$

$$\left[u^2 = v^2+4x_0x_1 \Rightarrow u-v = \frac{4x_0x_1}{u+v} \text{ , inoltre } u+v > 2x_0 \text{ e } x_0,\ x_1\ ,u\ ,v > 0\right]$$

Per la cronaca: senza ricorrere al fatto che $b_- \perp b_+$, per verificare la effettiva negatività del coefficiente angolare della b_+ osservo che:

$-(u-v)y_1 < 0$ $\qquad$ [essendo $0 < y_1$, $0 < v < u$]

$$(u+v)x_0-(u-v)x_1 = (u+v)x_0 - \frac{4x_1^2x_0}{u+v} = \frac{(u+v)^2-4x_1^2}{u+v}x_0 = \frac{(u+v+2x_1)(u+v-2x_1)}{u+v}$$

cosicché, visto che u , v e x_1 sono > 0, basta provare che $u+v-2x_1 > 0$. Infatti:

$$0 < x_0\ ,\ x_1 < x_0+x_1 < u \Rightarrow 0 < 2x_0+2x_1 < 2u \Rightarrow 0 < 2x_1 < 2u-2x_0 \Rightarrow 2x_0-2u < -2x_1 < 0$$

cosicché $u+v-2x_1 > u+v+2x_0-2u = -(u-v)+2x_0 > 0$, in quanto $0 < u-v < 2x_0$.

A questo punto basta verificare che l'ordinata y_P di P è negativa per concludere che P si situa esternamente ad ABC, e precisamente nel semipiano, tra i due individuati dalla retta del lato intercettato da b, non contenente il triangolo. Infatti, risulta $y_P = \dfrac{-(u-v)x_0y_1}{(u+v)x_1-(u-v)x_0} < 0$, dato che il denominatore è > 0 (visto sopra), mentre il numeratore è < 0, essendo $0 < v < u$ e x_0, y_1 entrambi > 0.

Ora, fissati x_0 e y_1, cioè considerando la y_P come funzione della sola variabile reale positiva x_1, posso divertirmi ad esaminare il *comportamento al limite* di y_P, cioè:

i) $x_1 \to 0^+$, caso in cui il triangolo ABC diventa isoscele di base AB, e già che ci sono, anche

ii) $x_1 \to +\infty$, caso in cui l'angolo $C\widehat{A}B$ si annulla e, quindi, il triangolo ABC degenera nella semiretta destra di origine A giacente sull'asse delle ascisse

i) $\displaystyle\lim_{x_1\to 0^+} y_P = \lim_{x_1\to 0^+} \frac{-(u-v)x_0y_1}{(u+v)x_1-(u-v)x_0}$ $\qquad \left[\displaystyle\lim_{x_1\to 0^+}(u-v) = \lim_{x_1\to 0^+}(u+v)x_1-(u-v)x_0 = 0\right]$

$$= \lim_{x_1 \to 0^+} \frac{-\frac{4x_0x_1}{u+v}x_0y_1}{(u+v)x_1-(u-v)x_0} \qquad \left[u^2=v^2+4x_0x_1\right]$$

$$= \lim_{x_1 \to 0^+} \frac{-4x_0^2x_1y_1}{(u+v)^2x_1-(u^2-v^2)x_0}$$

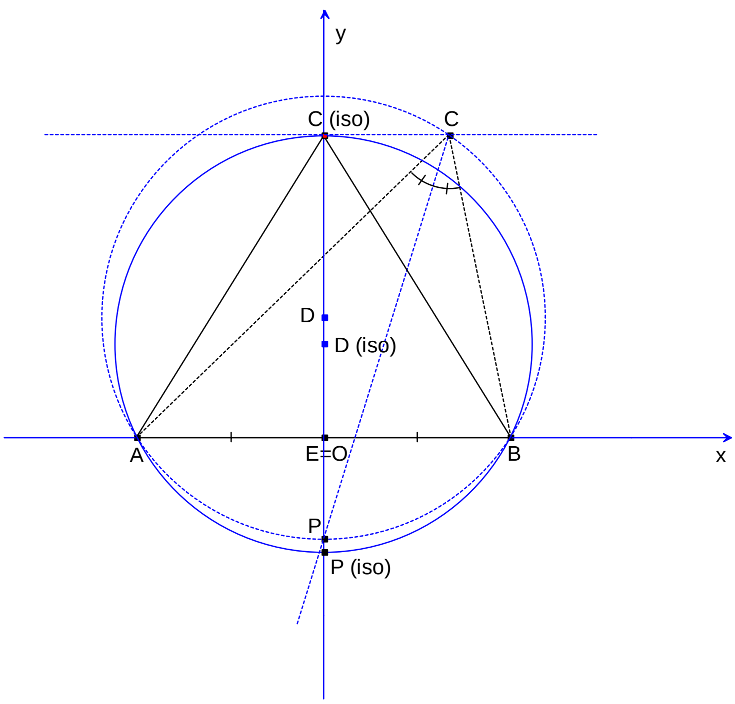
$$= \lim_{x_1 \to 0^+} \frac{-4x_0^2x_1y_1}{(u+v)^2x_1-4x_0x_1x_0} \qquad \left[u^2=v^2+4x_0x_1\right]$$

$$= \lim_{x_1 \to 0^+} \frac{-4x_0^2y_1}{(u+v)^2-4x_0^2}$$

[ho diviso sopra e sotto per x_1, eliminando così la forma indeterminata $\frac{0}{0}$]

$$= \frac{-4x_0^2y_1}{\left(2\sqrt{x_0^2+y_1^2}\right)^2-4x_0^2} = \frac{-4x_0^2y_1}{4y_1^2} = -\frac{x_0^2}{y_1}$$

Operando senza limiti, trovo y_P sottraendo all'ordinata del circocentro D di ABC (sempre situato sull'asse delle ordinate) la misura del raggio di tale cerchio. Considerato che C diventa il punto $(0\,;y_1)$ e l'equazione della retta AC diventa $y_1x-x_0y+x_0y_1=0$, trovo l'ordinata di D sostituendo 0 nella x dell'equazione $y-\frac{y_1}{2}=-\frac{x_0}{y_1}\left(x+\frac{x_0}{2}\right)$ dell'asse di AC, quindi $D=\left(0\,;\frac{y_1^2-x_0^2}{2y_1}\right)$, mentre il raggio (ovvero la sua misura) del circocerchio di ABC è $\overline{DA}=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{y_1^2-x_0^2}{2y_1}\right)^2}=\frac{y_1^2+x_0^2}{2y_1}$, cosicché $y_P=y_D-\overline{DA}=\frac{y_1^2-x_0^2}{2y_1}-\frac{y_1^2+x_0^2}{2y_1}=-\frac{x_0^2}{y_1}$



ii) $$\lim_{x_1\to+\infty} y_P = \lim_{x_1\to+\infty} \frac{-(u-v)x_0y_1}{(u+v)x_1-(u-v)x_0} \qquad \left[\lim_{x_1\to+\infty} u = \lim_{x_1\to+\infty} v = +\infty\right]$$

$$= -x_0y_1\cdot\lim_{x_1\to+\infty}\frac{u\left(1-\frac{v}{u}\right)}{u\left(\left(1+\frac{v}{u}\right)x_1-\left(1-\frac{v}{u}\right)x_0\right)}$$

$$= -x_0y_1\cdot\lim_{x_1\to+\infty}\frac{1-\frac{v}{u}}{\left(1+\frac{v}{u}\right)x_1-\left(1-\frac{v}{u}\right)x_0}$$

[ho diviso sopra e sotto per u, eliminando così la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$]

Ma $$\lim_{x_1\to+\infty}\frac{v}{u} = \lim_{x_1\to+\infty}\frac{\sqrt{(x_1-x_0)^2+y_1^2}}{\sqrt{(x_1+x_0)^2+y_1^2}} = \lim_{x_1\to+\infty}\frac{\cancel{x_1}\cdot\sqrt{\left(1-\frac{x_0}{x_1}\right)^2+\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2}}{\cancel{x_1}\cdot\sqrt{\left(1+\frac{x_0}{x_1}\right)^2+\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2}} = \frac{(1-0)^2+0^2}{(1+0)^2+0^2} = \frac{1}{1} = 1$$

cosicché $$\lim_{x_1\to+\infty} y_P = -x_0y_1\cdot\frac{0}{2(+\infty)-0\cdot x_0} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

Il punto P tende all'origine, dalla parte delle ordinate negative (per ragioni di continuità).

Inoltre, la circonferenza circoscritta ad ABC tende all'asse delle ascisse, con centro sempre sull'asse delle ordinate ma con ordinata $+\infty$ (punto all'infinito) e, di conseguenza, con raggio infinito. Infatti, dato che $y-\frac{y_1}{2} = -\frac{x_0+x_1}{y_1}\left(x-\frac{x_1-x_0}{2}\right)$ è, in generale, l'equazione dell'asse di AC e che, di conseguenza, $\left(0\,;\,\frac{x_1^2-x_0^2+y_1^2}{2y_1}\right)$ sono le coordinate del centro D del circocerchio di ABC, si ha:

$$\lim_{x_1\to+\infty}\frac{x_1^2-x_0^2+y_1^2}{2y_1} = \frac{+\infty-x_0^2+y_1^2}{2y_1} = +\infty$$

ES-100

Trovare tutti gli interi n per i quali $\sqrt{\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}}+\sqrt{\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}}$ è intero

[Problem 4, “Baltic Way 1993” Mathematical Team Contest, Riga, Lettonia (Latvia)]

Visto che $\sqrt{\frac{25}{2}+\sqrt{\frac{625}{4}-n}}+\sqrt{\frac{25}{2}-\sqrt{\frac{625}{4}-n}}=\sqrt{\frac{25+\sqrt{25^2-4n}}{2}}+\sqrt{\frac{25-\sqrt{25^2-4n}}{2}}$, uso l’identità $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$, vera in $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $(a\geq 0)\wedge(a^2\geq b\geq 0)$, scegliendo $a=25$ e $b=4n$. Ragiono, pertanto, con la *funzione reale* $q=\sqrt{25+\sqrt{4n}}$ (di per sé definita $\forall n\geq 0$ *reale*) *ristretta* ai valori *reali* di n tali che $25^2\geq 4n\geq 0$, cioè all’intervallo chiuso e limitato $\left[0\ ;\ \frac{625}{4}=156,25\right]$, senza cadere nel tranello di pormi il problema (pur lecito) se e quando $625-4n$ sia un quadrato (di solito è questo il caso in cui si ricorre alla “regola dei radicali doppi”). Siccome tale funzione è, ovviamente, continua e strettamente crescente, posso allora:

1) affermare che la sua *immagine* è costituita da *tutti i valori reali* di q tali che

$5=\sqrt{25+\sqrt{4\cdot 0}}\leq q\leq\sqrt{25+\sqrt{4\cdot\frac{625}{4}}}=\sqrt{50}\approx 7,07$, cioè l’intervallo $\left[5\ ;\ 5\sqrt{2}\right]$, rilevando al contempo che 5, 6 e 7 sono *i soli valori interi* di q

2) *invertirla*, ottenendo così la *funzione reale* $n=\frac{\left(q^2-25\right)^2}{4}$, a sua volta continua e strettamente crescente in $\left[5\ ;\ 5\sqrt{2}\right]$ e con immagine $\left[0\ ;\ \frac{625}{4}\right]$

I soluzione

Usando la funzione $n=\frac{\left(q^2-25\right)^2}{4}$, basta calcolare i valori di n per $q=5, 6, 7$, e accettare solo quelli interi e, chiaramente, appartenenti all’intervallo $\left[0\ ;\ \frac{625}{4}\right]$:

$$n(5)=\frac{\left(5^2-25\right)^2}{4}=0\ ,\quad n(6)=\frac{\left(6^2-25\right)^2}{4}=\frac{121}{4}\ ,\quad n(7)=\frac{\left(7^2-25\right)^2}{4}=144$$

Pertanto, i soli valori interi di n per i quali q è intero sono 0 e 144

II soluzione

Usando sempre la funzione $n=\frac{\left(q^2-25\right)^2}{4}=\left(\frac{q^2-25}{2}\right)^2$, osservo che n è intero, per q intero, solo se q^2-25 è pari, e quindi solo se q è dispari. Pertanto, calcolo n *soltanto* per $q=5,7$, ottenendo i rispettivi valori 0 e 144, entrambi accettabili

III soluzione

Considero l’equazione congruenziale $\left(q^2-25\right)^2 \equiv_4 0$ ($\equiv_4$ indica congruenza modulo 4)

1° metodo

Sapendo già che gli unici valori interi di q sono $5,6,7$, basta semplicemente sostituirli nell’equazione, constatando che solo 5 e 7 la soddisfano, giacché $\left(6^2-25\right)^2=121\equiv_4 1$. Dopodiché, calcolo i corrispondenti valori di n al solito modo, ossia tramite la funzione $n=\frac{\left(q^2-25\right)^2}{4}$, ottenendo i due interi 0 e 144, entrambi accettabili

2° metodo

Dall’osservazione, nella sottostante tavola del prodotto modulo 4, della *diagonale dei quadrati*

$\cdot$	0	1	2	3
0	**0**	0	0	0
1	0	**1**	2	3
2	0	2	**0**	2
3	0	3	2	**1**

ricavo che è $\left(q^2-25\right)^2 \equiv_4 0$ solo in due casi:

1) $q^2-25\equiv_4 2$, e quindi $q^2\equiv_4 27\equiv_4 3$, impossibile

2) $q^2-25\equiv_4 0$, e quindi $q^2\equiv_4 25\equiv_4 1$, possibile in due casi:

2.1) $q\equiv_4 1$, cioè $q=4k+1$, con $k\in\mathbb{Z}$, e quindi $5\le 4k+1\le 7$ solo per $k=1$, cioè $q=5$, cui corrisponde $n=\frac{\left(5^2-25\right)^2}{4}=0$, accettabile

2.2) $q\equiv_4 3$, cioè $q=4k+3$, con $k\in\mathbb{Z}$, e quindi $5\le 4k+3\le 7$ solo per $k=1$, cioè $q=7$, cui corrisponde $n=\frac{\left(7^2-25\right)^2}{4}=144$, accettabile

ES-068

Provare che $\sqrt[3]{3\cdot\sqrt{21}+8}-\sqrt[3]{3\cdot\sqrt{21}-8}=1$

(Ex. 3.24 pag. 34, *Equations and Inequalities. Elementary Problems and Theorems in Algebra and Number Theory*, di Jiří Herman, Radan Kučera e Jaromír Šimša - Transl. by Karl Dilcher, CMS Books in Mathematics-Canadian Mathematical Society, Springer-Verlag, 2000)

Elevando al cubo il numero reale $A=\sqrt[3]{3\cdot\sqrt{21}+8}-\sqrt[3]{3\cdot\sqrt{21}-8}$ ricavo

$$A^3=3\cdot\sqrt{21}+8-3\cdot\left(\sqrt[3]{3\cdot\sqrt{21}+8}\right)^2\cdot\sqrt[3]{3\cdot\sqrt{21}-8}+3\cdot\sqrt[3]{3\cdot\sqrt{21}+8}\cdot\left(\sqrt[3]{3\cdot\sqrt{21}-8}\right)^2-\left(3\cdot\sqrt{21}-8\right)$$

$$=16-3\cdot\sqrt[3]{3\cdot\sqrt{21}+8}\cdot\sqrt[3]{3\cdot\sqrt{21}-8}\cdot\left(\underbrace{\sqrt[3]{3\cdot\sqrt{21}+8}-\sqrt[3]{3\cdot\sqrt{21}-8}}_{A}\right)$$

$$=16-3\cdot A\cdot\sqrt[3]{\left(3\cdot\sqrt{21}+8\right)\cdot\left(3\cdot\sqrt{21}-8\right)}$$

$$=16-3\cdot A\cdot\sqrt[3]{9\cdot 21-64}$$

$$=16-3\cdot A\cdot\sqrt[3]{125}=16-3\cdot A\cdot\sqrt[3]{5^3}$$

$$=16-15\cdot A$$

quindi A è uno zero reale del polinomio cubico

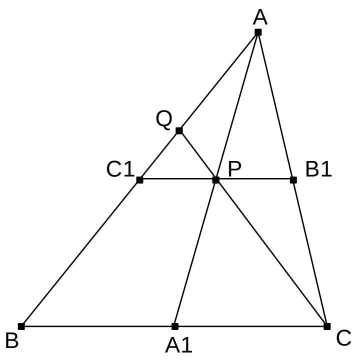
$$P(x)=x^3+15x-16=x^3-x+16x-16=x\cdot(x+1)\cdot(x-1)+16\cdot(x-1)=(x-1)\cdot\left(x^2+x+16\right)$$

che, per come fattorizzato, possiede un solo zero reale: $x=1$

in quanto $x^2+x+16=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+16-\frac{1}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{63}{4}\geq\frac{63}{4}$

Pertanto: $\left(A \text{ zero reale di } P(x)\right)\wedge\left(x=1 \text{ unico zero reale di } P(x)\right)\Rightarrow A=1$

ES-097



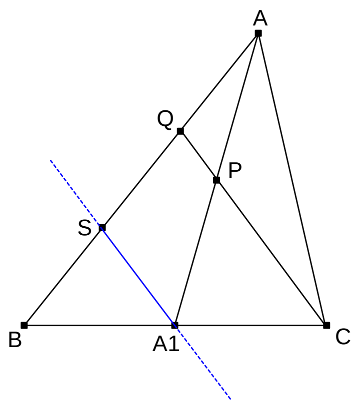
La mediana AA_1 di un triangolo qualunque ABC interseca il lato B_1C_1 del triangolo mediale $A_1B_1C_1$ in P, e (il prolungamento di) CP interseca AB in Q. Mostrare che $AB \cong 3AQ$

(Example 327 pag. 260, *Mechanical Geometry Theorem Proving*, by Shang-Ching Chou - Mathematics and Its Applications, © by 1988 D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland)

Il *Triangolo Mediale* di un dato triangolo è quello che ha per vertici i punti medi di quest’ultimo, mentre il simbolo "$\cong$" indica *congruenza*

I soluzione

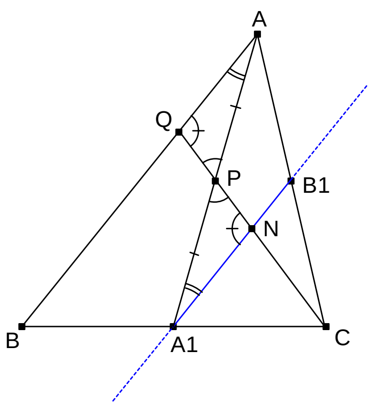
Con le similitudini (per indicare che due figure sono *simili* uso il simbolo tilde "$\sim$")



Detto S il punto d’intersezione tra il lato AB e la parallela a CQ condotta da A_1, si ha che:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}APQ \sim AA_1S\\ AP \cong PA_1\end{array}\right\rangle \Rightarrow AQ \cong QS\\ \left.\begin{array}{r}BA_1S \sim BCQ\\ BA_1 \cong A_1C\end{array}\right\rangle \Rightarrow BS \cong SQ\end{array}\right\rangle \Rightarrow AQ \cong QS \cong BS \Rightarrow AB \cong 3AQ$$

II soluzione

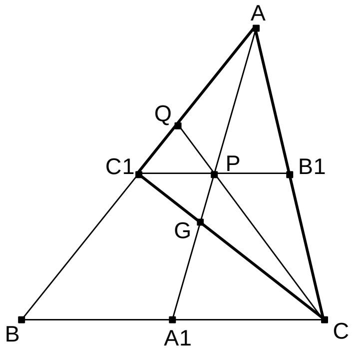


Considerato che il lato mediale B_1A_1 è parallelo al lato AB, e detto N il punto d’intersezione tra CQ e A_1B_1, si ha che:

$$\left.\begin{array}{r}AQP \cong A_1NP \Rightarrow AQ \cong A_1N\\ \left.\begin{array}{r}NA_1C \sim QBC\\ BC \cong 2A_1C\end{array}\right\rangle \Rightarrow QB \cong 2A_1N\end{array}\right\rangle \Rightarrow QB \cong 2AQ \Rightarrow AB \cong 3AQ$$

III soluzione

Detto G il baricentro di ABC, applico il *Teorema di Ceva* al triangolo ACC_1

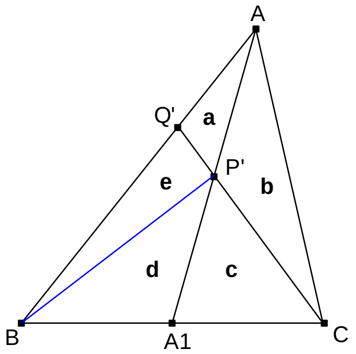


$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CG}{GC_1}\cdot\frac{C_1Q}{QA}=1 \Rightarrow \frac{C_1Q}{QA}=\frac{1}{2}\text{, perché } \frac{AB_1}{B_1C}=1 \text{ e } \frac{CG}{GC_1}=2$$

Pertanto, $\frac{AB}{AQ}=\frac{2\cdot AC_1}{AQ}=\frac{2\cdot AQ+2\cdot QC_1}{AQ}=2+2\cdot\frac{1}{2}=3$

Inoltre, $\frac{C_1Q}{AB}=\frac{AC_1-AQ}{AB}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, e quindi $AQ\cong 2C_1Q$

IV soluzione

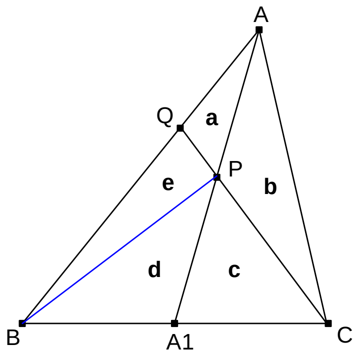


Presi $Q'\in AB$ tale che $AB\cong 3AQ'$ e $P'=CQ'\cap AA_1$, basta provare che $P'=P$, ossia che $AP'\cong P'A_1$. A tale scopo ragiono con le aree **a**, **b**, **c**, **d** ed **e** dei triangoli in figura.

Dalle evidenti le relazioni: $e=2a$, $c=d$, $c+d+e=2a+2b$,

ricavo subito $c+c+2a=2a+2b \Rightarrow b=c \Rightarrow AP'\cong P'A_1$

V soluzione



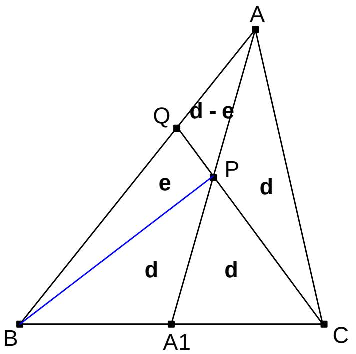
Ragiono di nuovo con le aree **a**, **b**, **c**, **d** ed **e** dei triangoli in figura, ove stavolta, però, P e Q sono i punti dell'enunciato, e dunque $AP\cong PA_1$ per ipotesi, mentre $AB\cong 3AQ$ va provato.

Tramite le evidenti relazioni: $d=c=b$, $a+e=d$, posso riscrivere le aree dei cinque triangolini usando solo i due parametri **d** ed **e**

Siccome i triangoli QBP e AQP hanno stessa altezza, allora le loro aree stanno tra loro come le rispettive basi

$e:d-e=QB:AQ \Rightarrow e+d-e:e=QB+AQ:QB$, cioè

$d:e=AB:QB$



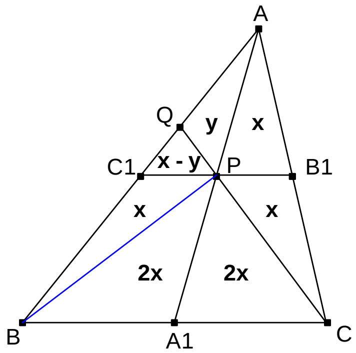
Analogamente, avendo i triangoli QBC e AQC stessa altezza, ottengo $e+2d:2d-e=QB:AQ$, da cui $4d:e+2d=AB:QB$

Pertanto, $d:e=4d:e+2d \Rightarrow 4d:4e=4d:e+2d$, vale a dire

$$4e=e+2d \Rightarrow \frac{d}{e}=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{d-e}{e}=\frac{AQ}{QB}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow AB\cong 3AQ$$

VI soluzione

Variante della precedente soluzione



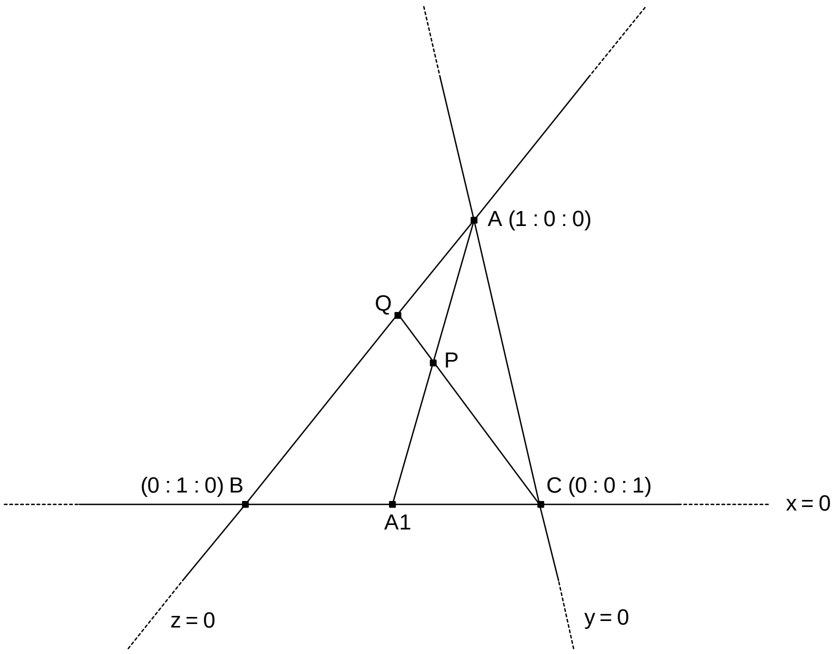
$$2x - y : y = QB : AQ = 6x - y : 2x + y$$

$$4x^2 - y^2 = 6xy - y^2$$

$$2x = 3y \;\Rightarrow\; 2x - y = 2y \;\Rightarrow\; QB \cong 2AQ \;\Rightarrow\; AB \cong 3AQ$$

VII soluzione

Con le coordinate baricentriche omogenee $(x : y : z)$ rispetto al triangolo ABC



Le coordinate di A_1 sono $\left(0 : \frac{1}{2} : \frac{1}{2}\right)$, cosicché quelle di P sono $\left(\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{4}\right)$,

l’equazione della retta CP è $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y = 0 \;\Rightarrow\; x = 2y$,

le coordinate di Q, intersezione della retta CP con la retta coordinata AB, di equazione $z = 0$, sono

$(2:1:0)$, o, se si preferisce, $\left(\frac{2}{3}:\frac{1}{3}:0\right)$

$\left[\begin{array}{l}\text{trattandosi di coordinate omogenee, posso modificarle} \\ \text{per un comune fattore reale qualsiasi } \rho \neq 0\text{, nel qual} \\ \text{caso si usa scegliere il normalizzante } \rho = \dfrac{1}{x+y+z} \\ \text{a patto che } x+y+z \neq 0\end{array}\right]$

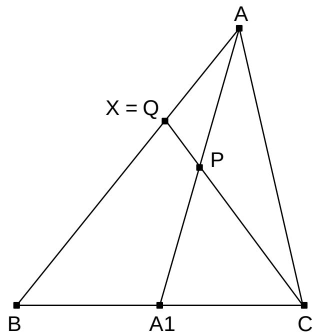
in ogni caso, si ricava che $\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QB}} = \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} \Rightarrow \mathrm{QB} \cong 2\mathrm{AQ} \Rightarrow \mathrm{AB} \cong \mathrm{AQ} + \mathrm{QB} \cong \mathrm{AQ} + 2\mathrm{AQ} \cong 3\mathrm{AQ}$

VIII soluzione

Con le omotetie

Ricordato che un’omotetia di *centro* S e *rapporto* (o *coefficiente*) $\mathrm{k} \in \mathbb{R} - \{0\}$, indicata con $\mathrm{H}(\mathrm{S}\,;\,\mathrm{k})$, è quella corrispondenza biunivoca del piano (o retta, o spazio) affine in sé (*trasformazione geometrica*) che associa ad ogni punto U quel punto U' tale che $\overrightarrow{\mathrm{SU}'} = \mathrm{k}\,\overrightarrow{\mathrm{SU}}$, si ha subito che:

$$\mathrm{A} \xrightarrow{\mathrm{H}(\mathrm{P}\,;\,-1)} \mathrm{A}_1 \xrightarrow{\mathrm{H}(\mathrm{C}\,;\,2)} \mathrm{B} \;\Rightarrow\; \mathrm{A} \xrightarrow{\mathrm{H}(\mathrm{C}\,;\,2)\circ\mathrm{H}(\mathrm{P}\,;\,-1)} \mathrm{B}$$

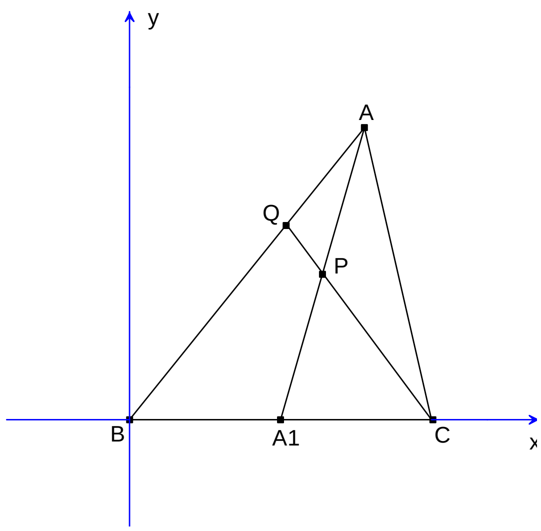


Ma $\mathrm{H}(\mathrm{C};2)\circ\mathrm{H}(\mathrm{P};-1) = \mathrm{H}(\mathrm{X};2\cdot(-1)) = \mathrm{H}(\mathrm{X};-2)$, ove il centro X è quel punto del piano che dovendo essere collineare con A e B (il centro di un omotetia è per definizione collineare con ogni coppia di punti corrispondenti) e, contemporaneamente, collineare con i centri P e C delle due omotetie componenti, non può che coincidere con il punto Q di AB. Pertanto:

$$\mathrm{B} = \mathrm{H}(\mathrm{Q};-2)(\mathrm{A}) \overset{\text{def}}{\Rightarrow} \overrightarrow{\mathrm{QB}} = -2\,\overrightarrow{\mathrm{QA}} \Rightarrow \mathrm{QB} \cong 2\mathrm{QA} \Rightarrow \mathrm{AB} \cong 3\mathrm{QA}$$

IX soluzione

Con la geometria analitica



Scelgo il riferimento cartesiano ortogonale tale che $\mathrm{B} = (0\,;\,0)$, $\mathrm{C} = (\mathrm{x}_0\,;\,0)$, $\mathrm{A} = (\mathrm{x}_1\,;\,\mathrm{y}_1)$, con $\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1, \mathrm{y}_1 \in \mathbb{R}:\ \mathrm{x}_0, \mathrm{y}_1 > 0$. Le coordinate del punto medio A_1 sono $\left(\frac{\mathrm{x}_0}{2}\,;\,0\right)$, mentre quelle del punto medio P sono

$$\left(\frac{\mathrm{x}_1 + \frac{\mathrm{x}_0}{2}}{2}\,;\,\frac{\mathrm{y}_1}{2}\right) = \left(\frac{2\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_0}{4}\,;\,\frac{\mathrm{y}_1}{2}\right)$$

L'equazione della retta CP è: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & 0 & 1 \\ \frac{2x_1+x_0}{4} & \frac{y_1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\frac{y_1}{2}x - \left(x_0 - \frac{2x_1+x_0}{4}\right)y + x_0\frac{y_1}{2} = 0$,

cioè $2y_1x + (3x_0 - 2x_1)y - 2x_0y_1 = 0$, mentre quella della retta AB è: $y_1x - x_1y = 0$.

Le coordinate di Q, intersezione delle due rette precedenti, sono le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} 2y_1x + (3x_0 - 2x_1)y = 2x_0y_1 \\ y_1x - x_1y = 0 \end{cases}$$

che è compatibile dato che $\begin{vmatrix} 2y_1 & 3x_0 - 2x_1 \\ y_1 & -x_1 \end{vmatrix} = -2x_1y_1 - 3x_0y_1 + 2x_1y_1 = -3x_0y_1 \neq 0$, stante le caratteristiche del particolare riferimento scelto $(x_0, y_1 > 0)$.

Pertanto, con la Regola di Cramer, trovo che:

$$\left.\begin{array}{l} x_Q = \dfrac{\begin{vmatrix} 2x_0y_1 & 3x_0 - 2x_1 \\ 0 & -x_1 \end{vmatrix}}{-3x_0y_1} = \dfrac{-2x_0x_1y_1}{-3x_0y_1} = \dfrac{2}{3}\cdot x_1 \\ \\ y_Q = \dfrac{\begin{vmatrix} 2y_1 & 2x_0y_1 \\ y_1 & 0 \end{vmatrix}}{-3x_0y_1} = \dfrac{-2x_0y_1^2}{-3x_0y_1} = \dfrac{2}{3}\cdot y_1 \end{array}\right\rangle \Rightarrow QB \cong \frac{2}{3}AB \Rightarrow AB \cong 3QA$$

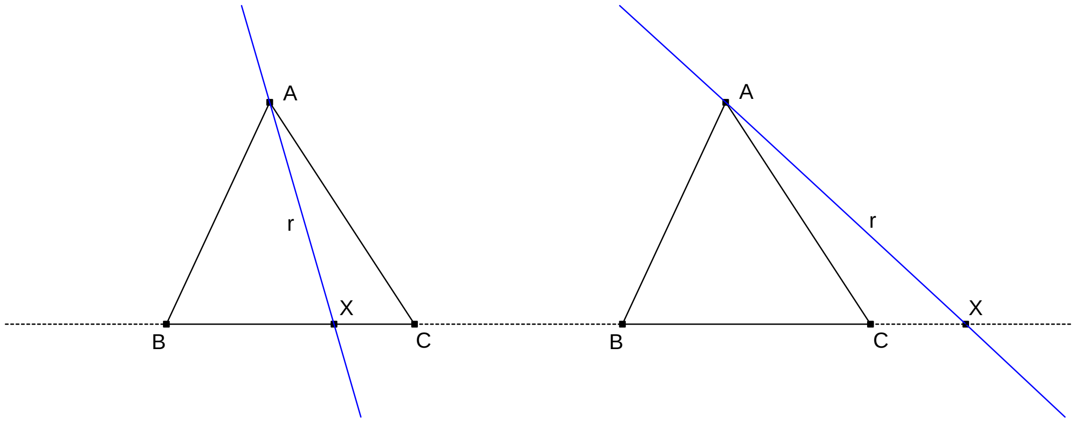
PSd+

1) Il Teorema di Ceva[1]

Dato un triangolo qualsiasi ABC, si dice *ceviana* un qualunque segmento di estremi un vertice e un qualunque punto interno del lato opposto. Più in generale, è comodo chiamare *ceviana* anche una

[1] Giovanni Ceva (1648-1734), matematico mantovano. Ricevette la sua prima educazione a Milano presso un collegio gesuita, proseguì gli studi a Pisa, dove per breve tempo insegnò anche, e nel 1686 ottenne una cattedra di matematica presso l'Università di Mantova che conservò per il resto della sua vita, prima sotto i Gonzaga e poi sotto gli Asburgo allorché, nel 1708, l'impero austriaco annesse il Ducato. Le sue ricerche si rivolsero principalmente alla geometria euclidea, rimasta ferma alle conoscenze degli antichi greci, anticipando di circa un secolo, con i suoi originali contributi, la rinascita dell'interesse nella materia. Nella sua opera più importante, il *De Lineis rectis se invicem secantibus, statica constructio* (1678), è contenuto il teorema che porta oggi il suo nome. Riscoprì il *Teorema di Menelao* (I-II secolo), intimamente collegato con il suo e studiò la *trisettrice* ("Trisettrice di Ceva") che permette di dividere in tre parti uguali un qualunque angolo [problema classico dell'antichità che, come provò nel 1837 il matematico francese Pierre Laurent Wantzel (1814-1848), è irrisolvibile solo con riga e compasso].

qualunque retta r passante per uno dei vertici e per un qualunque punto X della retta degli altri due vertici, purché da questi distinto.



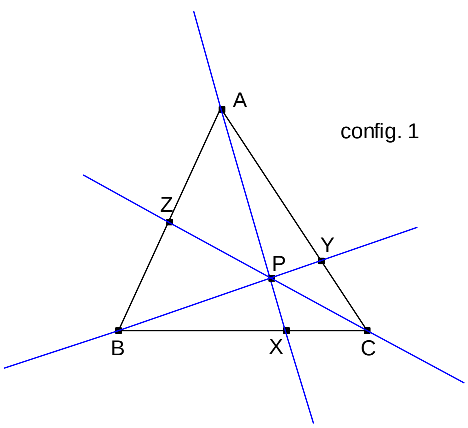
In relazione alla generica ceviana r $[\text{o } AX]$ della figura soprastante diremo:

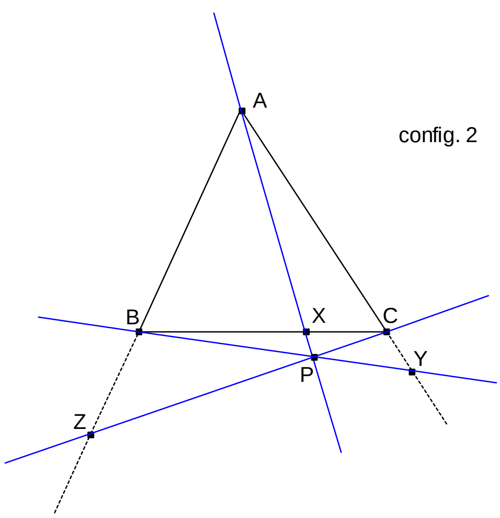
- *vertice della* (o *associato alla*) *ceviana* il vertice A
- *intercetta della* (o *associata alla*) *ceviana* $($o *intercetta associata al vertice* $A)$ il punto X
- *segmenti della* (o *associati alla*) *ceviana* i due segmenti CX e XB
- *angoli della* (o *associati alla*) *ceviana* i due angoli $C\widehat{A}X$ e $X\widehat{A}B$, rispettivamente opposti ai segmenti CX e XB associati alla stessa

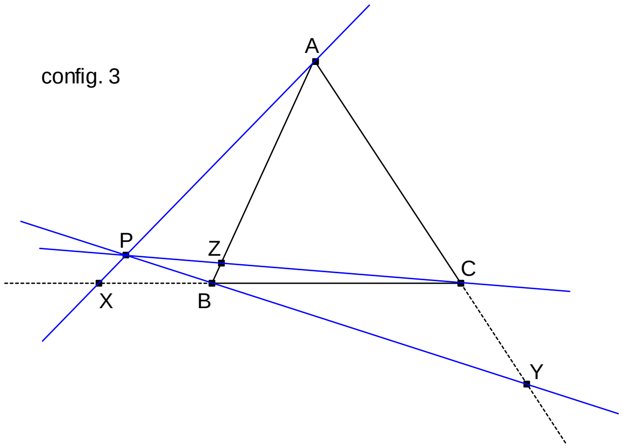
3.1) L’enunciato del teorema (in forma metrica)

> Tre ceviane AX, BY e CZ di un triangolo qualunque ABC
>
> concorrono in un punto $\Leftrightarrow$ $\dfrac{\overline{AY}}{\overline{YC}} \cdot \dfrac{\overline{CX}}{\overline{XB}} \cdot \dfrac{\overline{BZ}}{\overline{ZA}} = 1$

La suddetta relazione si dice *Uguaglianza o Identità di Ceva* (*in forma metrica*) *associata alle tre ceviane* AX, BY e CZ. Sono possibili diverse configurazioni a seconda che il punto comune delle tre ceviane sia interno oppure esterno al triangolo dato. Ad esempio, se con P indichiamo l’intersezione delle tre ceviane:







Indipendentemente dalla particolare configurazione, un modo per memorizzare, e scrivere, correttamente l’Identità di Ceva è quello di “percorrere” l’intero bordo del triangolo partendo da uno qualsiasi dei vertici e facendovi ritorno in uno dei due versi possibili (orario o antiorario), e ripetendo per ciascuno dei tre lati i passi seguenti:

1) si procede dal vertice di partenza lungo la retta del lato fino all’intercetta associata al vertice opposto a detto lato (se occorre, nel verso opposto rispetto a quello prescelto), completando così un primo segmento associato alla ceviana;
2) si prosegue dall’intercetta fino ad arrivare all’altro vertice del lato (anche qui nel verso opposto se occorre), completando così un secondo segmento associato alla ceviana;
3) si scrive il rapporto delle lunghezze tra il primo e il secondo dei due segmenti prima percorsi;
4) il vertice di arrivo diventa il vertice di partenza del prossimo lato.

In tal modo si ottengono, per ogni possibile configurazione e a seconda del vertice di partenza e del verso prescelto di percorrenza del bordo del triangolo (l’*orientamento* del triangolo), sei Identità di Ceva tra di loro *formalmente diverse* ma, di fatto, *equivalenti*. Ad esempio, con riferimento alla soprastante config. 1, è lecito scrivere:

con partenza A $\quad \dfrac{\overline{AY}}{\overline{YC}} \cdot \dfrac{\overline{CX}}{\overline{XB}} \cdot \dfrac{\overline{BZ}}{\overline{ZA}} = 1$ (orario) oppure $\dfrac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \dfrac{\overline{BX}}{\overline{XC}} \cdot \dfrac{\overline{CY}}{\overline{YA}} = 1$ (antiorario)

con partenza C $\quad \dfrac{\overline{CX}}{\overline{XB}} \cdot \dfrac{\overline{BZ}}{\overline{ZA}} \cdot \dfrac{\overline{AY}}{\overline{YC}} = 1$ (orario) oppure $\dfrac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \dfrac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \dfrac{\overline{BX}}{\overline{XC}} = 1$ (antiorario)

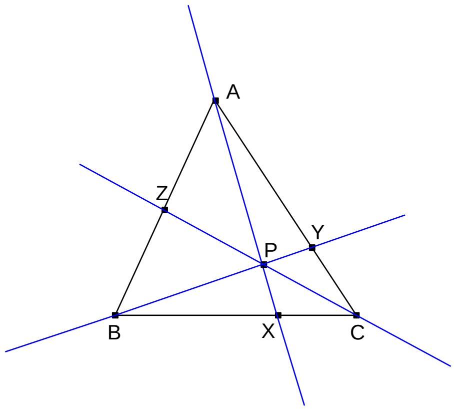
con partenza B $\quad \dfrac{\overline{BZ}}{\overline{ZA}} \cdot \dfrac{\overline{AY}}{\overline{YC}} \cdot \dfrac{\overline{CX}}{\overline{XB}} = 1$ (orario) oppure $\dfrac{\overline{CY}}{\overline{YA}} \cdot \dfrac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}} \cdot \dfrac{\overline{BX}}{\overline{XC}} = 1$ (antiorario)

3.2) Dimostrazione del Teorema di Ceva

$(\Rightarrow)$

Occorre provare che se le tre ceviane AX, BY e CZ concorrono in un punto, diciamo P, allora vale l’Identità di Ceva. Distinguiamo due casi, a seconda che P sia interno oppure esterno al triangolo.

I) $\quad P$ è interno al triangolo



Considerando il primo dei tre rapporti dell'identità da provare, osserviamo che i triangoli ABY e YBC hanno stessa altezza relativa alle rispettive basi AY e YC, e così pure APY e YPC, cosicché risulta:

$$\frac{\overline{AY}}{\overline{YC}}=\frac{S(ABY)}{S(YBC)}=\frac{S(APY)}{S(YPC)} \qquad \left[\begin{array}{l}\text{ove } S(\ \dots\ ) \text{ indica} \\ \text{l'area del triangolo } \dots\end{array}\right]$$

$$\text{Ma} \quad \frac{S(ABY)}{S(YBC)}=\frac{S(APY)}{S(YPC)}=\frac{S(ABY)-S(APY)}{S(YBC)-S(YPC)}=\frac{S(ABP)}{S(PBC)}$$

$$\left[a:b=c:d \;\Leftrightarrow\; a:b=(a\pm c):(b\pm d)\right]$$

$$\text{e quindi} \quad \frac{\overline{AY}}{\overline{YC}}=\frac{S(ABP)}{S(PBC)}$$

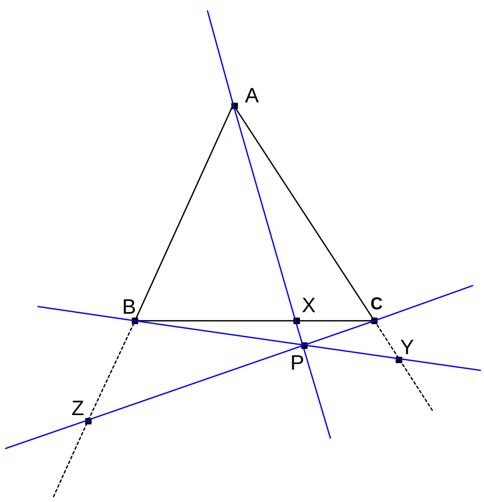
Analogamente, per il terzo ed il secondo dei rapporti [in quest'ordine ci si guadagna la ciclicità rispetto ad (A, B, C) e (X, Y, Z)] si ricavano le rispettive uguaglianze:

$$\frac{\overline{BZ}}{\overline{ZA}}=\frac{S(BCP)}{S(PCA)} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{CX}}{\overline{XB}}=\frac{S(CAP)}{S(PAB)}$$

Moltiplicando membro a membro le tre uguaglianze, e semplificando, si ottiene l'Identità di Ceva

$$\frac{\overline{AY}}{\overline{YC}}\cdot\frac{\overline{CX}}{\overline{XB}}\cdot\frac{\overline{BZ}}{\overline{ZA}}=\frac{\cancel{S(ABP)}}{\cancel{S(PBC)}}\cdot\frac{\cancel{S(CAP)}}{\cancel{S(PAB)}}\cdot\frac{\cancel{S(BCP)}}{\cancel{S(PCA)}}=1$$

II) P è esterno al triangolo



Con ragionamento identico al caso precedente risulta:

$$\frac{\overline{AY}}{\overline{YC}}=\frac{S(ABY)}{S(YBC)}=\frac{S(APY)}{S(YPC)}=\frac{S(ABY)-S(APY)}{S(CYB)-S(CYP)}=\frac{S(ABP)}{S(PBC)}$$

$$\frac{\overline{BZ}}{\overline{ZA}}=\frac{S(BCZ)}{S(ZCA)}=\frac{S(BPZ)}{S(ZPA)}=\frac{S(BCZ)-S(BPZ)}{S(ZCA)-S(ZPA)}=\frac{S(BCP)}{S(PCA)}$$

$$\frac{\overline{CX}}{\overline{XB}}=\frac{S(CAX)}{S(XAB)}=\frac{S(CPX)}{S(XPB)}=\frac{S(CAX)+S(CPX)}{S(XAB)+S(XPB)}=\frac{S(CAP)}{S(PAB)}$$

Moltiplicando le tre uguaglianze $\frac{\overline{AY}}{\overline{YC}}=\frac{S(ABP)}{S(PBC)}$, $\frac{\overline{BZ}}{\overline{ZA}}=\frac{S(BCP)}{S(PCA)}$, $\frac{\overline{CX}}{\overline{XB}}=\frac{S(CAP)}{S(PAB)}$, si ottiene, di nuovo, l'Identità di Ceva

$(\Leftarrow)$

Occorre provare che se vale l'Identità di Ceva, allora le tre ceviane concorrono in un punto. Consideriamo due delle tre ceviane, ad esempio AX e BY, diciamo P il loro punto comune, e consideriamo la ceviana CZ' passante per P. Sarà sufficiente provare che $Z' = Z$.

Dal momento che, per costruzione, le tre ceviane AX, BY e CZ' concorrono nel punto P, allora, in virtù della parte $(\Rightarrow)$ di sopra dimostrata, vale l'Identità di Ceva $\frac{\overline{AY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{CX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BZ'}}{\overline{Z'A}} = 1$, che unita a quella dell'ipotesi $\frac{\overline{AY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{CX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BZ}}{\overline{ZA}} = 1$, permette di scrivere

$$\cancel{\frac{\overline{AY}}{\overline{YC}}} \cdot \cancel{\frac{\overline{CX}}{\overline{XB}}} \cdot \frac{\overline{BZ'}}{\overline{Z'A}} = \cancel{\frac{\overline{AY}}{\overline{YC}}} \cdot \cancel{\frac{\overline{CX}}{\overline{XB}}} \cdot \frac{\overline{BZ}}{\overline{ZA}}$$

$$\frac{\overline{BZ'}}{\overline{Z'A}} = \frac{\overline{BZ}}{\overline{ZA}}$$

$$\frac{\overline{BZ'}}{\overline{Z'A}} + 1 = \frac{\overline{BZ}}{\overline{ZA}} + 1$$

$$\frac{\overline{BZ'} + \overline{Z'A}}{\overline{Z'A}} = \frac{\overline{BZ} + \overline{ZA}}{\overline{ZA}}$$

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{Z'A}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{ZA}} \;\Rightarrow\; \overline{Z'A} = ZA \;\Rightarrow\; Z' = Z$$

Notare che l'implicazione $\frac{\overline{BZ'}}{\overline{Z'A}} = \frac{\overline{BZ}}{\overline{ZA}} \;\Rightarrow\; Z' = Z$ esprime l'unicità del punto che divide un segmento in parti che stanno tra loro in un dato rapporto.

3.3) Forma trigonometrica del Teorema di Ceva

> Tre ceviane AX, BY e CZ di un triangolo qualunque ABC
>
> concorrono in un punto $\Leftrightarrow \dfrac{\sin(A\hat{B}Y)}{\sin(Y\hat{B}C)} \cdot \dfrac{\sin(C\hat{A}X)}{\sin(X\hat{A}B)} \cdot \dfrac{\sin(B\hat{C}Z)}{\sin(Z\hat{C}A)} = 1$

<u>Dim.</u>

La suddetta relazione si dice *Uguaglianza o Identità di Ceva in forma trigonometrica associata alle tre ceviane* AX, BY e CZ. Al posto delle lunghezze dei segmenti associati alle ceviane si considerano i seni degli angoli associati alle stesse rispettivamente opposti ai suddetti segmenti

È sufficiente provare l'identità $\dfrac{\sin(A\hat{B}Y)}{\sin(Y\hat{B}C)} \cdot \dfrac{\sin(C\hat{A}X)}{\sin(X\hat{A}B)} \cdot \dfrac{\sin(B\hat{C}Z)}{\sin(Z\hat{C}A)} = \dfrac{\overline{AY}}{\overline{YC}} \cdot \dfrac{\overline{CX}}{\overline{XB}} \cdot \dfrac{\overline{BZ}}{\overline{ZA}}$

A tale scopo si ricorre al Teorema dei Seni applicato a ciascuno dei sei triangoli ABY, YBC, CAX, XAB, BCZ, ZCA:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\left(A\hat{B}Y\right) &= \overline{AY}\cdot\frac{\sin\alpha}{\overline{BY}} \qquad \text{ove } \alpha = B\hat{A}C \\
\sin\left(Y\hat{B}C\right) &= \overline{YC}\cdot\frac{\sin\gamma}{\overline{BY}} \qquad \text{ove } \gamma = A\hat{C}B \\
\sin\left(C\hat{A}X\right) &= \overline{CX}\cdot\frac{\sin\gamma}{\overline{AX}} \\
\sin\left(X\hat{A}B\right) &= \overline{XB}\cdot\frac{\sin\beta}{\overline{AX}} \qquad \text{ove } \beta = A\hat{B}C \\
\sin\left(B\hat{C}Z\right) &= \overline{BZ}\cdot\frac{\sin\beta}{\overline{CZ}} \\
\sin\left(Z\hat{C}A\right) &= \overline{ZA}\cdot\frac{\sin\alpha}{\overline{CZ}}
\end{aligned}\right\rangle \Rightarrow \left\langle\begin{aligned}
&\frac{\sin\left(A\hat{B}Y\right)}{\sin\left(Y\hat{B}C\right)}\cdot\frac{\sin\left(C\hat{A}X\right)}{\sin\left(X\hat{A}B\right)}\cdot\frac{\sin\left(B\hat{C}Z\right)}{\sin\left(Z\hat{C}A\right)} = \\
&= \frac{\overline{AY}\cdot\frac{\cancel{\sin\alpha}}{\cancel{\overline{BY}}}}{\overline{YC}\cdot\frac{\cancel{\sin\gamma}}{\cancel{\overline{BY}}}}\cdot\frac{\overline{CX}\cdot\frac{\cancel{\sin\gamma}}{\cancel{\overline{AX}}}}{\overline{XB}\cdot\frac{\cancel{\sin\beta}}{\cancel{\overline{AX}}}}\cdot\frac{\overline{BZ}\cdot\frac{\cancel{\sin\beta}}{\cancel{\overline{CZ}}}}{\overline{ZA}\cdot\frac{\cancel{\sin\alpha}}{\cancel{\overline{CZ}}}} \\
&= \frac{\overline{AY}}{\overline{YC}}\cdot\frac{\overline{CX}}{\overline{XB}}\cdot\frac{\overline{BZ}}{\overline{ZA}}
\end{aligned}\right.$$

3.4) Alcuni punti notevoli di un triangolo alla luce del Teorema di Ceva

Tra le molteplici applicazioni del Teorema di Ceva ve n'è una, didatticamente pregevole, che riguarda alcuni dei numerosissimi punti cosiddetti *notevoli* di un triangolo. In particolare, ad eccezione del Circocentro, rientrano come semplici casi particolari del Teorema di Ceva tutti i *classici* punti notevoli, solitamente proposti alle superiori, vale a dire Baricentro, Incentro, Ortocentro e i tre Excentri. Se ABC è un triangolo qualsiasi, allora, come al solito, α, β e γ stanno ad indicare gli angoli interni aventi vertice rispettivamente nei vertici A, B e C.

Baricentro: le tre mediane concorrono in un punto

Dim.

L'Identità di Ceva associata alle tre mediane, viste come ceviane, è banalmente verificata, valendo 1 ciascuno dei tre rapporti.

Incentro: le tre bisettrici degli angoli interni concorrono in un punto

Dim.

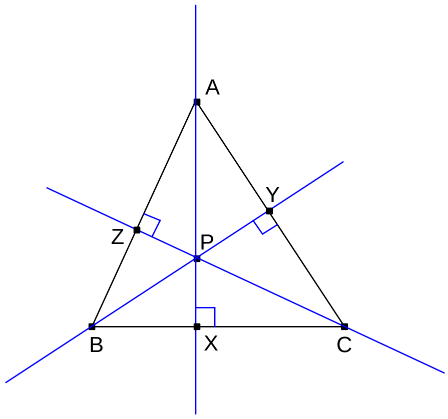
L'Identità di Ceva in forma trigonometrica associata alle tre bisettrici, viste come ceviane, è banalmente verificata, valendo 1 ciascuno dei tre rapporti. In alternativa, si utilizza tre volte il Teorema della Bisettrice dell'Angolo Interno.

Ortocentro: le tre altezze concorrono in un punto

Dim.

Se il triangolo è rettangolo, allora banalmente le tre altezze concorrono nel vertice dell'angolo retto. Non c'è bisogno, dunque, di scomodare il Teorema di Ceva, anche perché due delle tre altezze dovrebbero essere considerate *degeneri* come ceviane, dal momento che ciascuna delle due passa per due vertici anziché uno solo (per cui, volendo comunque avvalersi dell'Identità di Ceva associata alle tre altezze, viste come ceviane, questa andrebbe, a rigori, trattata con un passaggio al limite, introducendo così un'inutile complicazione). Distinguo, pertanto, due soli casi, a seconda che il triangolo sia acutangolo o ottusangolo.

i) triangolo acutangolo



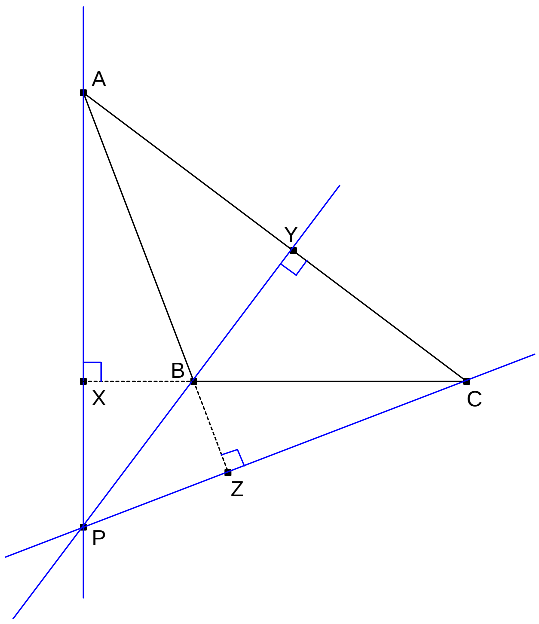
La validità dell'Identità di Ceva è facile conseguenza delle seguenti sei relazioni, ciascuna ricavata da un corrispondente triangolo rettangolo della figura accanto:

$$\overline{AY}=\overline{BY}\,\mathrm{cotg}\,\alpha \quad , \quad \overline{YC}=\overline{BY}\,\mathrm{cotg}\,\gamma \qquad [\text{triangoli ABY , YBC}]$$

$$\overline{CX}=\overline{AX}\,\mathrm{cotg}\,\gamma \quad , \quad \overline{XB}=\overline{AX}\,\mathrm{cotg}\,\beta \qquad [\text{triangoli CAX , XAB}]$$

$$\overline{BZ}=\overline{CZ}\,\mathrm{cotg}\,\beta \quad , \quad \overline{ZA}=\overline{CZ}\,\mathrm{cotg}\,\alpha \qquad [\text{triangoli BCZ , ZCA}]$$

ii) triangolo ottusangolo



L'Identità di Ceva in forma trigonometrica è subito verificata in base alle seguenti sei relazioni, ciascuna (anche qui) ricavata da un corrispondente triangolo rettangolo della figura accanto:

$$\sin\left(A\hat{B}Y\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$

$$\sin\left(Y\hat{B}C\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=\cos\gamma$$

$$\sin\left(C\hat{A}X\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=\cos\gamma$$

$$\sin\left(X\hat{A}B\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-X\hat{B}A\right)=\cos X\hat{B}A=\cos\left(\alpha+\gamma\right)$$

$$\sin\left(B\hat{C}Z\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-Z\hat{B}C\right)=\cos Z\hat{B}C=\cos\left(\alpha+\gamma\right)$$

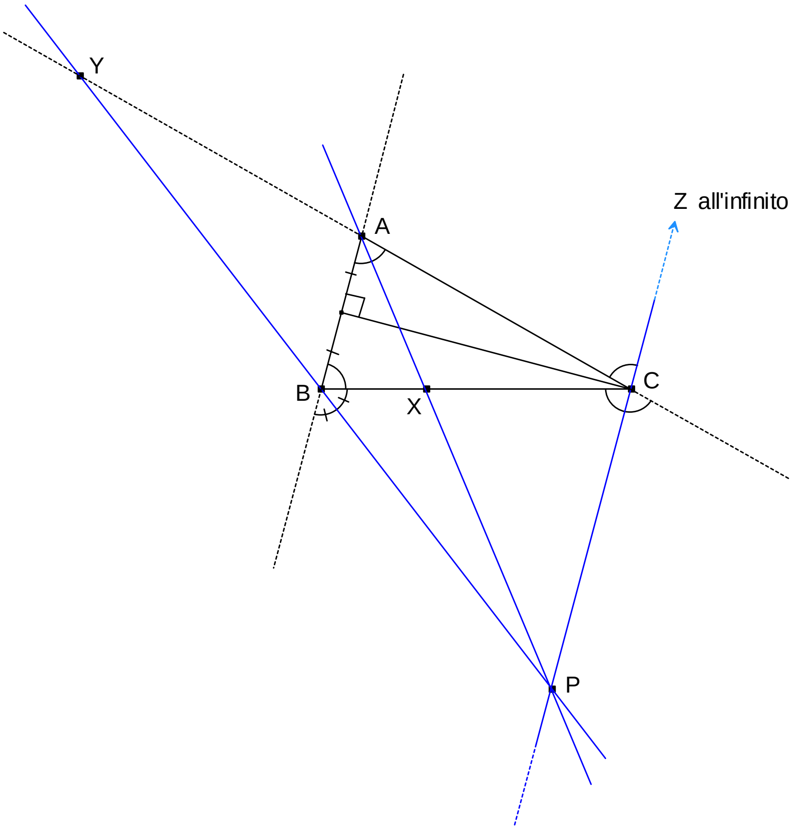
$$\sin\left(Z\hat{C}A\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$

Excentro: la bisettrice di un angolo interno insieme alle bisettrici degli angoli esterni agli altri due angoli interni concorrono in un punto

Dim.

Ragionando con l'angolo interno α (di vertice A), occorre distinguere due casi, a seconda che sia $(\alpha=\beta)\vee(\alpha=\gamma)$ oppure $(\alpha\neq\beta)\wedge(\alpha\neq\gamma)$

i) $(\alpha = \beta) \vee (\alpha = \gamma)$, ad esempio $\alpha = \beta$ (analogamente per $\alpha = \gamma$)



La figura si riferisce, evidentemente, al caso in cui $\alpha = \beta \neq \gamma$, laddove è immediato constatare che soltanto la bisettrice dell'angolo esterno di vertice C diventa parallela al lato AB, facendo sì che l'intercetta Z si situi all'infinito, diventi cioè un cosiddetto *punto improprio*.

Qualora, poi, fosse $\alpha = \beta = \gamma$ (triangolo equilatero), allora, per le stesse ragioni, anche l'intercetta Y diventerebbe un punto improprio.

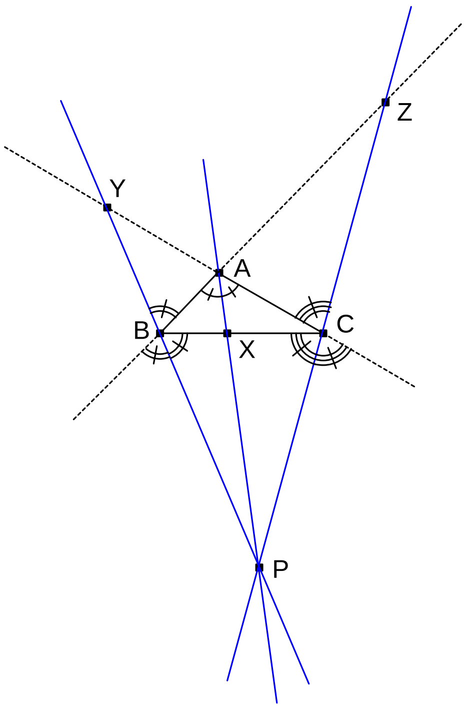
Stando così le cose, è chiaro che il Teorema di Ceva *degenera*, ossia non si può applicare (nella sua forma metrica), mancando all'appello almeno una delle tre intercette.

In realtà, esso continua a valere ma andrebbe affrontato con passaggi al limite, oppure, in modo più appropriato, in ambito *proiettivo* (dove, sparendo la nozione di parallelismo, i punti impropri diventano *punti propri*, alias "punti normali").

In alternativa al Teorema di Ceva, la concorrenzialità delle tre bisettrici si dimostra nel modo usuale:

considero P come l'intersezione delle bisettrici dei due angoli esterni di vertici B e C, dopodiché osservo che "$P \in$ bisettrice dell'angolo esterno di vertice B" equivale a "P è equidistante dalle rette dei lati AB e BC", e così pure "$P \in$ bisettrice dell'angolo esterno di vertice C" equivale a "P è equidistante dalle rette dei lati AC e BC". Pertanto, per transitività, risulta "P è equidistante dalle rette dei lati AB e AC", il che equivale a "$P \in$ bisettrice dell'angolo interno di vertice A", ossia che tale bisettrice passa per P.

ii) $(\alpha \neq \beta) \wedge (\alpha \neq \gamma)$



L’Identità di Ceva in forma trigonometrica è subito verificata in base alle seguenti sei relazioni:

$$\sin\left(A\hat{B}Y\right)=\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}\right)=\cos\frac{\beta}{2}$$

$$\sin\left(Y\hat{B}C\right)=\sin\left(\beta+\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=-\cos\frac{\beta}{2}$$

$$\sin\left(C\hat{A}X\right)=\sin\left(X\hat{A}B\right)=\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\left(B\hat{C}Z\right)=\sin\left(\gamma+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)=-\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\sin\left(Z\hat{C}A\right)=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)=\cos\frac{\gamma}{2}$$

In alternativa, si utilizza tre volte il Teorema della Bisettrice dell’Angolo Esterno

2) Con riferimento al metodo omotetico, ottengo inoltre che:

$$Q \xrightarrow{H(A\,;\,3)} B \xrightarrow{H(A_1\,;\,-1)} C \;\Rightarrow\; Q \xrightarrow{H(A_1\,;\,-1)\circ H(A\,;\,3)} C$$

Ma $H(A_1\,;\,-1)\circ H(A;3)=H(Y;\,-3)$, ove Y è collineare con Q e C e, contemporaneamente, è collineare con A e A_1 (centri delle due omotetie componenti), e perciò coincide con P. Pertanto:

$$C=H(P;\,-3)(Q)\overset{\text{def}}{\Rightarrow}\overrightarrow{PC}=-3\overrightarrow{PQ}\;\Rightarrow\;PC\cong 3QP\;\Rightarrow\;QC\cong 4QP$$

Alla luce di ciò, posso calcolare il rapporto tra le aree dei due triangoli QAP e ABC:

$$\left.\begin{array}{l} QC\cong 4QP \;\Rightarrow\; S(AQC)=4\cdot S(QAP) \\ AB\cong 3QA \;\Rightarrow\; S(ABC)=3\cdot S(AQC)\end{array}\right\rangle \Rightarrow S(QAP)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot S(ABC)\;\Rightarrow\;\frac{S(QAP)}{S(ABC)}=\frac{1}{12}$$

3) Le coordinate baricentriche furono introdotte da Möbius[2] in un suo articolo[3] del 1827 come risposta alla questione sopra quali masse si dovessero collocare nei vertici di un triangolo affinché un qualunque punto del triangolo fosse il baricentro di tali masse. Considerando anche masse *negative*, collocate sempre nei suddetti tre vertici, è possibile considerare come baricentro anche un qualsiasi altro punto esterno al triangolo e ad esso complanare.

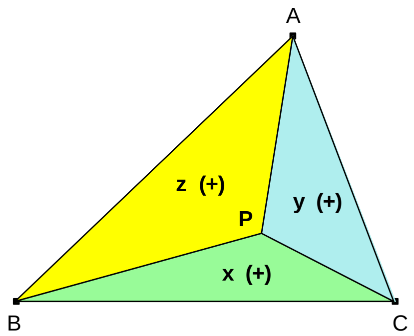
---

[2] August Ferdinand Möbius (1790-1868), matematico ed astronomo tedesco. La sua notorietà è dovuta principalmente alla scoperta di una superficie bidimensionale che, immersa in uno spazio euclideo tridimensionale, presenta una sola linea di bordo e una sola faccia (non è orientabile), chiamata in suo onore *Nastro di Möbius* [in realtà scoperta in modo indipendente poco tempo prima dal matematico, fisico e geodeta tedesco Johann Benedict Listing (1808-1882)]. Si occupò principalmente di Geometria e Teoria dei Numeri. Fu il primo ad introdurre le coordinate omogenee nella geometria proiettiva. In Teoria dei Numeri introdusse l’importante *funzione di Möbius* $\mu(n)$ e la *formula di inversione di Möbius*.

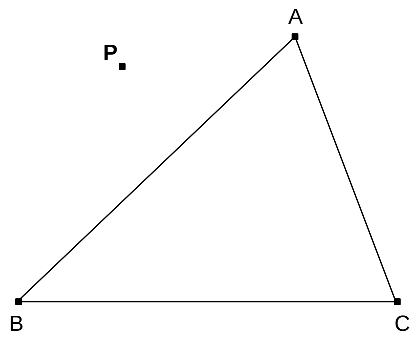
[3] *Der barycentrische Calcül: ein neues Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie*, Leipzig.

Fissato un triangolo ABC (non degenere), detto *triangolo di riferimento*, le *coordinate baricentriche omogenee rispetto ad* ABC $\left(\text{o } \textit{rispetto ai punti } \mathrm{A, B, C}\right)$ *di un punto* P del piano del triangolo si possono definire come la terna di numeri reali $(x:y:z)=\left(\mathrm{S}(\mathbf{P}\mathrm{BC}):\mathrm{S}(\mathrm{A}\mathbf{P}\mathrm{C}):\mathrm{S}(\mathrm{AB}\mathbf{P})\right)$, ossia $x=\rho\,\mathrm{S}(\mathbf{P}\mathrm{BC})$, $y=\rho\,\mathrm{S}(\mathrm{A}\mathbf{P}\mathrm{C})$ e $z=\rho\,\mathrm{S}(\mathrm{AB}\mathbf{P})$, essendo ρ un qualsiasi numero reale non nullo, e dove $\mathrm{S}(\ \dots\ )$ sta ad indicare l'area del triangolo $\dots$, la quale deve intendersi $=0$ se i suoi vertici sono allineati, altrimenti >0 se l'orientazione dei suoi vertici $\left(\text{nell'ordine in cui sono scritti } \dots\right)$ è antioraria, e <0 se tale orientazione è oraria. Si osservi come nella suddetta terna il punto P si sostituisca ordinatamente ai vertici A , B e C del triangolo di riferimento, e come ciò influisca sul corretto segno delle coordinate.

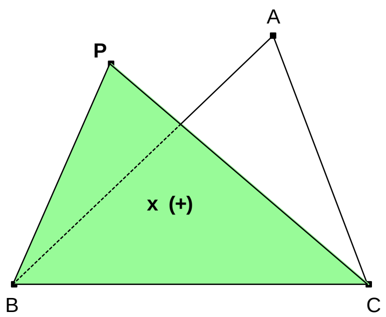
L'orientazione di ABC (seguendo l'ordine in cui sono scritti i vertici) è antioraria, quindi positiva, per cui posso porre $\mathrm{S}(\mathrm{ABC})=1$ (a meno di un fattore di proporzionalità $\neq 0$). In tal modo, quando $\mathrm{P}=\mathrm{A, B, C}$ ottengo rispettivamente $\mathrm{A}(1:0:0)$, $\mathrm{B}(0:1:0)$, $\mathrm{C}(0:0:1)$; inoltre, non è difficile convincersi che vale sempre la relazione $x+y+z=1$ e che, perciò, non sarà mai $x\wedge y\wedge z<0$.

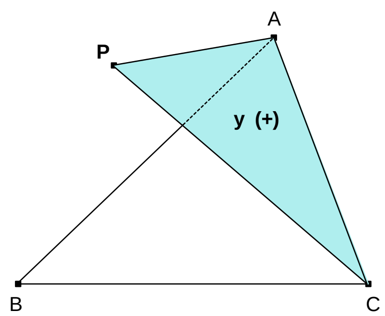


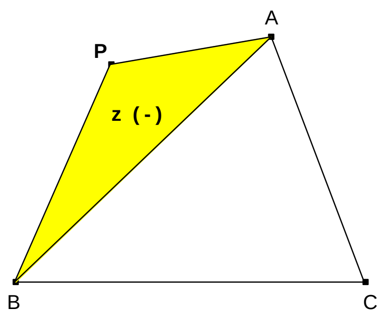
P interno ad ABC

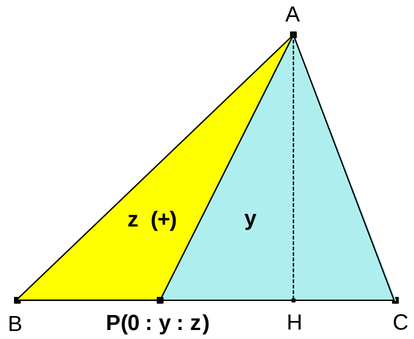


P esterno ad ABC





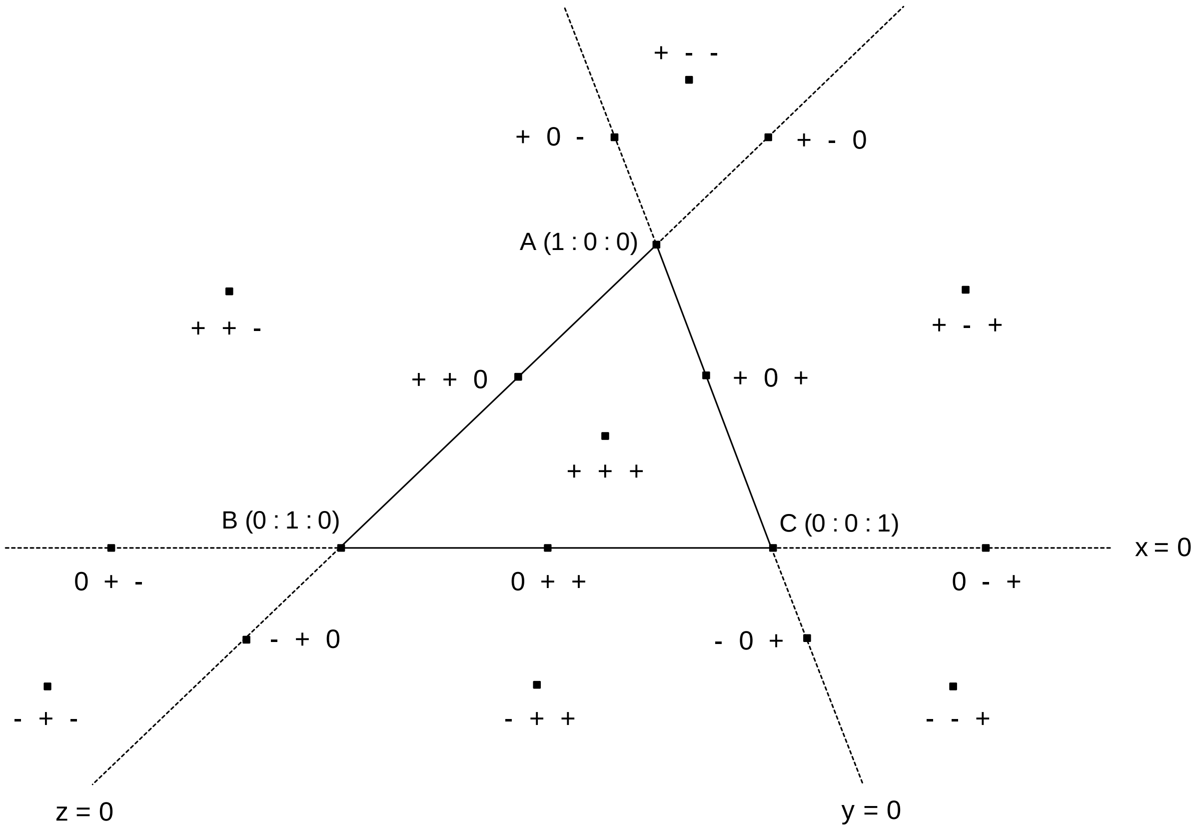




P interno ad un lato di ABC

$$y : z = \frac{\overline{PC} \cdot \overline{AH}}{2} : \frac{\overline{PB} \cdot \overline{AH}}{2} = \overline{PC} : \overline{PB}$$

In generale, il piano resta diviso nelle seguenti sette regioni :



ES-091

Provare l’irrazionalità dei seguenti numeri reali:

a) $\cos 20°$

b) $\sin 10°$

c) $\log 21$

d) $\log\left(2^c \cdot 5^d\right)$, $\forall c, d \in \mathbb{Z}:\ c, d \geq 0$ e $c \neq d$

[**a)** pag. 66, **b)** pag. 67, **c)** e **d)** pag. 70, *Numbers: Rational and Irrational*, di Ivan Niven - New Mathematical Library, published by Random House and The L. W. Singer Company for the Monograph Project of the School Mathematics Study Group, Second printing, Copyright 1961, by Yale University]

Il simbolo “$\log$” è un’abbreviazione di “$\log_{10}$”, così come “$\ln$” lo è di “$\log_e$”

a)

Pongo $\bar{x} = \cos 20°$ e uso l’identità $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, con $\alpha = 20°$

$$\cos 60° = \frac{1}{2} = 4\bar{x}^3 - 3\bar{x} \qquad \left[60° \text{ è un angolo "notevole"}\right]$$

cosicché $\bar{x}$ è, per costruzione, radice reale dell’equazione cubica a coefficienti interi

$$P(x) = 8x^3 - 6x - 1 = 0$$

Per il Teorema sulle Radici Razionali, le eventuali radici razionali sono soltanto $\pm 1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{4},\ \pm\frac{1}{8}$

ma nessuna di queste 8 lo è; infatti:

$$P(-1) = -8+6-1 = -3 \qquad P(+1) = 8-6-1 = 1$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = -1+3-1 = 1 \qquad P\left(+\frac{1}{2}\right) = 1-3-1 = -2$$

$$P\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}+\frac{3}{2}-1 = \frac{3}{8} \qquad P\left(+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}-\frac{3}{2}-1 = -\frac{19}{8}$$

$$P\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{64}+\frac{3}{4}-1 = -\frac{17}{8} \qquad P\left(+\frac{1}{8}\right) = +\frac{1}{64}-\frac{3}{4}-1 = -\frac{111}{8}$$

Pertanto, $\cos 20°$ è irrazionale

b) I soluzione

Pongo $\overline{x} = \sin 10°$ e uso l’identità $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, con $\alpha = 20°$

$$\sin 30° = \frac{1}{2} = 3\overline{x} - 4\overline{x}^3 \qquad [30° \text{ è un angolo "notevole"}]$$

cosicché $\overline{x}$ è, per costruzione, radice reale dell’equazione cubica a coefficienti interi

$$P(x) = 8x^3 - 6x + 1 = 0$$

e, verificato che nessuno degli 8 numeri razionali ± 1, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{1}{8}$ è radice, si ha, per il Teorema sulle Radici Razionali, che $\sin 10°$ è irrazionale

b) II soluzione

Sfrutto l’irrazionalità, sopra provata, di $\cos 20°$

Dall’identità $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ [Formula di Duplicazione]

traggo che $\sin^2 10° = \dfrac{1 - \cos 20°}{2}$

Se, per assurdo, $\sin 10°$ fosse razionale, allora sarebbe tale anche il suo quadrato e, quindi, anche

$-\left(\left(\dfrac{1-\cos 20°}{2}\right)\cdot 2 - 1\right) = \cos 20°$, in contraddizione con l’irrazionalità di $\cos 20°$

c)

$$21 > 1 \;\Rightarrow\; \log 21 > 0$$

Se, per assurdo, $\log 21$ fosse razionale, cioè se esistessero degli interi positivi m ed n, tali che $\log 21 = \dfrac{m}{n}$, cioè $10^{\frac{m}{n}} = 21$, allora, elevando i due membri alla n-esima potenza, si avrebbe $10^m = 21^n$, cioè $2^m \cdot 5^m = 3^n \cdot 7^n$, in contraddizione con il Teorema Fondamentale dell’Aritmetica

d)

$$(c, d \geq 0) \wedge (c \neq d) \;\Rightarrow\; 2^c \cdot 5^d > 1 \;\Rightarrow\; \log\left(2^c \cdot 5^d\right) > 0$$

Se, per assurdo, $\log\left(2^c \cdot 5^d\right)$ fosse razionale, cioè se esistessero degli interi positivi m ed n, tali che $\log\left(2^c \cdot 5^d\right) = \dfrac{m}{n}$, cioè $10^{\frac{m}{n}} = 2^c \cdot 5^d$, allora, elevando i due membri alla n-esima potenza, si avrebbe $10^m = \left(2^c \cdot 5^d\right)^n$, cioè $2^m \cdot 5^m = 2^{n\cdot c} \cdot 5^{n\cdot d}$, il che implica $m = nc = nd$, per il teorema Fondamentale dell’Aritmetica, cioè $n\cdot(c-d)=0$, da cui, essendo $n>0$, seguirebbe $c-d=0$, cioè $c=d$, in contraddizione con l’ipotesi $c\neq d$

PSd+

1) Anziché calcolare il valore del polinomio $P(x)=8x^3-6x-1=0$ in corrispondenza degli 8 valori ±1, $\pm\frac{1}{2}=0,5$, $\pm\frac{1}{4}=0,25$, $\pm\frac{1}{8}=0,125$

si possono confrontare questi con $\cos 20°$, mostrando che quest’ultimo differisce da tutti quelli

Basta, infatti, operare la seguente stima di $\cos 20°$

$0°<20°<30° \Rightarrow \cos 0°>\cos 20°>\cos 30°$ [la funzione $y=\cos x$ è strettamente decrescente nel I quadrante]

cioè $1>\cos 20°>\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{1}{2}=0,5$

2) Provo l’identità goniometrica $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$ [Formula di Triplicazione]

$\cos 3\alpha=\cos(\alpha+2\alpha)$

$=\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha-\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha$ [Formula di Addizione]

$=\cos\alpha\cdot\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)-\sin\alpha\cdot\left(2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\right)$ [ancora Formula di Addizione che diventa Formula di Duplicazione]

$=\cos^3\alpha-\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha-2\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha$

$=\cos^3\alpha-3\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha$

$=\cos^3\alpha-3\cdot\left(1-\cos^2\alpha\right)\cdot\cos\alpha$ [Teorema di Pitagora, alias Uno Goniometrico]

$=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

3) Provo l’identità goniometrica $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ [Formula di Triplicazione]

$\sin 3\alpha=\sin(\alpha+2\alpha)$

$=\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha+\cos\alpha\cdot\sin 2\alpha$ [Formula di Addizione]

$=\sin\alpha\cdot\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)+\cos\alpha\cdot\left(2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\right)$ [ancora Formula di Addizione che diventa Formula di Duplicazione]

$=\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha-\sin^3\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha$

$=3\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha-\sin^3\alpha$

$=3\sin\alpha\cdot\left(1-\sin^2\alpha\right)-\sin^3\alpha$ [Teorema di Pitagora, alias Uno Goniometrico]

$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

4) Vale il seguente teorema

Per ogni angolo α tale che $\cos 2\alpha$ è irrazionale, si ha che sono irrazionali anche $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ e $\mathrm{tang}\alpha$

Dim.

i) per $\cos\alpha$

uso l’identità $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, con la quale ricavo che $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

Se, per assurdo, $\cos\alpha$ fosse razionale, allora sarebbe tale anche il suo quadrato e, quindi, anche

$$\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)\cdot 2 - 1 = \cos 2\alpha$$

in contraddizione con l’ipotesi (dell’irrazionalità di $\cos 2\alpha$)

ii) per $\sin\alpha$

uso l’identità $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, da cui $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

Se, per assurdo, $\sin\alpha$ fosse razionale, allora sarebbe tale anche il suo quadrato e, quindi, anche

$$-\left(\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)\cdot 2 - 1\right) = \cos 2\alpha$$

in contraddizione con l’ipotesi

iii) per $\mathrm{tang}\alpha$ $\left[\text{chiaramente, deve essere } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \mathrm{k}\pi \text{ , } \forall \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\right]$

uso le identità $1 + \mathrm{tang}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$, con le quali ricavo che

$$\mathrm{tang}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{2}{1+\cos 2\alpha} - 1$$

Se, per assurdo, $\mathrm{tang}\alpha$ fosse razionale, allora sarebbe tale anche il suo quadrato e, quindi, anche

$$2\cdot\left(\left(\frac{2}{1+\cos 2\alpha} - 1\right) + 1\right)^{-1} - 1 = \cos 2\alpha$$

in contraddizione con l’ipotesi ■

Pertanto, a partire, ad esempio, dall'irrazionalità di $\cos 20°$, posso subito dichiarare irrazionali un'infinità di numeri "trigonometrici"

$$
\begin{array}{lll}
\cos 10° & \sin 10° & \operatorname{tang} 10° \\
\cos 5° & \sin 5° & \operatorname{tang} 5° \\
\cos 2°\, 30' & \sin 2°\, 30' & \operatorname{tang} 2°\, 30' \\
\cos 1°\, 15' & \sin 1°\, 15' & \operatorname{tang} 1°\, 15' \\
\cos 0°\, 37'\, 30'' & \sin 0°\, 37'\, 30'' & \operatorname{tang} 0°\, 37'\, 30'' \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Analogamente, dall'irrazionalità di $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ segue l'irrazionalità dei seguenti numeri

$$
\begin{array}{lll}
\cos 15° & \sin 15° & \operatorname{tang} 15° \\
\cos 7°\, 30' & \sin 7°\, 30' & \operatorname{tang} 7°\, 30' \\
\cos 3°\, 45' & \sin 3°\, 45' & \operatorname{tang} 3°\, 45' \\
\cos 1°\, 52'\, 30'' & \sin 1°\, 52'\, 30'' & \operatorname{tang} 1°\, 52'\, 30'' \\
\cos 0°\, 56'\, 15'' & \sin 0°\, 56'\, 15'' & \operatorname{tang} 0°\, 56'\, 15'' \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

ES-093

a) Determinare tutti gli interi $m \neq 3$ tali che $m^3 - 3$ sia divisibile per $m-3$

b) Esistono interi $n \geq 2$ per i quali $2^n + 3^n$ sia divisibile per 13 ? Se così è, trovare il più piccolo di tali n e descriverne l’insieme; dare cioè una semplice regola basata su n per decidere quando $2^n + 3^n$ è divisibile per 13, e provarne la correttezza

c) Dimostrare che, $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$, risulta $21 | 100a + 10b + c \iff 21 | a - 2b + 4c$

[**a)** Quesito di febbraio 2003 - “Quesito per Voi” di matematica elementare; Gare e Giochi Matematici, Dipartimento di Matematica “Federigo Enriques”, Università degli Studi di Milano, http://users.mat.unimi.it/users/giochi/quesiti/2003/2003.html; ma anche Problem 2 pag. 1, *250 Problems in Elementary Number Theory*, by Wacław Sierpiński - American Elsevier Publishing Company, Inc., transl. of the polish edit. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1970.
b) Ex 1. (b) Assignment 7, course Mathematics 208a-2001, by Mike Dawes, Associate Professor, Department of Mathematics, University of Western Ontario, London, Ontario, Canada - http://www.math.uwo.ca/~mdawes/courses/208/01/
c) Problème 434 pag. 65 Chap. VI, *Exercices d’Arithmétique, Enoncés et Solutions*, par J. Fitz-Patrick - Edizione 1995 pubblicata da Édition Jacques Gabay come ristampa della Troisième Édition 1914, Librairie Scientifique A. Hermann et Fils]

a)

Mi risparmio la “divisione lunga” tra $m^3 - 3$ e $m-3$ notando al “volo” che:

$$m^3 - 3 = m^3 - 3^3 + 3^3 - 3 = \underbrace{(m-3)\cdot(m^2 + 3m + 9)}_{\text{divisibile per } m-3} + 24$$

In alternativa, pongo $t = m - 3$ e ottengo

$$m^3 - 3 = (t+3)^3 - 3 = t^3 + 9t^2 + 27t + 27 - 3 = \underbrace{t(t^2 + 9t + 27)}_{\text{divisibile per } t} + 24$$

In entrambi i modi, per la linearità della relazione di divisibilità, deduco che:

$$t = m - 3 \,|\, m^3 - 3 = (t+3)^3 - 3 \iff$$

$$\iff t = m - 3 \,|\, 24 = 2^3 \cdot 3$$

$$\iff t = m - 3 \in \{\pm 1 \; ; \; \pm 2 \; ; \; \pm 3 \; ; \; \pm 2 \cdot 3 \; ; \; \pm 2^2 \; ; \; \pm 2^2 \cdot 3 \; ; \; \pm 2^3 \; ; \; \pm 2^3 \cdot 3\}$$

$$\iff m = t + 3 \in \{\pm 1 + 3 \; ; \; \pm 2 + 3 \; ; \; \pm 3 + 3 \; ; \; \pm 4 + 3 \; ; \; \pm 6 + 3 \; ; \; \pm 8 + 3 \; ; \; \pm 12 + 3 \; ; \; \pm 24 + 3\}$$

$$\iff m = t + 3 \in \left\{ \begin{array}{cccccccc} +2 \; ; & +1 \; ; & 0 \; ; & -1 \; ; & -3 \; ; & -5 \; ; & -9 \; ; & -21 \\ +4 \; ; & +5 \; ; & +6 \; ; & +7 \; ; & +9 \; ; & +11 \; ; & +15 \; ; & +27 \end{array} \right\}$$

b)

Esplorazione (avendo a disposizione una lista dei numeri primi):

n	scomposizione in fattori primi di 2^n+3^n	$13 \mid 2^n+3^n$?
2	$2^2+3^2=13$	SI
3	$2^3+3^3=35=5\cdot 7$	NO
4	$2^4+3^4=16+81=97$	NO
5	$2^5+3^5=32+243=275=5^2\cdot 11$	NO
6	$2^6+3^6=64+729=793=13\cdot 61$	SI
7	$2^7+3^7=128+2'187=2'315=5\cdot 463$	NO
8	$2^8+3^8=256+6'561=6'817=17\cdot 401$	NO
9	$2^9+3^9=512+19'683=20'195=5\cdot 7\cdot 577$	NO
10	$2^{10}+3^{10}=1'024+59'049=60'073=13\cdot 4'621$	SI
11	$2^{11}+3^{11}=2'048+177'147=179'195=5\cdot 35'839$	NO
$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$

Uno modo più sistematico e meno complicato (che faccia, cioè, a meno della scomposizione in fattori primi) di esplorazione è quello di lavorare modulo 13 ($\equiv_{13}$)

n	$2^n \equiv_{13}$	$3^n \equiv_{13}$	$2^n+3^n \equiv_{13}$
2	$2^2 \equiv_{13} 4$	$3^2 \equiv_{13} 9$	$4+9 \equiv_{13} 0$
3	$2^3 \equiv_{13} 8$	$3^3 \equiv_{13} 27 \equiv_{13} 1$	$8+1 \equiv_{13} 9$
4	$2^4 \equiv_{13} 16 \equiv_{13} 3$	$3^4 \equiv_{13} 3^3\cdot 3 \equiv_{13} 1\cdot 3 \equiv_{13} 3$	$3+3 \equiv_{13} 6$
5	$2^5 \equiv_{13} 2^4\cdot 2 \equiv_{13} 3\cdot 2 \equiv_{13} 6$	$3^5 \equiv_{13} 3\cdot 3 \equiv_{13} 9$	$6+9 \equiv_{13} 2$
6	$2^6 \equiv_{13} 6\cdot 2 \equiv_{13} 12$	$3^6 \equiv_{13} 9\cdot 3 \equiv_{13} 1$	$12+1 \equiv_{13} 0$
7	$2^7 \equiv_{13} 12\cdot 2 \equiv_{13} 11$	$3^7 \equiv_{13} 1\cdot 3 \equiv_{13} 3$	$11+3 \equiv_{13} 1$
8	$2^8 \equiv_{13} 11\cdot 2 \equiv_{13} 9$	$3^8 \equiv_{13} 3\cdot 3 \equiv_{13} 9$	$9+9 \equiv_{13} 5$
9	$2^9 \equiv_{13} 9\cdot 2 \equiv_{13} 5$	$3^9 \equiv_{13} 9\cdot 3 \equiv_{13} 1$	$5+1 \equiv_{13} 6$
10	$2^{10} \equiv_{13} 5\cdot 2 \equiv_{13} 10$	$3^{10} \equiv_{13} 1\cdot 3 \equiv_{13} 3$	$10+3 \equiv_{13} 0$
11	$2^{11} \equiv_{13} 10\cdot 2 \equiv_{13} 7$	$3^{11} \equiv_{13} 3\cdot 3 \equiv_{13} 9$	$7+9 \equiv_{13} 3$
12	$2^{12} \equiv_{13} 7\cdot 2 \equiv_{13} 1$	$3^{12} \equiv_{13} 9\cdot 3 \equiv_{13} 1$	$1+1 \equiv_{13} 2$
$13 \equiv_{13} 0$	$2^{13} \equiv_{13} 1\cdot 2 \equiv_{13} 2$	$3^{13} \equiv_{13} 1\cdot 3 \equiv_{13} 3$	$2+3 \equiv_{13} 5$
$14 \equiv_{13} 1$	$2^{14} \equiv_{13} 2\cdot 2 \equiv_{13} 4$	$3^{14} \equiv_{13} 3\cdot 3 \equiv_{13} 9$	$4+9 \equiv_{13} 0$
$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$

Da quest'ultima tabella osservo quanto segue:

i) per $2 \le n \le 13$, sequenza dei primi 12 valori interi di n a partire da 2, le sole soluzioni sono $n = 2, 6, 10$, occupanti rispettivamente la posizione 1, 5 e 9 della suddetta sequenza
ii) per i successivi 12 valori di n si ripete la stessa identica sequenza (delle classi) dei resti modulo 13 per entrambi gli addendi 2^n e 3^n, cosicché troverò altre tre soluzioni e nelle stesse posizioni delle tre precedenti, in particolare esse sono $n = 14, 18, 22$, e così indefinitamente. Pertanto, le soluzioni si presentano con periodicità 4 ad iniziare da $n = 2$.

Il *pattern* congetturato in ii) è vero perché $\mathrm{MCD}(2\,;\,13) = 1 = \mathrm{MCD}(3\,;\,13)$ e per il seguente teorema:

$$\boxed{\forall a, n, k > 0 \text{ interi: } \mathrm{MCD}(a\,;\,13) \Rightarrow a^{n+12k} \equiv_{13} a^n}$$

<u>Dim.</u>

Per il Piccolo Teorema di Fermat si ha $a^{12} \equiv_{13} 1$, da cui $a^{n+12k} = a^n \left(a^{12}\right)^k \equiv_{13} a^n \cdot 1^k \equiv_{13} a^n$ ■

Pertanto, il più piccolo degli interi $n \ge 2$ tali che $13 \mid 2^n + 3^n$ è $n = 2$ e il loro insieme è caratterizzato dalla proprietà $n \equiv_{12} 2, 6, 10$, o meglio $n \equiv_4 2$ $[\text{come, peraltro, già rilevato nell'osservazione ii)}]$.

c) I soluzione

Escogitata l'identità $100a + 10b + c + 5(a - 2b + 4c) = 21(5a + c)$, ne deduco che:

$21 \mid 100a + 10b + c \Leftrightarrow 21 \mid 5(a - 2b + 4c)$ [per la linearità della relazione di divisibilità]

$21 \mid 5(a - 2b + 4c) \Leftrightarrow 21 \mid a - 2b + 4c$ [la $\Leftarrow$ essendo ovvia, mentre la $\Rightarrow$ discende dal Lemma di Euclide, essendo 21 e 5 coprimi]

dalle quali, per transitività, deriva la tesi

c) II soluzione

$(\Rightarrow)$

$21 \mid 100a + 10b + c \Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z}: 21x = 100a + 10b + c$

moltiplico per 4 $\quad 4 \cdot 21x = 400a + 40b + 4c$

sottraggo $399a = 21 \cdot 19a$ $\quad 21 \cdot 4x - 21 \cdot 19a = a + 40b + 4c$

sottraggo $42b = 21 \cdot 2b$ $\quad 21 \cdot 4x - 21 \cdot 19a - 21 \cdot 2b = a - 2b + 4c$

quindi $\quad 21 \cdot (4x - 19a - 2b) = a - 2b + 4c \Rightarrow 21 \mid a - 2b + 4c$

$(\Leftarrow)$

$21 \mid a-2b+4c \;\Rightarrow\; \exists y\in\mathbb{Z}:$ $\quad 21y = a-2b+4c$

moltiplico per 100 $\quad 21\cdot 100y = 100a-200b+400c$

sommo $210b = 21\cdot 10b$ $\quad 21\cdot 100y + 21\cdot 10b = 100a+10b+400c$

sottraggo $399c = 21\cdot 19c$ $\quad 21\cdot 100y + 21\cdot 10b - 21\cdot 19c = 100a+10b+c$

quindi $\quad 21\cdot\left(100y+10b-19c\right) = 100a+10b+c \;\Rightarrow\; 21 \mid 100a+10b+c$

c) III soluzione

Uso le congruenze modulo 21 ($\equiv_{21}$)

$(\Rightarrow)$

$$\left.\begin{array}{r} 21 \mid 100a+10b+c \;\Rightarrow\; 100a+10b+c \equiv_{21} 0 \\ 100\equiv_{21} 16 \;\Rightarrow\; 100a+10b+c \equiv_{21} 16a+10b+c \end{array}\right\rangle \;\Rightarrow\; c \equiv_{21} -16a-10b$$

Pertanto, $a-2b+4c \equiv_{21} a-2b+4\cdot\left(-16a-10b\right) \equiv_{21} -3\cdot\underbrace{21}_{\equiv_{21}0}\cdot a - 2\cdot\underbrace{21}_{\equiv_{21}0}\cdot b \equiv_{21} 0$, ossia $21 \mid a-2b+4c$

$(\Leftarrow)$

$$\left.\begin{array}{r} 21 \mid a-2b+4c \;\Rightarrow\; a \equiv_{21} 2b-4c \\ 100a+10b+c \equiv_{21} 16a+10b+c \end{array}\right\rangle \;\Rightarrow\; 16\cdot\left(2b-4c\right)+10b+c \equiv_{21} 4\cdot 21\cdot b - 3\cdot 21\cdot c \equiv_{21} 0$$

Dunque $100a+10b+c \equiv_{21} 0$, ossia $21 \mid 100a+10b+c$

PSd+

Se consideriamo il caso particolare in cui a, b, c sono *cifre* qualsiasi, con $a\neq 0$, allora l’esercizio c) costituisce un *criterio di divisibilità per* 21 per i numeri di *tre* cifre. Pertanto, lo si potrebbe proporre in forma descrittiva (dalla quale saper ricavare la traduzione simbolica), ad esempio:

dimostrare che un numero di tre cifre è divisibile per 21 se e solo se sottraendo il doppio delle decine dalle centinaia e sommando al risultato il quadruplo delle unità si ottiene un multiplo di 21 (zero compreso)

<u>Esempi</u>

$21 \mid 903$	giacché	$21 \mid 9-2\cdot 0+4\cdot 3 = 21$
$21 \mid 651$	“	$21 \mid 6-2\cdot 5+4\cdot 1 = 0$
$21 \nmid 296$	“	$21 \nmid 2-2\cdot 9+4\cdot 6 = 8$
$21 \nmid 171$	“	$21 \nmid 1-2\cdot 7+4\cdot 1 = -9$

ES-104

a) Se $y^2 + 3x^2y^2 = 30x^2 + 517$, con x e y interi, quanto vale $3x^2y^2$?

b) Trovare tutte le coppie di interi $(x\,;\,y)$ tali che $y^2(x^2+1) + x^2(y^2+16) = 448$

c) Trovare tutte le coppie di interi $(x\,;\,y)$ tali che $xy + 2y - 3x = 25$

[**a)** Ex 5.2.24, Course Mathematics 208b-2003 “Introduction to Mathematical Problems”, by Mike Dawes, Associate Professor, Department of Mathematics of the University of Western Ontario, London, Ontario, Canada - http://www.math.uwo.ca/~mdawes/courses/208/03/. **b)** Problem H239, Mayhem Problems, High School Solutions, Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem, Volume 25, n. 4 may 1999 - http://journals.cms.math.ca/CRUX/v25/. **c)** Problem 26, § 1.2 “Primes”, Chap 1 “Integers”, Abstract Algebra online Study Guide, by John A. Beachy, Distinguished Teaching Professor, Department of Mathematical Sciences, Northern Illinois University, Illinois USA - http://www.math.niu.edu/~beachy/abstract_algebra/study_guide/contents.html]

a)

Osservo anzitutto che gli interi x e y devono essere entrambi non nulli, in quanto:

per $x = 0$ non esiste alcun intero y tale che $y^2 = 517 = 11 \cdot 47$

per $y = 0$ non esiste alcun intero x tale che $30x^2 = -517$

Il problema equivale a trovare il valore di $3uv$ tale che:

$u = x^2$, $v = y^2$ e $v + 3uv = 30u + 517$, con x e y interi $\neq 0$.

Trasformo $v + 3uv = 30u + 517$ in un’equivalente uguaglianza ma con i due membri fattorizzati

$$v + 3uv = 30u + 517$$

$$3uv - 30u + v = 517$$

$$3uv - 30u + v - 10 = 507$$

$$3u(v-10) + v - 10 = 507$$

$(*)$ $(v-10)(3u+1) = 3 \cdot 13^2$ [il 2° membro è fattorizzato in primi]

Siccome u è un intero quadrato $\neq 0$ (perché x è un intero $\neq 0$), allora $3u+1$ è un intero positivo. Potrei preoccuparmi di porre $v - 10 > 0$, ma non occorre. Posso, infatti, limitarmi a studiare i vari casi ottenuti uguagliando il fattore $3u+1$ ad ogni singolo fattore positivo del 2° membro:

i) $3u + 1 = 1 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow x = 0$, in contraddizione con quanto osservato inizialmente in alternativa, la ($*$) diventa $v-10=507$, cioè $y^2=517$, impossibile in $\mathbb{Z}$

ii) $3u+1=3 \Rightarrow 3u=2$, impossibile in $\mathbb{Z}$

in alternativa, la ($*$) diventa $v-10=13^2$, cioè $v=y^2=13^2+10=179$, impossibile in $\mathbb{Z}$

iii) $3u+1=13 \Rightarrow u=x^2=4$

la ($*$) diventa $v-10=3\cdot 13$, cioè $v=y^2=3\cdot 13+10=49$

Questo caso è possibile dato che 4 e 49 sono entrambi quadrati, quindi $3uv=3x^2y^2=3\cdot 4\cdot 49=588$

iv) $3u+1=3\cdot 13 \Rightarrow 3u=38$, impossibile in $\mathbb{Z}$

in alternativa, la ($*$) diventa $v-10=13$, cioè $v=y^2=23$, impossibile in $\mathbb{Z}$

v) $3u+1=13^2 \Rightarrow 3u=168$, impossibile in $\mathbb{Z}$

in alternativa, la ($*$) diventa $v-10=3$, cioè $v=y^2=13$, impossibile in $\mathbb{Z}$

vi) $3u+1=3\cdot 13^2=507 \Rightarrow 3u=506$, impossibile in $\mathbb{Z}$

in alternativa, la ($*$) diventa $v-10=1$, cioè $v=y^2=11$, impossibile in $\mathbb{Z}$

In conclusione, $3x^2y^2$ vale 588 e, per inciso, si hanno solo le quattro soluzioni $\left(x=\pm 2\ ;\ y=\pm 7\right)$.

Notare come il problema poteva anche essere formulato nel seguente modo più “machiavellico”:

Trovare tutte le coppie di interi $\left(x\ ;\ y\right)$ che verificano l’uguaglianza $y^2+3x^2y^2=30x^2+517$

b)

Trasformo $y^2\left(x^2+1\right)+x^2\left(y^2+16\right)=448$ in un’equivalente uguaglianza ma con i due membri fattorizzati, uno dei quali con solo fattori numerici.

$$2x^2y^2+16x^2+y^2=448$$

$$2x^2\left(y^2+8\right)+y^2+8-8=448$$

$$2x^2\left(y^2+8\right)+y^2+8=456$$

$$\left(2x^2+1\right)\left(y^2+8\right)=1\cdot 2^3\cdot 3\cdot 19$$

Dovendo essere $x,y\in\mathbb{Z}$, allora $2x^2+1$ e y^2+8 sono interi positivi, di cui, certamente, $2x^2+1$ è dispari, cosicché, ragionando con quest’ultimo, si ha che l’equazione è soddisfatta se e solo se $\left(2x^2+1=1\right)\vee\left(2x^2+1=3\right)\vee\left(2x^2+1=19\right)$.

Esaminando i vari casi:

$$2x^2+1=1 \quad \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2+8=2^3\cdot 3\cdot 19 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2=448=2^6\cdot 7 \quad \text{impossibile in } \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$2x^2+1=3 \quad \Rightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ y^2+8=2^3\cdot 19 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ y^2=144=12^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\pm 12 \end{cases}$$

$$2x^2+1=19 \quad \Rightarrow \begin{cases} x^2=9 \\ y^2+8=2^3\cdot 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\pm 3 \\ y^2=16=4^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\pm 3 \\ y=\pm 4 \end{cases}$$

In conclusione, le sole soluzioni intere dell’equazione data sono le 8 coppie $(\pm 1\,;\ \pm 12)$, $(\pm 3\,;\ \pm 4)$

c)

$$xy+2y-3x=25$$

$$y(x+2)-3x-6=25-6$$

$$y(x+2)-3(x+2)=19$$

$$(x+2)(y-3)=19$$

Considerando le quattro possibili scomposizioni in due fattori interi del primo 19 ottengo altrettante soluzioni:

$$(x+2=+1)\wedge(y-3=+19) \Rightarrow (-1\,;\ +22)$$

$$(x+2=-1)\wedge(y-3=-19) \Rightarrow (-3\,;\ -16)$$

$$(x+2=+19)\wedge(y-3=+1) \Rightarrow (+17\,;\ +4)$$

$$(x+2=-19)\wedge(y-3=-1) \Rightarrow (-21\,;\ +2)$$

ES-087

a) Sia c l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, mentre a e b gli altri due lati. Provare che, per ogni intero $k > 2$, si ha $a^k + b^k < c^k$

b) Provare che, per ogni intero $n > 1$, l'equazione $a^n + b^n = c^n$ non ammette alcuna soluzione con a, b, c interi tali che $0 < a, b < n$

c) Provare che non esistono quattro interi positivi x, y, z ed n tali che $z \le n$ e $x^n + y^n = z^n$

[**a)** Ex. 2.3 (ii) pag. 97, *Equations and Inequalities. Elementary Problems and Theorems in Algebra and Number Theory*, di Jiří Herman, Radan Kučera e Jaromír Šimša - Transl. by Karl Dilcher, CMS Books in Mathematics-Canadian Mathematical Society, Springer-Verlag, 2000. **b)** Ex. 12, Chapitre 1 Nombres, Analyse I pour Ingénieurs, Exercices 2006-07, by Joachim Stubbe, École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), Section de Mathématiques - http://sma.epfl.ch/cours/csma/analyse-stubbe.htm. **c)** Example 58 Chap. 2 pag. 22, *Number Theory for Mathematical Contests*, 2007, Lecture Notes by David Santos, Mathematics Department of the Community College of Philadelphia, Pennsylvania, USA - http://faculty.ccp.edu/dept/math/ , http://faculty.ccp.edu/faculty/dsantos/lecture_notes.html; per quest'ultimo esercizio Santos riporta tra parentesi l'attribuzione "Grünert, 1856", con riferimento al matematico e fisico tedesco Johann August Grünert (1797-1872)]

a)

$$\begin{cases} (0 < a < c) \wedge (k \text{ intero } > 2) \Rightarrow a^{k-2} < c^{k-2} \Rightarrow a^2 \cdot a^{k-2} = a^k < a^2 \cdot c^{k-2} \\ (0 < b < c) \wedge (k \text{ intero } > 2) \Rightarrow b^{k-2} < c^{k-2} \Rightarrow b^2 \cdot b^{k-2} = b^k < b^2 \cdot c^{k-2} \end{cases}$$

sommando e tenendo conto della relazione pitagorica $a^2 + b^2 = c^2$, ottengo

$$a^k + b^k < a^2 \cdot c^{k-2} + b^2 \cdot c^{k-2} = c^{k-2} \cdot (a^2 + b^2) = c^{k-2} \cdot c^2 = c^k$$

b)

Se, per assurdo, esistono quattro interi a, b, c ed n tali che $0 < a, b < n$ (e quindi $n > 1$) e $a^n + b^n = c^n$, allora ho che $c^n = a^n + b^n > 0 + b^n \Rightarrow c > b \Rightarrow c \ge b + 1$, cosicché

$$c^n \ge (b+1)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} b^k 1^{n-k} \right) \qquad [\text{Binomio di Newton}]$$

$$= b^n + nb^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} b^{n-1} + \sum_{k=3}^{n} \left(\binom{n}{k} b^k \right)$$

$$> b^n + nb^{n-1} + \sum_{k=3}^{n} \left(\binom{n}{k} b^k \right) \qquad \left[(n > 1) \wedge (b > 0) \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} b^{n-1} > 0 \right]$$

$\geq b^n + nb^{n-1}$ $\left[\begin{array}{l}\text{essendo i coefficienti binomiali degli interi e } b \text{ intero } > 0 \text{ ,} \\ \text{se ne ricava che } \sum_{k=3}^{n}\left(\binom{n}{k}b^k\right) \text{ è un intero } \geq 0 \text{ , qualora } n \geq 3\end{array}\right]$

Pertanto, vale la disuguaglianza stretta $c^n > b^n + nb^{n-1}$.

D'altro canto, assumendo WLOG che $a \leq b$, ottengo $c^n = a^n + b^n \leq b^n + b^n = b^n + bb^{n-1} < b^n + nb^{n-1}$, in contraddizione con quanto ottenuto prima

c)

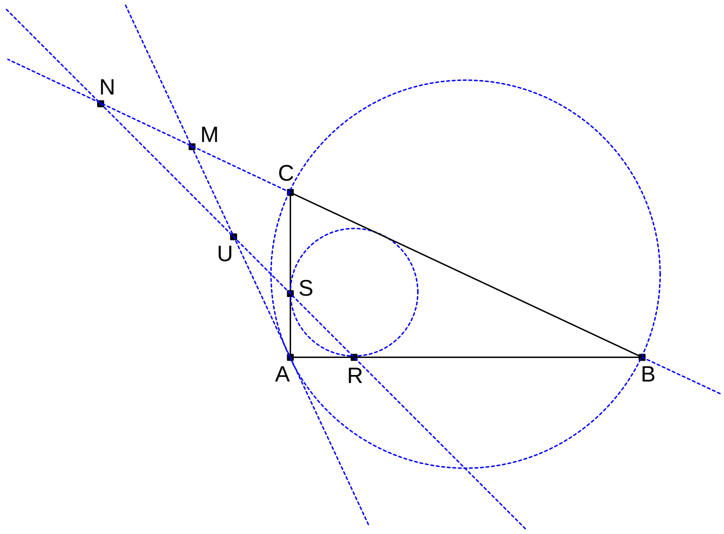
Se x, y, z ed n sono quattro interi positivi tali che $x^n + y^n = z^n$, allora $z > x$ e $z > y$, cioè $z - x \geq 1$ e $z - y \geq 1$. Se in più accetto anche l'ipotesi $z \leq n$, allora, assumendo WLOG che $(0<)x \leq y$, ottengo

$$\begin{aligned}
z^n - y^n &= (z-y)\left(z^{n-1} + z^{n-2}y + \ \dots\ + zy^{n-2} + y^{n-1}\right) \\
&\geq 1 \cdot \left(z^{n-1} + z^{n-2}y + \ \dots\ + zy^{n-2} + y^{n-1}\right) && [\text{perché } z - y \geq 1] \\
&> x^{n-1} + x^{n-2}y + \ \dots\ + xy^{n-2} + y^{n-1} && [\text{dato che } y > 0 \ , \ z > x > 0 \text{ e } n \geq 1] \\
&\geq x^{n-1} + x^{n-2}x + \ \dots\ + xx^{n-2} + x^{n-1} && [\text{dato che } y \geq x > 0] \\
&= nx^{n-1} \\
&\geq zx^{n-1} && [\text{dato che } n \geq z] \\
&> xx^{n-1} && [\text{dato che } z > x > 0] \\
&= x^n
\end{aligned}$$

Pertanto, $z^n - y^n > x^n$, in contraddizione con l'ipotesi $x^n + y^n = z^n$

ES-094

In un triangolo rettangolo scaleno ABC, retto in A, si considerino le circonferenze inscritta e circoscritta. Si indichi con M il punto di intersezione della retta tangente in A alla circonferenza circoscritta con la retta BC, e con S e R i rispettivi punti di tangenza della circonferenza inscritta con i cateti AC e AB. La retta RS interseca la retta BC in N e la retta AM in U. Dimostrare che il triangolo UMN è isoscele

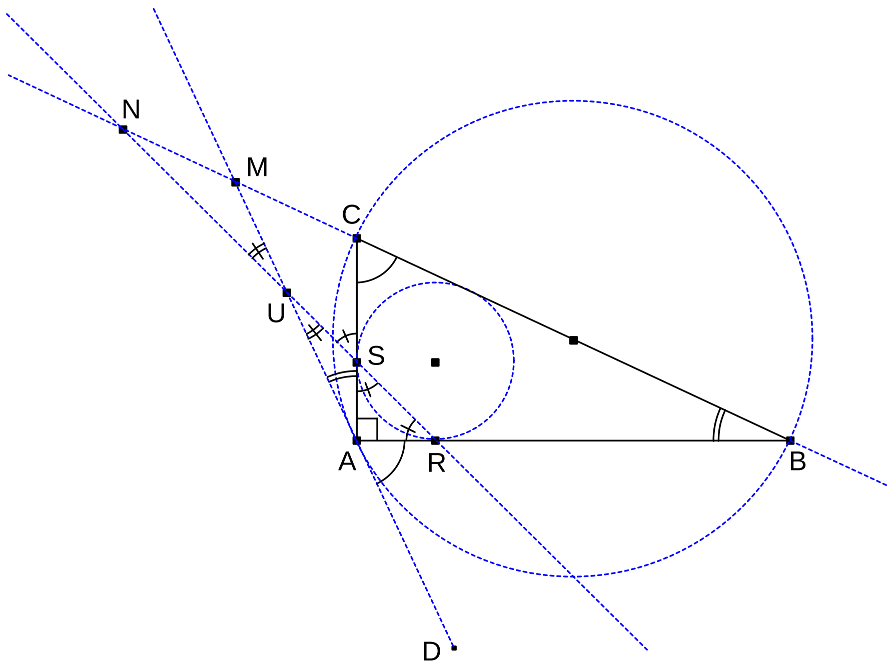


(Problema 1, Pruebas primer día, XXI OIM (Olimpiada Iberoamericana de Matemática) 2006, Guayaquil, Ecuador)

Essendo ABC scaleno, uno dei due angoli acuti ha ampiezza minore di 45°, e dunque, WLOG posso supporre, come da figura, che sia $0° < C\hat{B}A = \beta < 45°$, ossia che AB sia il cateto maggiore

I soluzione

Con la geometria euclidea. Rifaccio la figura segnando un po’ di angoli, essendo quelli con lo stesso segno tra loro congruenti per motivi di seguito specificati



$D\hat{A}B \cong A\hat{C}B = 90° - \beta$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $\overset{\frown}{AB}$ (D è un punto qualsiasi $\neq A$ della retta AM dalla parte opposta di M), quindi $A\hat{C}M = 90° + \beta$

$C\hat{A}M \cong C\hat{B}A = \beta$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $\overset{\frown}{AC}$

$N\hat{M}U \cong A\hat{C}M + C\hat{A}M = 90° + 2\beta$ per il Teorema dell’Angolo Esterno

$AS \cong AR$ perché segmenti di tangenti alla circonferenza inscritta condotte da uno stesso punto esterno, quindi ARS è un triangolo rettangolo isoscele, cioè $A\hat{R}S \cong A\hat{S}R = 45°$

$A\hat{U}R = 180° - U\hat{A}R - U\hat{R}A = 180° - \left(C\hat{A}M + 90°\right) - A\hat{R}S = 180° - (\beta + 90°) - 45° = 45° - \beta$

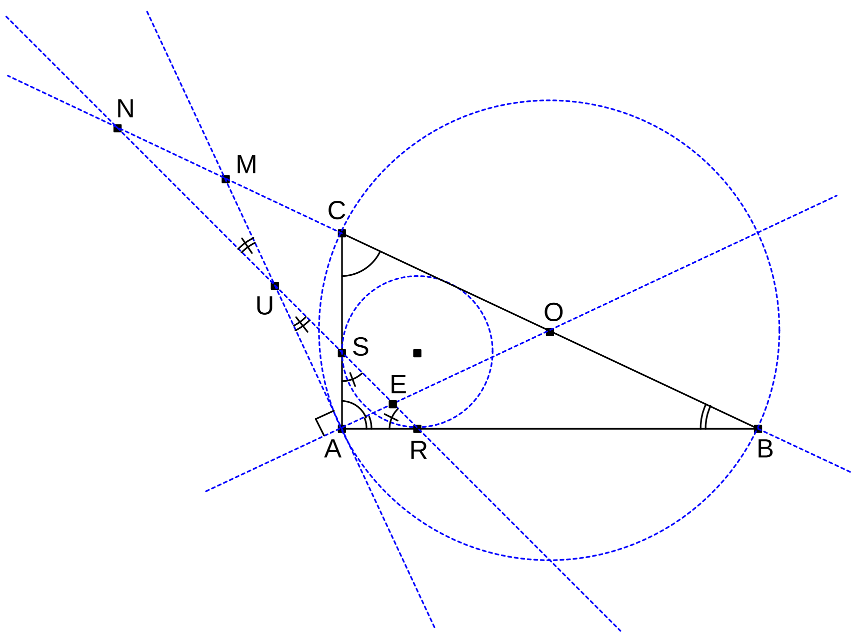
$M\hat{U}N \cong A\hat{U}R = 45° - \beta$ perché angoli opposti al vertice

$M\hat{N}U = 180° - N\hat{M}U - M\hat{U}N = 180° - (90° + 2\beta) - (45° - \beta) = 45° - \beta$, e che posso ricavare anche dal triangolo NRB, tenendo conto che $N\hat{R}B = 180° - A\hat{R}S = 180° - (180° - 45°) = 135°$, per cui $M\hat{N}U = 180° - N\hat{R}B - N\hat{B}R = 180° - 135° - C\hat{B}A = 45° - \beta$

pertanto, $M\hat{U}N \cong M\hat{N}U = 45° - \beta \;\Rightarrow\; MN \cong MU$, cioè il triangolo UMN è isoscele di base NU

II soluzione

Sempre con la geometria euclidea. Rifaccio la figura aggiungendo alcuni elementi



Indicato con O il centro della circonferenza circoscritta ad ABC, osservo che esso coincide con il punto medio dell’ipotenusa BC, e quindi $OA \cong OC \cong OB$, essendo tutti raggi di detta circonferenza. Pertanto, AOC e AOB sono isosceli di rispettive basi AC e AB, e quindi $O\hat{A}B \cong O\hat{B}A = C\hat{B}A = \beta$ e $O\hat{A}C \cong O\hat{C}A = B\hat{C}A = 90° - \beta \;\Rightarrow\; A\hat{O}C = 2\beta$

La retta AO è perpendicolare alla retta AM tangente in A al circocerchio, cioè il triangolo OMA è retto in A, dunque $O\widehat{M}A = 90° - A\widehat{O}M = 90° - A\widehat{O}C = 90° - 2\beta \Rightarrow N\widehat{M}U = 90° + 2\beta$

$AS \cong AR$ perché segmenti di tangenti all'incerchio condotte da uno stesso punto esterno, quindi ARS è un triangolo rettangolo isoscele, cioè $A\widehat{R}S \cong A\widehat{S}R = 45°$

$$A\widehat{E}S = 180° - S\widehat{A}E - A\widehat{S}E = 180° - O\widehat{A}C - A\widehat{S}R = 180° - (90° - \beta) - 45° = 45° + \beta$$

Il triangolo AUE è retto in A $\Rightarrow$ $A\widehat{U}E = 90° - A\widehat{E}U = 90° - A\widehat{E}S = 45° - \beta$

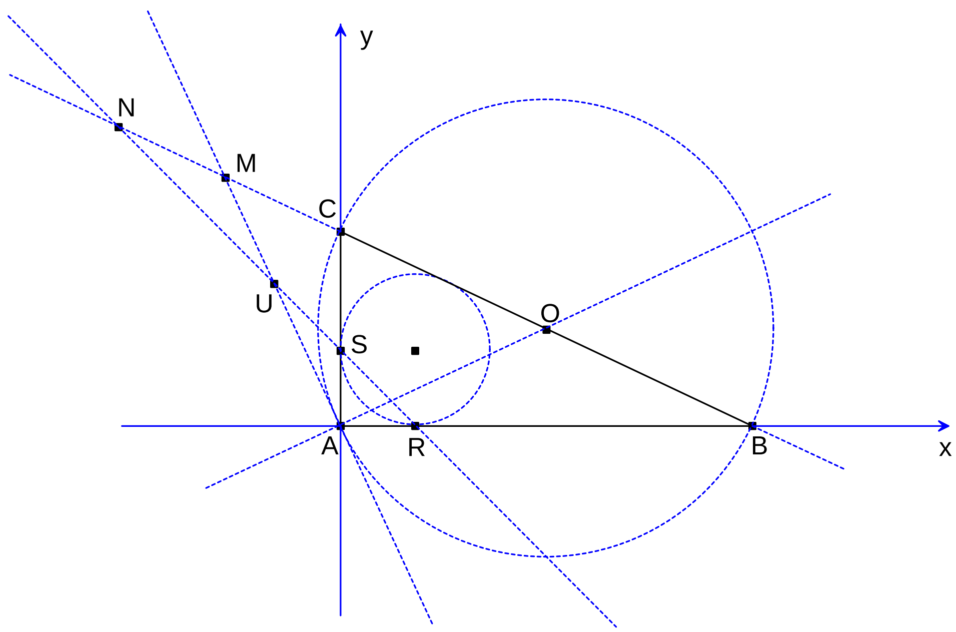
$A\widehat{U}E \cong M\widehat{U}N$ perché opposti al vertice $\Rightarrow$ $M\widehat{U}N = 45° - \beta$

$M\widehat{N}U = 180° - N\widehat{M}U - M\widehat{U}N = 180° - (90° + 2\beta) - (45° - \beta) = 45° - \beta$, e che posso ricavare anche dal triangolo NRB, tenendo conto che $N\widehat{R}B = 180° - A\widehat{R}S = 180° - (180° - 45°) = 135°$, per cui $M\widehat{N}U = 180° - N\widehat{R}B - N\widehat{B}R = 180° - 135° - C\widehat{B}A = 45° - \beta$

Pertanto, $M\widehat{U}N \cong M\widehat{N}U = 45° - \beta \Rightarrow MN \cong MU$, cioè il triangolo UMN è isoscele di base NU

III soluzione

Con la geometria analitica. Scelgo il riferimento cartesiano ortogonale come in figura, e in modo tale che il cateto maggiore sia quello disposto sul semiasse delle ascisse positive. Quindi $B = (b\,;0)$ e $C = (0\,;c)$, con $b, c \in \mathbb{R}:\ b > c > 0$



La circonferenza circoscritta passa per l'origine A e ha centro $O = \left(\dfrac{b}{2}\,;\,\dfrac{c}{2}\right)$, quindi ha equazione $x^2 + y^2 - bx - cy = 0$.

La retta BC ha equazione $\frac{x}{b}+\frac{y}{c}=1$ (equazione *segmentaria*), cioè $y=-\frac{c}{b}\cdot x+c$, la retta AO ha equazione $y=\frac{c}{b}\cdot x$, mentre la retta AM, tangente al circocerchio in A, ha equazione $y=-\frac{b}{c}\cdot x$, essendo perpendicolare alla retta AO

Il raggio dell'incerchio è $r=\overline{AS}=\overline{AR}$ e per trovarne l'espressione in funzione di b e c uso la relazione generale $r=\frac{S}{p}$, essendo S e p rispettivamente l'area e il semiperimetro del triangolo ABC, quindi $r=\dfrac{\frac{bc}{2}}{\frac{b+c+\sqrt{b^2+c^2}}{2}}=\dfrac{bc\cdot\left(b+c-\sqrt{b^2+c^2}\right)}{(b+c)^2-\left(b^2+c^2\right)}=\dfrac{b+c-\sqrt{b^2+c^2}}{2}$, cosicché la retta RS, parallela alla bisettrice del II e IV quadrante, ha equazione $y=-x+\dfrac{b+c-\sqrt{b^2+c^2}}{2}$

$$\left[\begin{array}{l}\text{notare che } b+c-\sqrt{b^2+c^2}>0\\ \text{geometricamente perché la somma dei cateti è maggiore dell'ipotenusa}\\ \text{algebricamente perché l'ipotesi } b>c>0 \text{ implica } (b+c)^2>b^2+c^2\end{array}\right]$$

Ora posso calcolare le coordinate dei punti M, N e U

$$\mathbf{M}:\ \begin{cases}\text{retta BC}\\ \text{retta AM}\end{cases} \rightarrow \begin{cases}y=-\frac{c}{b}\cdot x+c\\ y=-\frac{b}{c}\cdot x\end{cases} \rightarrow \begin{cases}-\frac{b}{c}\cdot x=-\frac{c}{b}\cdot x+c\\ y=-\frac{b}{c}\cdot x\end{cases} \rightarrow \begin{cases}-b^2x+c^2x=bc^2\\ y=-\frac{b}{c}\cdot x\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-\dfrac{c^2}{b^2-c^2}\cdot b\\ y=-\dfrac{b}{c}\cdot\left(-\dfrac{c^2}{b^2-c^2}\cdot b\right)=\dfrac{b^2}{b^2-c^2}\cdot c\end{cases} \rightarrow \mathbf{M}=\left(-\frac{c^2}{b^2-c^2}\cdot b\ ;\ \frac{b^2}{b^2-c^2}\cdot c\right)$$

$$\mathbf{N}:\ \begin{cases}\text{retta RS}\\ \text{retta BC}\end{cases} \rightarrow \begin{cases}y=-x+\dfrac{b+c-\sqrt{b^2+c^2}}{2}\\ y=-\dfrac{c}{b}\cdot x+c\end{cases} \rightarrow \begin{cases}-\dfrac{c}{b}\cdot x+c=-x+\dfrac{b+c-\sqrt{b^2+c^2}}{2}\\ y=-\dfrac{c}{b}\cdot x+c\end{cases}$$

$$\begin{cases}2\cdot(b-c)\cdot x=b^2-bc-\sqrt{b^2+c^2}\\ y=-\dfrac{c}{b}\cdot x+c\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{\left(\sqrt{b^2+c^2}-(b-c)\right)}{2\cdot(b-c)}\cdot b\\ y=\left(-\dfrac{c}{b}\right)\cdot\left(-\dfrac{\left(\sqrt{b^2+c^2}-(b-c)\right)}{2\cdot(b-c)}\cdot b\right)+c\end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{\left(\sqrt{b^2+c^2}-(b-c)\right)}{2b-c}\cdot b \\ y = \dfrac{\left(\sqrt{b^2+c^2}-(b-c)+2(b-c)\right)}{2b-c}\cdot c \end{cases} \rightarrow \quad \mathbf{N} = \left(-\frac{\sqrt{b^2+c^2}-(b-c)}{2\cdot(b-c)}\cdot b\ ;\ \frac{\sqrt{b^2+c^2}+(b-c)}{2\cdot(b-c)}\cdot c\right)$$

$$\mathbf{U}:\ \begin{cases}\text{retta RS}\\ \text{retta AM}\end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -x + \dfrac{b+c-\sqrt{b^2+c^2}}{2} \\ y = -\dfrac{b}{c}\cdot x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\dfrac{b}{c}\cdot x = -x + \dfrac{b+c-\sqrt{b^2+c^2}}{2} \\ y = -\dfrac{b}{c}\cdot x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\cdot(b-c)\cdot x = \left(\sqrt{b^2+c^2}-(b+c)\right)\cdot c \\ y = -\dfrac{b}{c}\cdot x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{b+c-\sqrt{b^2+c^2}}{2\cdot(b-c)}\cdot c \\ y = \left(-\dfrac{b}{c}\right)\cdot\left(-\dfrac{b+c-\sqrt{b^2+c^2}}{2\cdot(b-c)}\cdot c\right) \end{cases}$$

$$\mathbf{U} = \left(-\frac{b+c-\sqrt{b^2+c^2}}{2\cdot(b-c)}\cdot c\ ;\ \frac{b+c-\sqrt{b^2+c^2}}{2\cdot(b-c)}\cdot b\right)$$

Ora calcolo $\overline{MN}$ ed $\overline{MU}$

$$\overline{\mathbf{MN}} = \sqrt{\left(-\frac{c^2}{b^2-c^2}\cdot b + \frac{\sqrt{b^2+c^2}-(b-c)}{2\cdot(b-c)}\cdot b\right)^2 + \left(\frac{b^2}{b^2-c^2}\cdot c - \frac{\sqrt{b^2+c^2}+(b-c)}{2\cdot(b-c)}\cdot c\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(-2c^2b+\left(\sqrt{b^2+c^2}-(b-c)\right)\cdot b\cdot(b+c)\right)^2+\left(2b^2c-\left(\sqrt{b^2+c^2}+(b-c)\right)\cdot c\cdot(b+c)\right)^2}}{2\cdot\left|b^2-c^2\right|}$$

[potrei anche evitare la notazione di valore assoluto a denominatore avendo scelto di lavorare con $b > c > 0$]

$$= \frac{\sqrt{\left(-2c^2b+\sqrt{b^2+c^2}\cdot b\cdot(b+c)-b\cdot(b^2-c^2)\right)^2+\left(2b^2c-\sqrt{b^2+c^2}\cdot c\cdot(b+c)-c\cdot(b^2-c^2)\right)^2}}{2\cdot\left|b^2-c^2\right|}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\sqrt{b^2+c^2}\cdot b\cdot(b+c)-b^3-bc^2\right)^2+\left(-\sqrt{b^2+c^2}\cdot c\cdot(b+c)+c^3+b^2c\right)^2}}{2\cdot\left|b^2-c^2\right|}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\sqrt{b^2+c^2}\cdot b\cdot(b+c)-b\cdot(b^2+c^2)\right)^2+\left(-\sqrt{b^2+c^2}\cdot c\cdot(b+c)+c\cdot(b^2+c^2)\right)^2}}{2\cdot\left|b^2-c^2\right|}$$

$$=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2\cdot\left|b^2-c^2\right|}\cdot\sqrt{b^2\cdot\left(\left(b+c\right)-\sqrt{b^2+c^2}\right)^2+c^2\cdot\left(-\left(b+c\right)+\sqrt{b^2+c^2}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2\cdot\left|b^2-c^2\right|}\cdot\sqrt{\left(\left(b+c\right)-\sqrt{b^2+c^2}\right)^2\cdot\left(b^2+c^2\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2\cdot\left|b^2-c^2\right|}\cdot\left(\left(b+c\right)-\sqrt{b^2+c^2}\right)\cdot\sqrt{b^2+c^2}$$

$$=\frac{\left(b+c-\sqrt{b^2+c^2}\right)\cdot\left(b^2+c^2\right)}{2\cdot\left|b^2-c^2\right|}$$

$$\overline{\mathbf{MU}}=\sqrt{\left(-\frac{c^2}{b^2-c^2}\cdot b+\frac{b+c-\sqrt{b^2+c^2}}{2\cdot\left(b-c\right)}\cdot c\right)^2+\left(\frac{b^2}{b^2-c^2}\cdot c-\frac{b+c-\sqrt{b^2+c^2}}{2\cdot\left(b-c\right)}\cdot b\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{\left(-2c^2b+\left(\left(b+c\right)-\sqrt{b^2+c^2}\right)\cdot c\cdot\left(b+c\right)\right)^2+\left(2b^2c-\left(\left(b+c\right)-\sqrt{b^2+c^2}\right)\cdot b\cdot\left(b+c\right)\right)^2}}{2\cdot\left|b^2-c^2\right|}$$

$$=\frac{\sqrt{\left(-2c^2b+c\cdot\left(b+c\right)^2-\sqrt{b^2+c^2}\cdot c\cdot\left(b+c\right)\right)^2+\left(2b^2c-b\cdot\left(b+c\right)^2+\sqrt{b^2+c^2}\cdot b\cdot\left(b+c\right)\right)^2}}{2\cdot\left|b^2-c^2\right|}$$

$$=\frac{\sqrt{\left(b^2c+c^3-\sqrt{b^2+c^2}\cdot c\cdot\left(b+c\right)\right)^2+\left(-b^3-bc^2+\sqrt{b^2+c^2}\cdot b\cdot\left(b+c\right)\right)^2}}{2\cdot\left|b^2-c^2\right|}$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\left(b^2+c^2\right)\cdot c-\sqrt{b^2+c^2}\cdot c\cdot\left(b+c\right)\right)^2+\left(-\left(b^2+c^2\right)\cdot b+\sqrt{b^2+c^2}\cdot b\cdot\left(b+c\right)\right)^2}}{2\cdot\left|b^2-c^2\right|}$$

$$=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2\cdot\left|b^2-c^2\right|}\cdot\sqrt{c^2\cdot\left(\sqrt{b^2+c^2}-\left(b+c\right)\right)^2+b^2\cdot\left(-\sqrt{b^2+c^2}+\left(b+c\right)\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2\cdot\left|b^2-c^2\right|}\cdot\sqrt{\left(\left(b+c\right)-\sqrt{b^2+c^2}\right)^2\cdot\left(b^2+c^2\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2\cdot\left|b^2-c^2\right|}\cdot\left(\left(b+c\right)-\sqrt{b^2+c^2}\right)\cdot\sqrt{b^2+c^2}$$

$$=\frac{\left(b+c-\sqrt{b^2+c^2}\right)\cdot\left(b^2+c^2\right)}{2\cdot\left|b^2-c^2\right|}$$

Pertanto, risulta $\overline{MN} = \overline{MU}$, cioè il triangolo UMN è isoscele di base NU

PSd+

1) $$\overline{MN} = \overline{MU} = \frac{\left(b+c-\sqrt{b^2+c^2}\right)\cdot\left(b^2+c^2\right)}{2\cdot\left|b^2-c^2\right|}$$

$$= \frac{\dfrac{b+c-\sqrt{b^2+c^2}}{2}\cdot\left(\sqrt{b^2+c^2}\right)^2}{\left|b^2-c^2\right|}$$

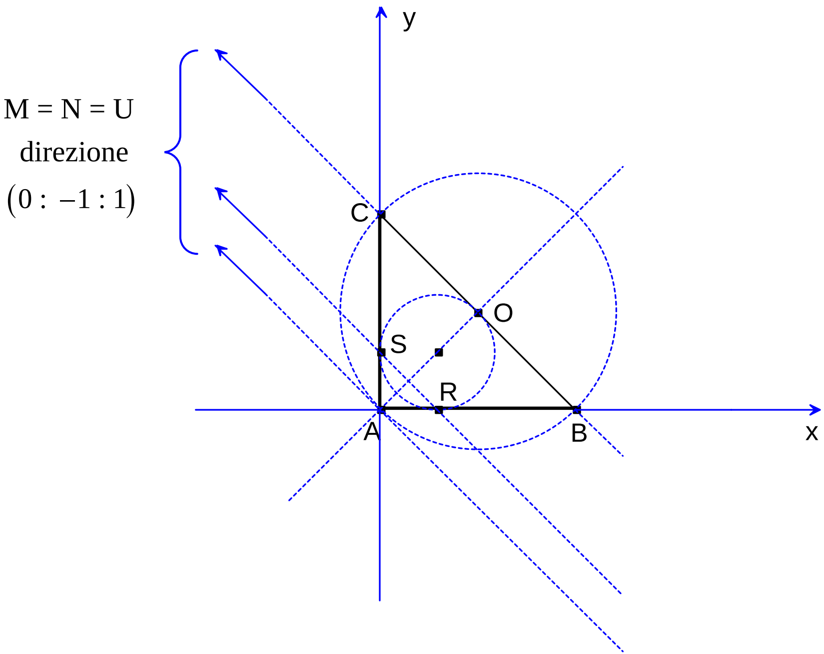
$$= \frac{\overline{BC}^{\,2}}{\left|\overline{AC}^{\,2}-\overline{AB}^{\,2}\right|}\cdot r$$

$$= \frac{\text{quadrato dell'ipotenusa di } ABC}{\left|\text{differenza dei quadrati dei cateti di } ABC\right|}\cdot\left(\text{raggio dell'incerchio di } ABC\right)$$

Questa bella e inaspettata relazione tra i segmenti MN e MU ed i lati del triangolo ABC compensa i lunghi (ma istruttivi) calcoli del metodo analitico. Provarla con la sola geometria euclidea immagino sia ben più arduo. Noto anche che, affinché essa abbia senso, è necessario, come è stato fatto, ipotizzare che il triangolo ABC sia scaleno. D’altronde, tale ipotesi si giustifica anche con la persistente presenza del fattore $b-c$ riscontrata a denominatore nel corso della soluzione analitica

2) Se fisso $c>0$ e considero b variabile nell’intervallo reale $\left]c\,;\,+\infty\right[$, posso fare delle considerazioni al limite, di tipo metrico e non

i) per $b \to c^+$:



$\forall b > c > 0:\ \ r = \dfrac{b+c-\sqrt{b^2+c^2}}{2} > \dfrac{2c-\sqrt{2}\cdot c}{2}$, $\lim\limits_{b\to c^+} r = \lim\limits_{b\to c^+} \dfrac{b+c-\sqrt{b^2+c^2}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot c$. Quindi, il raggio dell’incerchio diminuisce sino a tendere all’estremo inferiore $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot c$

La retta RS, mantenendo la direzione (ossia il coefficiente angolare), tende alla retta $y = -x + \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot c$; in pratica, essa “scivola in basso” e parallelamente a se stessa, trascinata dalla contrazione dell’incerchio

$\lim\limits_{b\to c^+} -\dfrac{b}{c} = -1^-$, quindi la retta AM, aumentando d’inclinazione (aumenta, cioè, il suo coefficiente angolare che, però, resta negativo, il che significa che la retta si “abbassa”), tende alla retta $y = -x$ (bisettrice del II e IV quadrante), quindi a disporsi parallelamente alla retta RS

$\lim\limits_{b\to c^+} -\dfrac{c}{b} = -1^+$, quindi la retta BC, tende alla retta $y = -x + c$, quindi a disporsi, pur essa, parallelamente alla retta RS, ma diminuendo d’inclinazione (dunque, la retta si “alza”)

I tre punti M, N e U tendono all’infinito rimanendo nel II quadrante, allo stesso punto improprio della bisettrice $y = -x$

$$\lim_{b\to c^+} M = \left(\lim_{b\to c^+} -\frac{c^2}{b^2-c^2}\cdot b\ ;\ \lim_{b\to c^+} \frac{b^2}{b^2-c^2}\cdot c \right)$$

$$= \left(\overbrace{\lim_{b\to c^+} -\frac{c^2 b}{b+c}}^{-\frac{c^2}{2}}\ ;\ \overbrace{\lim_{b\to c^+} \frac{cb^2}{b+c}}^{\frac{c^2}{2}} \right)\cdot \underbrace{\lim_{b\to c^+} \frac{1}{b-c}}_{+\infty} = (-\infty\ ;\ +\infty)$$

$$\lim_{b\to c^+} N = \left(\lim_{b\to c^+} -\frac{\sqrt{b^2+c^2}-(b-c)}{2\cdot(b-c)}\cdot b\ ;\ \lim_{b\to c^+} \frac{\sqrt{b^2+c^2}+(b-c)}{2\cdot(b-c)}\cdot c \right)$$

$$= \left(\overbrace{\lim_{b\to c^+} -\frac{\sqrt{b^2+c^2}-(b-c)}{2}\cdot b}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot c^2}\ ;\ \overbrace{\lim_{b\to c^+} \frac{\sqrt{b^2+c^2}+(b-c)}{2}\cdot c}^{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot c^2} \right)\cdot \underbrace{\lim_{b\to c^+} \frac{1}{b-c}}_{+\infty} = (-\infty\ ;\ +\infty)$$

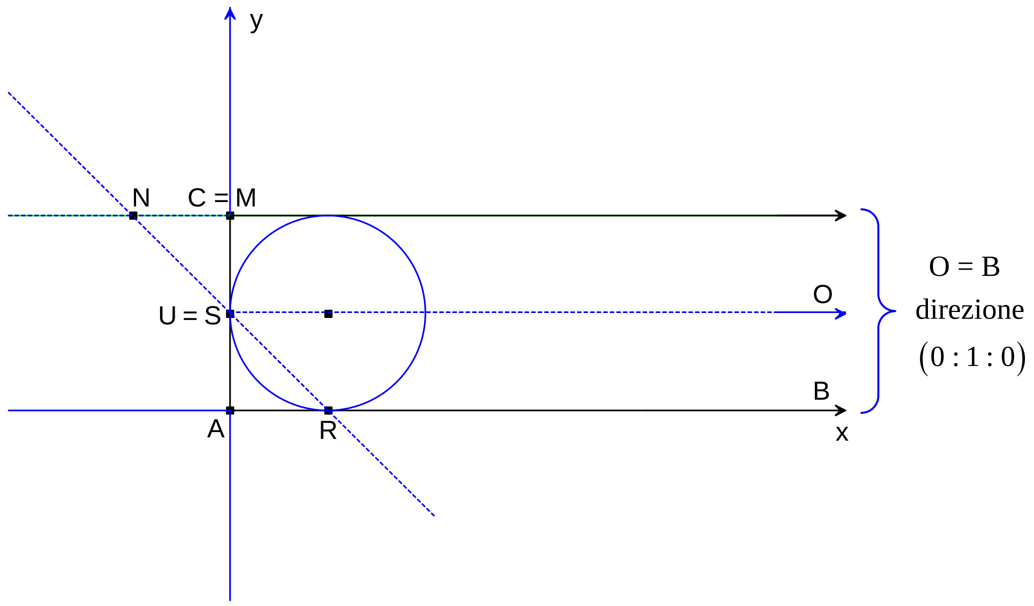
$$\lim_{b\to c^+} U = \left(\lim_{b\to c^+} -\frac{b+c-\sqrt{b^2+c^2}}{2\cdot(b-c)}\cdot c\ ;\ \lim_{b\to c^+} \frac{b+c-\sqrt{b^2+c^2}}{2\cdot(b-c)}\cdot b \right)$$

$$= \left(\overbrace{\lim_{b\to c^+} -\frac{b+c-\sqrt{b^2+c^2}}{2}\cdot c}^{-\frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot c^2} \; ; \; \overbrace{\lim_{b\to c^+} \frac{b+c-\sqrt{b^2+c^2}}{2}\cdot b}^{\frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot c^2} \right) \cdot \underbrace{\lim_{b\to c^+} \frac{1}{b-c}}_{+\infty} = \left(-\infty \; ; \; +\infty\right)$$

$$\lim_{b\to c^+} \overline{MN} = \lim_{b\to c^+} \overline{MU} = \lim_{b\to c^+} \frac{b+c-\sqrt{b^2+c^2}}{2}\cdot\frac{\left(b^2+c^2\right)}{\left(b+c\right)}\frac{1}{b-c}$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot c^2 \cdot \lim_{b\to c^+} \frac{1}{b-c} = +\infty$$

ii) per $b \to +\infty$:



$$\lim_{b\to+\infty} r = \lim_{b\to+\infty} \frac{b+c-\sqrt{b^2+c^2}}{2} = \lim_{b\to+\infty} \frac{\left(b+c\right)^2-\left(b^2+c^2\right)}{2\cdot\left(b+c+\sqrt{b^2+c^2}\right)} = \lim_{b\to+\infty} \frac{bc}{b+c+\sqrt{b^2+c^2}}$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{bc}{b\cdot\left(1+\frac{c}{b}+\sqrt{1+\left(\frac{c}{b}\right)^2}\right)} = \frac{c}{2}$$

Le rette RS, AM (che considero con equazione $x = -\frac{c}{b}\cdot y$, così da poter passare al limite per $b \to +\infty$) e BC tendono rispettivamente alle rette $y = -x + \frac{c}{2}$, $x = 0$ (asse y) e $y = c$ ($\parallel$ asse x);

$\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{x^2}{b}+\frac{y^2}{b}-x-\frac{c}{b}y=0\right)=\left(x=0\right)$, quindi il circocerchio tende all’asse y, cioè diventa infinito, di raggio infinito e centro all’infinito, nel punto *improprio* (o *direzione*) di *coordinate omogenee* $\left(0\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$, comune a tutte le rette parallele all’asse x, in particolare alle rette $y=\frac{c}{2}$ e $y=c$, nel senso che $\left(0\ ;\ 1\ ;\ 0\right)=\left(0\ ;\ \frac{c}{2}\ ;\ 0\right)=\left(0\ ;\ c\ ;\ 0\right)$

$$\lim_{b\to+\infty}M=\left(\lim_{b\to+\infty}-\frac{c^2}{b^2-c^2}\cdot b\ ;\ \lim_{b\to+\infty}\frac{b^2}{b^2-c^2}\cdot c\right)=\left(\lim_{b\to+\infty}-\frac{\left(\frac{c}{b}\right)\cdot c}{1-\left(\frac{c}{b}\right)^2}\ ;\ \lim_{b\to+\infty}\frac{c}{1-\left(\frac{c}{b}\right)^2}\right)=\left(0\ ;\ c\right)$$

$$\lim_{b\to+\infty}N=\left(\lim_{b\to+\infty}-\frac{\sqrt{b^2+c^2}-\left(b-c\right)}{2\cdot\left(b-c\right)}\cdot b\ ;\ \lim_{b\to+\infty}\frac{\sqrt{b^2+c^2}+\left(b-c\right)}{2\cdot\left(b-c\right)}\cdot c\right)$$

$$=\left(\lim_{b\to+\infty}-\frac{b^2+c^2-\left(b-c\right)^2}{2\cdot\left(b-c\right)\left(\sqrt{b^2+c^2}+b-c\right)}\cdot b\ ;\ \lim_{b\to+\infty}\frac{bc\cdot\left(\sqrt{1+\left(\frac{c}{b}\right)^2}+1-\frac{c}{b}\right)}{2b\cdot\left(1-\frac{c}{b}\right)}\right)$$

$$=\left(\lim_{b\to+\infty}-\frac{2b^2c}{2b\cdot\left(1-\frac{c}{b}\right)\cdot b\cdot\left(\sqrt{1+\left(\frac{c}{b}\right)^2}+1-\frac{c}{b}\right)}\ ;\ c\right)=\left(-\frac{c}{2}\ ;\ c\right)$$

$$\lim_{b\to+\infty}U=\left(\lim_{b\to+\infty}-\frac{b+c-\sqrt{b^2+c^2}}{2\cdot\left(b-c\right)}\cdot c\ ;\ \lim_{b\to+\infty}\frac{b+c-\sqrt{b^2+c^2}}{2\cdot\left(b-c\right)}\cdot b\right)$$

$$=\left(\lim_{b\to+\infty}-\frac{c}{b-c}\ ;\ \lim_{b\to+\infty}\frac{b}{b-c}\right)\cdot\lim_{b\to+\infty}\frac{b+c-\sqrt{b^2+c^2}}{2}=\left(0\ ;\ 1\right)\cdot\frac{c}{2}=\left(0\ ;\ \frac{c}{2}\right)$$

$$\lim_{b\to+\infty}\overline{MN}=\lim_{b\to+\infty}\overline{MU}=\lim_{b\to+\infty}\frac{\left(b+c-\sqrt{b^2+c^2}\right)\cdot\left(b^2+c^2\right)}{2\cdot\left(b^2-c^2\right)}$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{b+c-\sqrt{b^2+c^2}}{2}\cdot\lim_{b\to+\infty}\frac{b^2+c^2}{b^2-c^2}=\frac{c}{2}\cdot1=\frac{c}{2}$$

ES-034

Provare che, $\forall n \geq 0$ intero:

a) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ è divisibile per 133

b) $10^{n} \cdot (9n - 1) + 1$ è divisibile per 9

c) $3^{4n+1} + 10 \cdot 3^{2n} - 13$ è divisibile per 64

d) $2^{7n+3} + 3^{2n+1} \cdot 5^{4n+1}$ è divisibile per 23

e) $n \cdot (3n^4 + 13n^2 + 8)$ è divisibile per 24

[**a)** Problem 12 pag. 9, *Sequences, Combinations, Limits*, di S.I. Gelfand, M.L. Gerver, A.A. Kirillov, N.N. Kostantinov e A.G. Kushnirenko - Edizione 2002 pubblicata da Dover Publications, Inc., come ristampa dell’edizione integrale del 1969 pubblicata da M.I.T. Press. **b)** Problème 202 pag. 33, **c)** Problème 208 pag. 33, **d)** Problème 219 pag. 34, Chap. IV, *Exercices d’Arithmétique, Enoncés et Solutions*, par J. Fitz-Patrick - Edizione 1995 pubblicata da Édition Jacques Gabay come ristampa della Troisième Édition 1914, Librairie Scientifique A. Hermann et Fils. **e)** Ex 29 pag. 142, *Elementary Number Theory with Applications*, di Thomas Koshy - Harcourt/Academic Press, 2002]

a) I soluzione

Con le congruenze modulo 133 ($\equiv_{133}$)

$$\left.\begin{array}{l} 11^2 = 121 \equiv_{133} -12 \\ 12^2 = 144 \equiv_{133} 11 \end{array}\right\rangle \Rightarrow 11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^2 \cdot 11^n + 12 \cdot \left(12^2\right)^n \equiv_{133} -12 \cdot 11^n + 12 \cdot 11^n \equiv_{133} 0$$

a) II soluzione

Per Induzione

Passo iniziale: $11^{0+2} + 12^{2\cdot 0+1} = 121 + 12 = 133 = 133 \cdot 1$

Passo induttivo

$$\begin{aligned} 11^{(n+1)+2} + 12^{2\cdot(n+1)+1} &= 11^{n+3} + 12^{2n+3} \\ &= 11 \cdot 11^{n+2} + 12^2 \cdot 12^{2n+1} \\ &= 11 \cdot 11^{n+2} + (11 + 133) \cdot 12^{2n+1} \\ &= 11 \cdot 11^{n+2} + 11 \cdot 12^{2n+1} + 133 \cdot 12^{2n+1} \\ &= 11 \cdot \left(11^{n+2} + 12^{2n+1}\right) + 133 \cdot 12^{2n+1} \end{aligned}$$

$$=11\cdot\left(133\cdot h\right)+133\cdot 12^{2n+1} \qquad \begin{bmatrix}\text{ipotesi induttiva:}\\ 11^{n+2}+12^{2n+1}=133\cdot h \ , \exists h\in\mathbb{N}\end{bmatrix}$$

$$=133\cdot\left(11\cdot h+12^{2n+1}\right)$$

b) I soluzione

Con le congruenze modulo 9 $(\equiv_9)$

$$\left(10\equiv_9 1\right)\wedge\left(9\equiv_9 0\right) \Rightarrow 10^n\cdot\left(9n-1\right)+1\equiv_9 1^n\cdot\left(0\cdot n-1\right)+1\equiv_9 -1+1\equiv_9 0$$

b) II soluzione

Per $n=0$: $10^0\cdot\left(9\cdot 0-1\right)+1=1\cdot\left(-1\right)+1=0=9\cdot 0$

Per $n=1$: $10^1\cdot\left(9\cdot 1-1\right)+1=80+1=9\cdot 9$

Per $n\geq 2$:

$$10^n\cdot\left(9n-1\right)+1=9n\cdot 10^n-10^n+10-9$$

$$=9n\cdot 10^n-9-10^n+10$$

$$=9\cdot\left(n\cdot 10^n-1\right)-10\cdot\left(10^{n-1}-1\right)$$

$$=9\cdot\left(n\cdot 10^n-1\right)-10\cdot\left(10-1\right)\cdot\left(10^{n-2}+10^{n-2}+\ \ldots\ +10+1\right)$$

$$=9\cdot\left(n\cdot 10^n-1-10\cdot\left(10^{n-2}+10^{n-2}+\ \ldots\ +10+1\right)\right)$$

b) III soluzione

Per Induzione

Passo iniziale: $10^0\cdot\left(9\cdot 0-1\right)+1=1\cdot\left(-1\right)+1=0=9\cdot 0$

Passo induttivo

$$10^{n+1}\cdot\left(9\cdot\left(n+1\right)-1\right)+1=10\cdot 10^n\cdot\left(9n-1+9\right)+1$$

$$=10\cdot 10^n\cdot\left(9n-1\right)+10\cdot 10^n\cdot 9+10-9$$

$$=10\cdot 10^n\cdot\left(9n-1\right)+10+9\cdot\left(10\cdot 10^n-1\right)$$

$$=10\cdot\left(10^n\cdot\left(9n-1\right)+1\right)+9\cdot\left(10^{n+1}-1\right)$$

$$=10\cdot 9\cdot h \qquad +9\cdot\left(10^{n+1}-1\right) \qquad \begin{bmatrix}\text{ipotesi induttiva:}\\ 10^n\cdot\left(9n-1\right)+1=9\cdot h \ , \exists h\in\mathbb{N}\end{bmatrix}$$

$$= 9 \cdot \left(10 \cdot h + 10^{n+1} - 1\right)$$

c) I soluzione

$$3^{4n+1} + 10 \cdot 3^{2n} - 13 = 3 \cdot 9^{2n} - 3 \cdot 9^n + 13 \cdot 9^n - 13 = 3 \cdot 9^n \cdot \left(9^n - 1\right) + 13 \cdot \left(9^n - 1\right) = \left(9^n - 1\right) \cdot \left(3 \cdot 9^n + 13\right)$$

Basta ora provare che $8 \,|\, 9^n - 1$ e $8 \,|\, 3 \cdot 9^n + 13$. A tale scopo uso le congruenze modulo 8 $(\equiv_8)$

$$\left.\begin{array}{r} 9 \equiv_8 1 \;\Rightarrow\; 9^n \equiv_8 1^n \equiv_8 1 \\ 13 \equiv_8 5 \end{array}\right\rangle \Rightarrow \left\langle\begin{array}{l} 9^n - 1 \equiv_8 1 - 1 \equiv_8 0 \\ 3 \cdot 9^n + 13 \equiv_8 3 \cdot 1 + 5 \equiv_8 8 \equiv_8 0 \end{array}\right.$$

c) II soluzione

Per Induzione

Passo iniziale: $3^{4\cdot 0+1} + 10 \cdot 3^{2\cdot 0} - 13 = 3 + 10 - 13 = 0 = 64 \cdot 0$

Passo induttivo

$$\begin{aligned} 3^{4(n+1)+1} + 10 \cdot 3^{2(n+1)} - 13 &= 3^4 \cdot 3^{4n+1} + 10 \cdot 3^2 \cdot 3^{2n} - 13 \\ &= 9 \cdot 3^{4n+1} + 9 \cdot 10 \cdot 3^{2n} - 9 \cdot 13 + 8 \cdot 13 + 72 \cdot 3^{4n+1} \\ &= 9 \cdot \left(3^{4n+1} + 10 \cdot 3^{2n} - 13\right) + 8 \cdot \left(13 + 3^{4n+3}\right) \\ &= 9 \cdot 64 \cdot h + 8 \cdot \left(13 + 3^{4n+3}\right) \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{ipotesi induttiva:} \\ 3^{4n+1} + 10 \cdot 3^{2n} - 13 = 64 \cdot h \;\;, \exists h \in \mathbb{N} \end{array}\right]$$

Basta ora provare che $8 \,|\, 13 + 3^{4n+3}$

1° metodo

Scritto $13 + 3^{4n+3} = 13 + 27 \cdot 81^n$, uso le congruenze modulo 8 $(\equiv_8)$

$$\left(13 \equiv_8 5\right) \wedge \left(27 \equiv_8 3\right) \wedge \left(81 \equiv_8 1\right) \;\Rightarrow\; 13 + 27 \cdot 81^n \equiv_8 5 + 3 \cdot 1^n \equiv_8 8 \equiv_8 0$$

2° metodo

$$\begin{aligned} 13 + 3^{4n+3} &= 9 \cdot 3^{4n+1} + 13 \\ &= 8 \cdot 3^{4n+1} + 8 \quad + 3^{4n+1} + 5 \\ &= 8 \cdot \left(3^{4n+1} + 1\right) + 3 \cdot 3^{4n} + 5 \\ &= 8 \cdot \left(3^{4n+1} + 1\right) + 8 \cdot 3^{4n} - 5 \cdot 3^{4n} + 5 \end{aligned}$$

$$=8\cdot\left(3^{4n+1}+1\right)+8\cdot 3^{4n}-5\cdot\left(\left(3^{4}\right)^{n}-1\right)$$

$$=8\cdot\left(3^{4n+1}+1\right)+8\cdot 3^{4n}-5\cdot(81-1)\cdot\left(81^{n-1}+81^{n-2}+\ ...\ +81+1\right)$$

$$=8\cdot\left(3^{4n+1}+1+3^{4n}-50\cdot\left(81^{n-1}+81^{n-2}+\ ...\ +81+1\right)\right)$$

d) I soluzione

Uso le congruenze modulo 23 $(\equiv_{23})$

$$\left.\begin{array}{l} 25\equiv_{23}2 \Rightarrow 25^{n}\equiv_{23}2^{n} \\ 15\equiv_{23}-8 \Rightarrow 15^{2n+1}\equiv_{23}(-8)^{2n+1}\equiv_{23}-8^{2n+1}\end{array}\right\rangle \Rightarrow 25^{n}\cdot 15^{2n+1}\equiv_{23}-2^{n}\cdot 8^{2n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25^{n}\cdot 15^{2n+1}+2^{n}\cdot 8^{2n+1}\equiv_{23}0 \Rightarrow 5^{2n}\cdot(3\cdot 5)^{2n+1}+2^{n}\cdot\left(2^{3}\right)^{2n+1}\equiv_{23}0 \Rightarrow 3^{2n+1}\cdot 5^{4n+1}+2^{7n+3}\equiv_{23}0$$

d) II soluzione

Per Induzione

Passo iniziale: $2^{7\cdot 0+3}+3^{2\cdot 0+1}\cdot 5^{4\cdot 0+1}=8+3\cdot 5=23=23\cdot 1$

Passo induttivo

$$2^{7(n+1)+3}+3^{2(n+1)+1}\cdot 5^{4(n+1)+1}=\underbrace{2^{7}}_{128}\cdot 2^{7n+3}+\underbrace{3^{2}\cdot 5^{4}}_{5'625}\cdot 3^{2n+1}\cdot 5^{4n+1}$$

$$=128\cdot\left(2^{7n+3}+3^{2n+1}\cdot 5^{4n+1}\right)+\left(5'625-128\right)\cdot 3^{2n+1}\cdot 5^{4n+1}$$

$$=128\cdot 23\cdot h+5'497\cdot 3^{2n+1}\cdot 5^{4n+1} \qquad \left[\begin{array}{l}\text{ipotesi induttiva}:\\ 2^{7n+3}+3^{2n+1}\cdot 5^{4n+1}=23\cdot h\ ,\ \exists h\in\mathbb{N}\end{array}\right]$$

$$=128\cdot 23\cdot h+\overbrace{23\cdot 239}^{5'497}\cdot 3^{2n+1}\cdot 5^{4n+1}$$

$$=23\cdot\left(128\cdot h+239\cdot 3^{2n+1}\cdot 5^{4n+1}\right)$$

e) I soluzione

Per Induzione

Passo iniziale: $0\cdot\left(3\cdot 0^{4}+13\cdot 0^{2}+8\right)=0=0\cdot 24$

Passo induttivo

$$(n+1)\cdot\left(3(n+1)^{4}+13(n+1)^{2}+8\right)=$$

$$= (n+1)\cdot\left(3n^4+12n^3+18n^2+12n+3+13n^2+26n+13+8\right)$$

$$= n\cdot\left(3n^4+13n^2+8\right) +$$

$$n\cdot\left(12n^3+18n^2+12n+3+26n+13\right)+\left(3n^4+12n^3+18n^2+12n+3+13n^2+26n+13+8\right)$$

$$= \qquad 24\cdot h \qquad + \qquad \left[\begin{array}{l}\text{ipotesi induttiva :}\\ n\cdot\left(3n^4+13n^2+8\right)=24\cdot h\ \ ,\exists h\in\mathbb{N}\end{array}\right]$$

$$15n^4+30n^3+69n^2+54n+24$$

$$= 24\cdot h+3\cdot\left(5n^4+10n^3+23n^2+18n+8\right)$$

$$= 24\cdot h+3\cdot\left(8n^2+8n+8+5n^4+10n^3+15n^2+10n\right)$$

$$= 24\cdot h+24\cdot\left(n^2+n+1\right)+15n\cdot\left(n^3+2n^2+3n+2\right)$$

$$= 24\cdot h+24\cdot\left(n^2+n+1\right)+15n\cdot\left(n^3+n^2+n^2+n+2n+2\right)$$

$$= 24\cdot h+24\cdot\left(n^2+n+1\right)+15n\cdot\left(n+1\right)\cdot\left(n^2+n+2\right)$$

$$= 24\cdot h+24\cdot\left(n^2+n+1\right)+15n\cdot\left(n+1\right)\cdot\left(n\cdot\left(n+1\right)+2\right)$$

$$= 24\cdot h+24\cdot\left(n^2+n+1\right)+15\cdot 2k\cdot\left(2k+2\right) \qquad \left[\begin{array}{l}\text{posso porre } n\cdot\left(n+1\right)=2k\text{ , per qualche } k\geq 0\\ \text{intero, dato che } n\cdot\left(n+1\right)\text{ è pari } \forall n\geq 0\end{array}\right]$$

$$= 24\cdot h+24\cdot\left(n^2+n+1\right)+15\cdot 4\cdot k\cdot\left(k+1\right)$$

$$= 24\cdot h+24\cdot\left(n^2+n+1\right)+5\cdot 3\cdot 4\cdot 2u \qquad \left[\begin{array}{l}\text{posso porre } k\cdot\left(k+1\right)=2u\text{ , per qualche } u\geq 0\\ \text{intero, dato che } k\cdot\left(k+1\right)\text{ è pari } \forall k\geq 0\end{array}\right]$$

$$= 24\cdot h+24\cdot\left(n^2+n+1\right)+5\cdot 24u$$

$$= 24\cdot\left(h+n^2+n+1+5u\right)$$

e) II soluzione

Basta provare che $n\cdot\left(3n^4+13n^2+8\right)$ è divisibile per 3 e per 8, cosicché, essendo 3 e 8 coprimi, si ha che $n\cdot\left(3n^4+13n^2+8\right)$ è divisibile anche per $3\cdot 8=24$. A tale scopo uso le congruenze modulo 3 ($\equiv_3$) e modulo 8 ($\equiv_8$).

$n\equiv_3$	$n^2\equiv_3$	$n\cdot\left(3n^4+13n^2+8\right)\equiv_3 n\cdot\left(0\cdot n^4+1\cdot n^2+2\right)\equiv_3 n\cdot\left(n^2+2\right)\equiv_3$
0	0	$0\cdot\left(0+2\right)\equiv_3 0$
1	1	$1\cdot\left(1+2\right)\equiv_3 1\cdot 3\equiv_3 1\cdot 0\equiv_3 0$
2	1	$2\cdot\left(1+2\right)\equiv_3 1\cdot 3\equiv_3 1\cdot 0\equiv_3 0$

$n \equiv_8$	$n^2 \equiv_8$	$n^4 \equiv_8 \left(n^2\right)^2 \equiv_8$	$n \cdot \left(3n^4 + 13n^2 + 8\right) \equiv_8 n \cdot \left(3n^4 + 5n^2\right) \equiv_8$
0	0	0	$0 \cdot \left(3 \cdot 0 + 5 \cdot 0\right) \equiv_8 0$
1	1	1	$1 \cdot \left(3 \cdot 1 + 5 \cdot 1\right) \equiv_8 1 \cdot 8 \equiv_8 8 \equiv_8 0$
2	4	0	$2 \cdot \left(3 \cdot 0 + 5 \cdot 4\right) \equiv_8 2 \cdot 20 \equiv_8 2 \cdot 4 \equiv_8 8 \equiv_8 0$
3	1	1	$3 \cdot \left(3 \cdot 1 + 5 \cdot 1\right) \equiv_8 3 \cdot 8 \equiv_8 3 \cdot 0 \equiv_8 0$
4	0	0	$4 \cdot \left(3 \cdot 0 + 5 \cdot 0\right) \equiv_8 4 \cdot 0 \equiv_8 0$
5	1	1	$5 \cdot \left(3 \cdot 1 + 5 \cdot 1\right) \equiv_8 5 \cdot 8 \equiv_8 5 \cdot 0 \equiv_8 0$
6	4	0	$6 \cdot \left(3 \cdot 0 + 5 \cdot 4\right) \equiv_8 6 \cdot 20 \equiv_8 6 \cdot 4 \equiv_8 24 \equiv_8 0$
7	1	1	$7 \cdot \left(3 \cdot 1 + 5 \cdot 1\right) \equiv_8 6 \cdot 8 \equiv_8 6 \cdot 0 \equiv_8 0$

ES-108

a) Provare che n^2+23 è divisibile per 24 per infiniti interi $n \geq 1$

b) Trovare tutti i primi del tipo n^3-1, con $n>1$ intero

c) Trovare tutti gli interi $n \geq 1$ per i quali n^4+4^n è primo

d) Provare che se m ed n sono interi positivi e m è dispari, allora $\mathrm{MCD}\left(2^m-1\ ;\ 2^n+1\right)=1$

e) Per quali interi positivi m ed n, con $m>1$, accade che $2^m-1 \mid 2^n+1$?

f) Provare che se n è un intero non negativo tale che 2^n+1 è primo, allora n è una potenza di 2

g) Provare che se p e p^2+8 sono primi, allora anche p^3+4 è primo

[**a)** Example 43 Chap. 2 pag. 19, **b)** Example 50 Chap. 2 pag. 21, **c)** Example 52 Chap. 2 pag. 21, **d)** Example 98 Chap. 4 pag. 36, *Number Theory for Mathematical Contests*, 2007, Lecture Notes by David Santos, Mathematics Department of the Community College of Philadelphia, Pennsylvania, USA - http://faculty.ccp.edu/dept/math/ , http://faculty.ccp.edu/faculty/dsantos/lecture_notes.html. **e)** Problem 1, VMO (Vietnam Mathematical Olympiad) 1983. **f)** Lemma 16.12, Lezione 16 “Costruibilità con riga e compasso” delle dispense del corso di *Algebra 3*, versione 2006-07, della prof.ssa Margherita Barile, Dipartimento di Matematica dell’Università degli Studi di Bari - http://www.dm.uniba.it/~barile/Rete2/indice_dispense.htm. **g)** Ex 55 pag. 120, *Elementary Number Theory with Applications*, di Thomas Koshy - Harcourt/Academic Press, 2002]

a)

Scrivendo $n^2+23=n^2-1+24=(n+1)(n-1)+24$, basta prendere $n=24k\pm1$, $\forall k\geq 0$ intero

b)

$n^3-1=(n-1)\left(n^2+n+1\right)$ e $1\leq n-1<n^2+n+1$, $\forall n>1$ intero $\Rightarrow$ n^3-1 è primo solo se $n-1=1$, cioè $n=2$, cui corrisponde $n^3-1=2^3-1=7$ che è primo. Quindi, n^3-1 è primo solo per $n=2$.

c)

Per n pari n^4+4^n è pari $(\text{multiplo di } 16)$. Perciò, tutti gli eventuali interi $n\geq1$ per i quali n^4+4^n è primo devono essere dispari. Chiaramente n^4+4^n è primo per $n=1$. Osservato che:

$$\begin{aligned} n^4+4^n &= n^4+2^{2n} \\ &= n^4+2n^2 2^n+2^{2n}-2n^2 2^{2n} \\ &= \left(n^2+2^{2n}\right)^2-\left(2^{\frac{1}{2}}n2^n\right)^2 \end{aligned}$$

$$= \left(n^2 + 2^{2n}\right)^2 - \left(n 2^{\frac{n+1}{2}}\right)^2$$

$$= \left(n^2 + 2^{2n} + n 2^{\frac{n+1}{2}}\right)\left(n^2 + 2^{2n} - n 2^{\frac{n+1}{2}}\right)$$

ne deduco che, $\forall n \geq 3$ dispari, $\frac{n+1}{2} \geq 2$ è un intero pari, cosicché entrambi i fattori di sopra ottenuti sono interi, e visto che il primo di essi, $n^2 + 2^{2n} + n 2^{\frac{n+1}{2}}$, è certamente >1, se provo che anche l'altro è >1, allora ottengo che $n^4 + 4^n$ è composto, e quindi è primo solo per $n = 1$. A tale scopo basta osservare che:

$$\begin{aligned}
n^2 + 2^{2n} - n 2^{\frac{n+1}{2}} &= n^2 - 2n2^n + 2^{2n} + 2n2^n - n 2^{\frac{n+1}{2}} \\
&= \left(n - 2^n\right)^2 + n\left(2^{n+1} - 2^{\frac{n+1}{2}}\right) \\
&= \left(n - 2^n\right)^2 + n 2^{\frac{n+1}{2}}\left(2^2 - 1\right) \\
&\geq \quad 0 \quad + \quad 3n 2^{\frac{n+1}{2}} \\
&\geq 9 \cdot 2^2 \qquad\qquad [n \geq 3] \\
&> 1
\end{aligned}$$

d)

$2^m - 1$ e $2^n - 1$ sono entrambi interi positivi, essendo tali m ed n. Posto $d = \text{MCD}\left(2^m - 1\,;\, 2^n + 1\right)$, allora d è un intero ≥ 1 tale che $d \,|\, 2^m - 1$ e $d \,|\, 2^n - 1$, cioè $\exists h, k \geq 1$ interi tali che $dh = 2^m - 1$ e $dk = 2^n + 1$, da cui deduco che d deve essere un dispari ≥ 1, altrimenti si avrebbe l'assurdo che 1 è pari. Pertanto, tramite il Binomio di Newton, posso esprimere l'intero $2^{mn} = 2^{nm}$ $\left(\geq 2\right.$, essendo $\left. m, n \geq 1\right)$ nei seguenti due modi:

$2^{mn} = \left(2^m\right)^n$	$2^{nm} = \left(2^n\right)^m$
$= \left(dh + 1\right)^n$	$= \left(dk - 1\right)^m$
$= \sum_{i=0}^{n}\left(\binom{n}{i} \cdot (dh)^i \cdot 1^{n-i}\right)$	$= \sum_{i=0}^{m}\left(\binom{m}{i} \cdot (dk)^i \cdot (-1)^{m-i}\right)$
$= \binom{n}{0} \cdot (dh)^0 + \sum_{i=1}^{n}\left(\binom{n}{i} \cdot d^i \cdot h^i\right)$	$= \underbrace{\binom{m}{0} \cdot (dh)^0 \cdot (-1)^{m-0}}_{\parallel} + \sum_{i=1}^{m}\left(\binom{m}{i} \cdot d^i \cdot h^i \cdot (-1)^{m-i}\right)$
$= \quad 1 \quad + d \cdot \sum_{i=1}^{n}\left(\binom{n}{i} \cdot d^{i-1} \cdot h^i\right)$	$= \overbrace{\quad -1 \quad}^{(\text{essendo } m \text{ dispari})} + d \cdot \sum_{i=1}^{m}\left(\binom{m}{i} \cdot d^{i-1} \cdot h^i \cdot (-1)^{m-i}\right)$

Dunque, $u=\sum_{i=1}^{n}\left(\binom{n}{i}d^{i-1}h^{i}\right)$ e $v=\sum_{i=1}^{m}\left(\binom{m}{i}d^{i-1}h^{i}\cdot(-1)^{m-i}\right)$ sono entrambi interi (essendo tali i coefficienti binomiali), non nulli $\left[\text{altrimenti}\right.$, visto che m ed n sono entrambi interi positivi, si avrebbe l'assurdo $\left.\left(2^{mn}=1\right)\vee\left(2^{nm}=-1\right)\right]$ e tali che $1+du=-1+dv \Rightarrow d\cdot(v-u)=2$ e $v-u\neq 0$ $\left(\text{altrimenti si avrebbe l'assurdo } 2=0\right) \Rightarrow d\,|\,2 \Rightarrow d\leq 2 \Rightarrow d=1$, dato che d è dispari e ≥ 1

e)

Il caso $m=1$ è escluso perché banale: $2^{m}-1=1\,|\,2^{n}+1,\ \forall n\geq 0$ intero

- Caso $m=2$

Dopo aver scritto:

$$\begin{aligned}
2^{n}+1&=1+\left(-1+3\right)^{n}\\
&=1+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k}\,3^{n-k} && [\text{Binomio di Newton}]\\
&=1+(-1)^{n}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-1)^{k}\,3^{n-k} && [\text{estraggo l'ultimo termine della } \Sigma]\\
&=1+(-1)^{n}+\sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h-1}(-1)^{h-1}\,3^{n-h+1} && [\text{sostituzione d'indice: } h=k+1]\\
&=1+(-1)^{n}+3\cdot\sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h-1}(-1)^{h-1}\,3^{n-h} && [\text{raccolgo } 3 \text{ a fattore}]
\end{aligned}$$

e osservato che:

$$t\overset{\text{def}}{=}\sum_{h=1}^{n}\binom{n}{h-1}(-1)^{h-1}\,3^{n-h} \text{ è un intero, } \forall n>0 \text{ intero} \qquad [\text{i coefficienti binomiali sono numeri interi}]$$

posso, in conseguenza, affermare che:

$$2^{m}-1=2^{2}-1=3\,|\,2^{n}+1=1+(-1)^{n}+3t \iff n \text{ è dispari}$$

- Caso $m>2$

Essendo $1=2^{0}<2<4<8<\ \ldots\ <2^{m-1}<2^{m}-1$ $\left[\begin{array}{l}\text{l'ultima, } 2^{m-1}<2^{m}-1\text{, equivale a}\\ 2^{m-1}(2-1)=2^{m-1}>1\text{, vera } \forall m\geq 2 \text{ intero}\end{array}\right]$

posso pensare $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \ldots,\ 2^{m-1}$ come m residui modulo $2^{m}-1$ a due a due distinti, mentre, ovviamente, risulta $2^{m}-1\equiv 0$ modulo $2^{m}-1$, cioè $2^{m}\equiv 1$ modulo $2^{m}-1$

cosicché ogni potenza di 2 deve uguagliare, modulo $2^{m}-1$, uno dei suddetti residui; infatti:

$\forall n > 0$ intero $\exists(!) q, r \in \mathbb{Z}$: $n = mq + r$, con $0 \le r < m$ [Teorema della Divisione (Euclidea) in $\mathbb{Z}$]

quindi $2^n = 2^{mq+r} = \left(2^m\right)^q 2^r \equiv (1)^q 2^r \equiv 2^r$ modulo $2^m - 1$, per un unico $r \in \{0, 1, \dots, m\}$.

Dunque, $\forall m, n > 0$ interi, con $m > 2$, si ha:

$2^n \equiv 1 \vee 2 \vee 4 \vee 8 \vee \dots \vee 2^{m-1}$ modulo $2^m - 1$

da cui, sommando 1, ricavo $2^n + 1 \equiv 2 \vee 3 \vee 5 \vee 9 \vee \dots \vee \left(2^{m-1} + 1\right)$ modulo $2^m - 1$

e siccome $2 < 3 < 5 < 9 < \dots < 2^{m-1} + 1 < 2^m - 1$

[l'ultima, $2^{m-1} + 1 < 2^m - 1$, equivale a $2^{m-1}(2-1) = 2^{m-1} > 2$, vera $\forall m > 2$ intero, ecco il punto in cui sfrutto l'assunto $m > 2$]

ne consegue che $2 \wedge 3 \wedge 5 \wedge 9 \wedge \dots \wedge \left(2^{m-1} + 1\right) \not\equiv 0$ modulo $2^m - 1$

il che equivale ad affermare l’impossibilità dell’equazione congruenziale:

$2^n + 1 \equiv 0$ modulo $2^m - 1$, in altre parole: $\nexists m, n > 0$ interi, con $m > 2$, tali che $2^m - 1 \mid 2^n + 1$

In conclusione, per m ed n interi positivi, con $m > 1$, accade che:

$2^m - 1 \mid 2^n + 1 \Leftrightarrow m = 2$ e $n \ge 1$ dispari qualsiasi

f)

Supponiamo, per assurdo, che n non sia una potenza di 2. Allora esiste una decomposizione $n = ab$, con a e b interi tali che $(0 < a, b < n) \wedge \left((a \text{ dispari}) \vee (b \text{ dispari})\right)$. Entrambi $2^b + 1$ e $2^n + 1$ sono ovviamente interi e, inoltre, sono tali che $1 < 2^b + 1 < 2^n + 1$; infatti:

$0 < b < n \Rightarrow 2^0 < 2^b < 2^n \Rightarrow 2 < 2^b + 1 < 2^n + 1 \Rightarrow 1 < 2^b + 1 < 2^n + 1$

Supponendo, ora, che a sia dispari (altrimenti lo sarebbe b e quindi ragionerei con quest’ultimo), posso allora fattorizzare l’intero $2^n + 1 = \left(2^b\right)^a + 1$ nell’usuale modo:

$$\left(2^b + 1\right)\left(\left(2^b\right)^{a-1} - \left(2^b\right)^{a-2} + \left(2^b\right)^{a-3} - \dots + (-1)^{a-1}\right) = \left(2^b + 1\right) \cdot \sum_{k=0}^{a-1} (-1)^k \left(2^b\right)^{a-1-k}$$

ove il fattore $\sum_{k=0}^{a-1} (-1)^k \left(2^b\right)^{a-1-k}$ è chiaramente intero, cosicché ottengo che

$$\frac{2^n + 1}{2^b + 1} = \frac{\left(2^b\right)^a + 1}{2^b + 1} = \frac{\cancel{\left(2^b + 1\right)} \cdot \sum_{k=0}^{a-1} (-1)^k \left(2^b\right)^k}{\cancel{2^b + 1}} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2^b + 1 \text{ è un divisore intero } > 1 \text{ di } 2^n + 1$$

in contraddizione con l’ipotesi che $2^n + 1$ è primo

g)

$$\left.\begin{array}{r} p^2+8 \text{ primo } \Rightarrow p^2+8 \text{ dispari } \Rightarrow p \text{ dispari} \\ p \text{ primo} \end{array}\right\rangle \Rightarrow p \geq 3 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} \exists(!) q, r \in \mathbb{Z}: \ p = 3q + r \\ \text{con } q > 0 \text{ e } 0 \leq r < 3 \end{array}\right.$$

Dunque $(r=0) \vee (r=1) \vee (r=2)$.

$$\left.\begin{array}{l} r = 1 \Rightarrow p = 3q+1 \Rightarrow p^2+8 = 9q^2+6q+9 = 3 \cdot \left(\overbrace{3q^2+2q+3}^{\substack{\text{intero } >3 \\ \text{essendo } q \text{ intero } >0}} \right) \\ \\ r = 2 \Rightarrow p = 3q+2 \Rightarrow p^2+8 = 9q^2+12q+12 = 3 \cdot \left(\underbrace{3q^2+4q+4}_{\substack{\text{intero } >4 \\ \text{essendo } q \text{ intero } >0}} \right) \end{array}\right\rangle \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} p^2+8 \text{ è composto}, \\ \text{contro l'ipotesi che} \\ p^2+8 \text{ è primo} \end{array}\right.$$

Pertanto, risulta $r = 0$, ossia $p = 3q$, il che comporta, essendo p primo, che $q = 1$, e quindi $p = 3$, in corrispondenza del quale $p^3 + 4$ diventa 31 che, in effetti, è primo.

ES-033

a) Dati un numero primo p e due numeri naturali a e b tali che $a+b=p$, dimostrare che a e b sono coprimi, ossia $\mathrm{MCD}(a\,;b)=1$

b) Dimostrare che se a e b sono due numeri naturali coprimi, allora, per ogni intero n, esiste un'unica coppia di interi $(u\,;v)$ tale che $n=au+bv$, con $0\le u<b$

c) Dimostrare che se $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ sono due numeri razionali ridotti, vale a dire $a, b, c, d\in\mathbb{Z}$ con a e b entrambi $\neq 0$ e $\mathrm{MCD}(a\,;b)=\mathrm{MCD}(c\,;d)=1$, e se $\mathrm{MCD}(b\,;d)=1$, allora anche la loro somma $\frac{ad+cb}{bd}$ è ridotta

[**a)** Esercizio dell'esame del 07-03-2007 di Didattica della Matematica, prof. Paolo Maroscia - S.S.I.S. Lazio, Indirizzo F.I.M., VIII Ciclo, A.A. 2006-07. **b)** Ex. g.5 Feuille g, Cours UE Maths LG308, 1er semestre 2006-2007, du prof. Romagny Matthieu, Équipe de Théorie des Nombres, Université Paris 6 - http://www.institut.math.jussieu.fr/~romagny/LG308/. **c)** Problem 3 Assignment 7, Course Mathematics 208a-2001 “Introduction to Mathematical Problems”, by Mike Dawes, Associate Professor, Department of Mathematics of the University of Western Ontario, London, Ontario, Canada - http://www.math.uwo.ca/~mdawes/courses/208/01/]

a) I soluzione

Se, per assurdo, fosse $\mathrm{MCD}(a\,;b)=d>1$, allora $\exists u, v\in\mathbb{N}$ entrambi ≥ 1, e dunque $u+v\ge 2$, tali che $a=ud$, $b=vd$. Pertanto, $a+b=ud+vd=(u+v)d=p$, cioè $(u+v)d=p$, cosicché

1° metodo

p risulterebbe composto (di due fattori entrambi >1), in contraddizione con l'ipotesi che è primo

2° metodo

d dividerebbe p, da cui, essendo p primo, scaturirebbero le due possibilità:

1) $d=1$, in contraddizione con l'ipotesi $d>1$

2) $d=p$, da cui $(u+v)p=p \Rightarrow u+v=1$, in contraddizione con $u+v\ge 2$

a) II soluzione

Osservato che $\mathrm{MCD}(a\,;p)=1$ [per contrapposizione, considerando che p è primo e $0<a<p$]

basta usare la seguente proprietà generale del MCD:

$\forall a, b\in\mathbb{Z}^2-\{(0\,;0)\}:\ \ \mathrm{MCD}(a\,;b)=\mathrm{MCD}(a\,;a+b)$

b)

Esistenza

Siccome a e b sono coprimi, allora $\exists u_0, v_0 \in \mathbb{Z}: 1 = au_0 + bv_0$, da cui, moltiplicando per n, ottengo $n = anu_0 + bnv_0$. Per il Teorema della Divisione (Euclidea) in $\mathbb{Z}$, esiste un'unica coppia di interi $(q\,;r)$ tale che $nu_0 = bq + r$, con $0 \le r < b$ (divisione di nu_0 per b), cosicché posso scrivere $n = a(bq + r) + bnv_0 = ar + b(aq + nv_0)$, il che significa che la coppia $(r\,;aq + nv_0)$ è una coppia di interi $(u\,;v)$ tale che $n = au + bv$, con $0 \le u < b$

Unicità

Siano $(u\,;v)$ e $(u'\,;v')$ due coppie di interi tali che $n = au + bv = au' + bv'$, con $0 \le u, u' < b$, e quindi $a(u - u') = b(v' - v)$ e $|u - u'| < b$. Se, per assurdo, $u \ne u'$, cioè $|u - u'| > 0$, allora

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ e } b \text{ coprimi} \\ a(u-u') = b(v'-v) \end{array}\right\rangle \overset{\substack{\text{Lemma di}\\ \text{Euclide}}}{\Rightarrow} b \mid u - u' \Rightarrow b \mid |u - u'| \Rightarrow b < |u - u'| \text{, contraddicendo } |u - u'| < b$$

Essendo, dunque, $u = u'$, la $a(u - u') = b(v' - v)$ diventa $0 = b(v' - v)$, da cui ricavo, essendo $b \ne 0$ (intendendo come naturali gli interi positivi) e $\mathbb{Z}$ integro, che $v' - v = 0 \Rightarrow v' = v$

c)

Ragiono per assurdo

Se $\mathrm{MCD}(ad + cb\,;bd) \ne 1$, allora esiste un intero positivo primo p tale che divide entrambi $ad + cb$ e bd. Ma se $p \mid bd$, allora, dato che p è primo, risulta $(p \mid b) \vee (p \mid d)$.

Il caso $p \mid b$ implica, banalmente, che $p \mid cb$, e siccome $p \mid ad + cb$, allora, per la linearità della relazione di divisibilità, segue che $p \mid ad$, e quindi, essendo p primo, si ha $(p \mid a) \vee (p \mid d)$. Se $p \mid a$, allora, essendo anche $p \mid b$, si ha che a e b non sono coprimi, contrariamente all'ipotesi. Se $p \mid d$, allora, essendo anche $p \mid b$, si ha che d e b non sono coprimi, contrariamente all'ipotesi.

Il caso $p \mid d$ è simile. In particolare, $p \mid d \Rightarrow p \mid ad$, e siccome $p \mid ad + cb$, allora, per la linearità della relazione di divisibilità, segue che $p \mid cb$, e quindi, essendo p primo, si ha $(p \mid c) \vee (p \mid b)$. Se $p \mid c$, allora, essendo anche $p \mid d$, si ha che c e d non sono coprimi, contrariamente all'ipotesi. Se $p \mid b$, allora, essendo anche $p \mid d$, si ha che b e d non sono coprimi, contrariamente all'ipotesi.

PSd+

1) Nei primi due esercizi l'insieme dei *numeri naturali* $(\mathbb{N})$ è inteso come l'insieme degli *interi positivi* $(\mathbb{Z}^+)$. Va precisato, tuttavia, che la maggior parte degli autori include anche lo zero in $\mathbb{N}$. In ogni caso, l'ipotesi che a e b siano *entrambi non nulli* (interi > 0) è la più opportuna. Difatti:

· per l’esercizio a):

$(a \neq 0) \wedge (b = 0) \Rightarrow \mathrm{MCD}(a\,;\,0) = a$, cosicché l’ipotesi $\mathrm{MCD}(a\,;\,b) = 1$ è vera se e solo se $a = 1$, caso banale;

$(a = 0) \wedge (b \neq 0) \Rightarrow \mathrm{MCD}(0\,;\,b) = b$, cosicché l’ipotesi $\mathrm{MCD}(a\,;\,b) = 1$ è vera se e solo se $b = 1$, caso banale;

$a = b = 0 \Rightarrow \mathrm{MCD}(0\,;\,0)$ non è definito, dal momento che *ogni* intero divide 0 e quindi non esiste il “più grande” divisore comune di 0 e 0;

· per l’esercizio b):

deve essere $b \neq 0$, visto che si richiede $0 \leq u < b$;

$(a = 0) \wedge (b \neq 0) \Rightarrow \mathrm{MCD}(0\,;\,b) = b$, cosicché l’ipotesi $\mathrm{MCD}(a\,;\,b) = 1$ è vera se e solo se $b = 1$; per cui, per ogni intero n, si può avere $n = 0u + 1v = v$, con $0 \leq u < 1$, se e solo se $(u\,;\,v) = (0\,;\,n)$, caso banale.

2) Il semplice risultato secondo cui ogni intero positivo a è coprimo con ogni intero primo $p > a$, solitamente dimostrato per contrapposizione, può essere visto come caso particolare dell’esercizio a), con $a = n$ e $b = p - n$.

3) Provo il seguente teorema

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{Z}^2 - \{(0\,;\,0)\}:\ \mathrm{MCD}(a\,;\,b) = \mathrm{MCD}(a\,;\,a + b)}$$

<u>Dim.</u>

Posto $\mathrm{MCD}(a\,;\,b) = d > 0$ e $\mathrm{MCD}(a\,;\,a + b) = d_1 > 0$, si ha:

$$\left.\begin{array}{l} d_1 \mid a\,,\ a+b \ \overset{\text{proprietà di linearità della relazione di divisibilità}}{\Rightarrow}\ d_1 \mid a\,,\ a+b-a = b \ \Rightarrow\ d_1 \mid d \ \Rightarrow\ d_1 \leq d \\ d \mid a\,,\ b \ \Rightarrow\ d \mid a\,,\ a+b \ \Rightarrow\ d \mid d_1 \ \Rightarrow\ d \leq d_1 \end{array}\right\rangle \Rightarrow d_1 = d$$

■

ES-053

Dimostrare che per ogni coppia di numeri reali a , b non entrambi nulli si ha: $a^2+b^2+ab>0$

(Esercizio del 18-01-2007, corso di Didattica della Matematica, prof. Paolo Maroscia - S.S.I.S. Lazio, Indirizzo F.I.M., VIII Ciclo, A.A. 2006-07)

I soluzione

L’ipotesi $(a\neq 0)\vee(b\neq 0)$ equivale ad avere $a^2+b^2>0$; pertanto

$$a^2+b^2+ab=\frac{2a^2+2b^2+2ab}{2}=\frac{(a+b)^2+a^2+b^2}{2}\geq\frac{0+a^2+b^2}{2}=\frac{a^2+b^2}{2}>0$$

oppure, posso considerare la seguente catena di coimplicazioni

$$(a+b)^2\geq 0\ \Leftrightarrow\ ab\geq-\frac{a^2+b^2}{2}\ \Leftrightarrow\ a^2+b^2+ab\geq a^2+b^2-\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{a^2+b^2}{2}>0$$

II soluzione

Trasformo a^2+b^2+ab nella somma di due quadrati utilizzando la tecnica del “completamento del quadrato” in due modi possibili

I) per la parte a^2+ab: $a^2+ab=a^2+2\cdot a\cdot\frac{b}{2}+\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{4}=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}$, da cui

$$a^2+b^2+ab=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}\cdot\frac{b}{2}\right)^2\geq 0$$

II) per la parte b^2+ab: $b^2+ab=b^2+2\cdot a\cdot\frac{b}{2}+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}=\left(b+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$, da cui

$$a^2+b^2+ab=a^2+\left(b+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}=\left(b+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{3a^2}{4}=\left(b+\frac{a}{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}\cdot\frac{a}{2}\right)^2\geq 0$$

Pertanto, in entrambi i modi risulta $a^2+b^2+ab\geq 0$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$, valendo l’uguale se e solo se a e b sono entrambi nulli, e dunque $a^2+b^2+ab>0$, $\forall a,b\in\mathbb{R}^2-\{(0\ ;0)\}$

III soluzione

Distinguo due casi

1) $a=b\ \Rightarrow\ a^2+b^2+ab=3a^2\left(=3b^2\right)>0$

2) $a \neq b \Rightarrow a-b$ e a^3-b^3 sono concordi, cosicché $a^2+b^2+ab=\dfrac{a^3-b^3}{a-b}>0$

Per provare che $a-b$ e a^3-b^3 sono concordi posso procedere in due modi

i) sfrutto il fatto che la funzione $y=x^3$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$ $\left[\begin{array}{l} y'=3x^2 \\ \quad >0 \ \text{ per } \ x\in\mathbb{R}-\{0\} \\ \quad =0 \ \text{ per } \ x=0 \end{array}\right]$

ii) ipotizzo $a-b>0$, cioè $a>b$ [altrimenti scambio i ruoli di a, b]

quindi $\exists h\in\mathbb{R}$: $(h>0)\wedge(a=b+h)$, cosicché

$$
\begin{aligned}
a^3 &= (b+h)^3 = b^3+3b^2h+3bh^2+h^3 \\
&= b^3+3h\cdot\left(b^2+bh+\frac{h^2}{3}\right) \\
&= b^3+3h\cdot\left(b^2+2\cdot b\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}+\frac{h^2}{3}-\frac{h^2}{4}\right) && \left[\text{completamento del quadrato per } b^2+bh\right] \\
&= b^3+3h\cdot\left(\left(b+\frac{h}{2}\right)^2+\frac{h^2}{12}\right) \geq b^3+3h\cdot\left(0+\frac{h^2}{12}\right)=b^3+\frac{h^3}{4}>b^3 && \left[\text{essendo } h>0\right]
\end{aligned}
$$

IV soluzione

Distinguo due casi

1) $a=-b$, per cui a e b sono entrambi non nulli [per l’ipotesi $(a\neq 0)\vee(b\neq 0)$], quindi

$$a^2+b^2+ab=a^2+(-a)^2+a(-a)=a^2>0$$

2) $a\neq -b$, per cui $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2>0$ [per l’ipotesi $(a\neq 0)\vee(b\neq 0)$], cosicché la tesi segue subito in virtù della disuguaglianza $a^2+ab+b^2\geq 3\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$, a sua volta equivalente alla $(a-b)^2\geq 0$; infatti

$$(a-b)^2\geq 0 \iff a^2+4ab+b^2\geq 6ab \iff 4a^2+4ab+4b^2\geq 3a^2+6ab+3b^2 \iff a^2+ab+b^2\geq 3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

V soluzione

Distinguo i seguenti casi

1) $(a=0)\wedge(b\neq 0) \Rightarrow a^2+b^2+ab=b^2>0$

2) $(a \neq 0) \wedge (b = 0) \Rightarrow a^2 + b^2 + ab = a^2 > 0$

3) $(a \neq 0) \wedge (b \neq 0)$, uso la disuguaglianza tra medie $\dfrac{A+B}{2} \geq \sqrt{AB}$, $\forall A, B \in \mathbb{R}: A, B \geq 0$

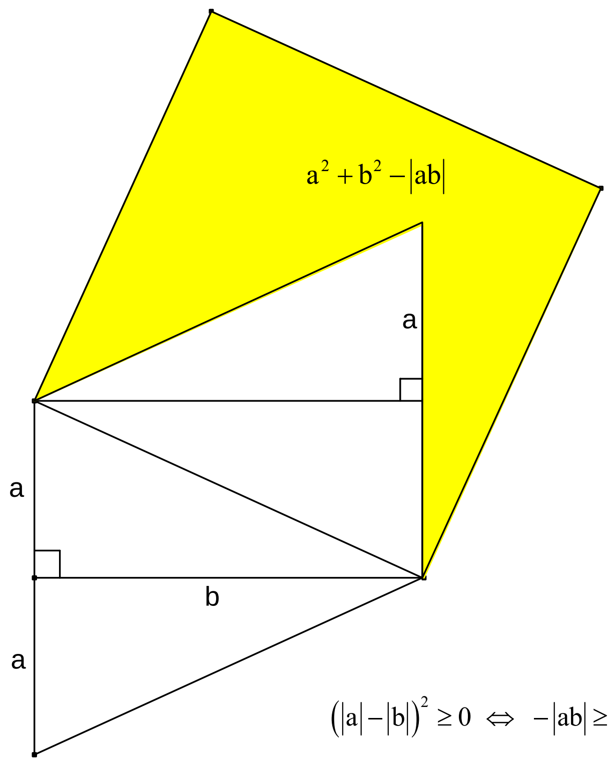
3.1) $(a > 0) \wedge (b > 0) \Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab > 0 \Rightarrow (a+b)^2 - ab = a^2 + b^2 + ab \geq 3ab > 0$

3.2) $a < 0 < b \Rightarrow ((-a)+b)^2 \geq 4(-a)b > 0 \Rightarrow (-a+b)^2 + 3ab = a^2 + b^2 + ab \geq -ab > 0$

3.3) $b < 0 < a \Rightarrow (a+(-b))^2 \geq 4a(-b) > 0 \Rightarrow (a-b)^2 + 3ab = a^2 + b^2 + ab \geq -ab > 0$

3.4) $(a < 0) \wedge (b < 0) \Rightarrow ((-a)+(-b))^2 \geq 4(-a)(-b) > 0$ e proseguo come in 3.1)

PWW



$$(|a|-|b|)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -|ab| \geq -\frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 - |ab| \geq \frac{a^2+b^2}{2}$$

PSd+

1) Per $(a \neq 0) \vee (b \neq 0)$, si ha anche:

i) $$a^2 + b^2 - ab = \frac{(a-b)^2 + a^2 + b^2}{2} \geq \frac{a^2+b^2}{2} > 0$$

ii) $$a^2 + b^2 - |ab| = \frac{(|a|-|b|)^2 + a^2 + b^2}{2} \geq \frac{a^2+b^2}{2} > 0$$ $\left[|x|^2 = x^2 , \forall x \in \mathbb{R}\right]$

2) Il Completamento del quadrato

2.1) In algebra s’intende, convenzionalmente, la trasformazione del binomio quadratico in una indeterminata ax^2+bx, con $a, b \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$, nella forma $a\cdot(x+P)^2+Q$, ove P e Q sono funzioni razionali dei soli coefficienti a, b. In tal modo, si ha $ax^2+bx-Q=a\cdot(x+P)^2$ e, allora, si dice anche che $-Q$ è la parte (aggiuntiva) che *completa il quadrato per* ax^2+bx. P e Q possono essere numeri, reali o complessi non reali, oppure espressioni matematiche in altre indeterminate $\neq x$.

> Il completamento del quadrato per ax^2+bx, $\forall a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$, esiste ed è unico

Dim.

Esistenza

$$ax^2+bx=a\cdot\left(x^2+\frac{b}{a}\cdot x\right)=a\cdot\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x\right)$$

$$=a\cdot\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)$$

$$=a\cdot\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

$$=a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}$$

pertanto, $P=\frac{b}{2a}$ e $Q=-\frac{b^2}{4a}$, e quindi $-Q=\frac{b^2}{4a}$ è la parte che completa il quadrato per ax^2+bx

Unicità

Siano P', Q' funzioni razionali soltanto di a, b, c, tali che $a\cdot(x+P')^2+Q'=a\cdot(x+P)^2+Q$, allora

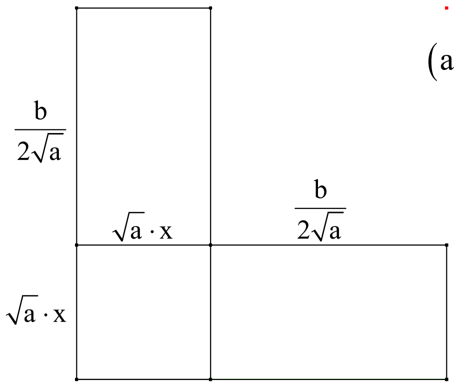
$$ax^2+2aP'\cdot x+aP'^2+Q'=ax^2+2aP\cdot x+aP^2+Q$$

da cui, applicando il Principio di Identità dei Polinomi, ricavo

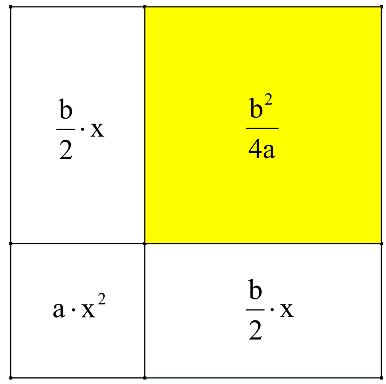
$$\begin{cases} 2aP'=2aP \\ aP'^2+Q'=aP^2+Q \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P'=P \\ Q'=Q \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Storicamente nasce come metodo geometrico per risolvere particolari equazioni di 2° grado presso i matematici arabi, in particolare il grande Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi (780-850)[1]

[1] Cfr. http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Al-Khwarizmi.html



$(a>0)$



2.2) Esempi di utilizzo del completamento del quadrato

2.2.1) $F(x)=ax^2+bx+c$, $\forall a, b, c\in\mathbb{C}$, con $a\neq 0$

$$F(x)=a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} \qquad \left[\Delta\overset{\text{def}}{=}b^2-4ac\right]$$

$$=a\cdot\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

$$=a\cdot\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right)$$

$$=a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cdot\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$=a\cdot\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cdot\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

da cui ricavo: la formula che esprime le radici dell'equazione generale di $2°$ grado, il criterio per decidere sulla loro "natura" e la "discussione" del segno del trinomio di $2°$ grado.

Inoltre, con il completamento del quadrato posso subito dire che il valore $-\frac{\Delta}{4a}$, corrispondente ad $x=-\frac{b}{2a}$, rappresenta il minimo, se $a>0$, oppure il massimo, se $a<0$, della $F(x)$

2.2.2) $F(x\,;y)=ax^2+bxy+cy^2$, $\forall a, b, c\in\mathbb{C}$, con $ab\neq 0$

$$F(x\,;y)=ay^2\cdot\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{b}{a}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{c}{a}\right) \qquad [\text{per il momento } y\neq 0]$$

$$=ay^2\cdot\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

$$= ay^2 \cdot \left(\left(\frac{x}{y} + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right)$$

$$= ay^2 \cdot \left(\frac{x}{y} + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \cdot \left(\frac{x}{y} + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

$$= a \cdot \left(x - \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \cdot y \right) \cdot \left(x - \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \cdot y \right)$$ [ora può essere tolta la restrizione $y \neq 0$]

Scambiando i ruoli di a e b, e di x e y, procedo analogamente nell’ipotesi $bc \neq 0$

2.2.3) $F(x\,;\,y) = ax^2 + by^2 + cx + dy + e$, $\forall a, b, c, d, e \in \mathbb{C}$, con $ab \neq 0$

completo il quadrato due volte, una volta per i termini con la x e un’altra volta per quelli con la y

$$F(x\,;\,y) = a \cdot \left(x + \frac{c}{2a} \right)^2 - \frac{c^2}{4a} + b \cdot \left(y + \frac{d}{2b} \right)^2 - \frac{d^2}{4b} + e$$

$$= a \cdot \left(x + \frac{c}{2a} \right)^2 + b \cdot \left(y + \frac{d}{2b} \right)^2 - \left(\frac{c^2}{4a} + \frac{d^2}{4b} - e \right)$$

Il valore $-\left(\frac{c^2}{4a} + \frac{d^2}{4b} - e \right)$, corrispondente alla coppia $\left(x = -\frac{c}{2a}\ ;\ y = -\frac{d}{2b} \right)$, rappresenta il minimo, se $a, b > 0$, oppure il massimo, se $a, b < 0$, della $F(x\,;\,y)$

2.2.4) $F(x\,;\,y\,;\,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + ey + fz + g$, $\forall a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{C}$, con $abc \neq 0$

completo il quadrato tre volte, rispettivamente per i termini con la x, con la y e con la z

$$F(x\,;\,y\,;\,z) = a \cdot \left(x + \frac{d}{2a} \right)^2 - \frac{d^2}{4a} + b \cdot \left(y + \frac{e}{2b} \right)^2 - \frac{e^2}{4b} + c \cdot \left(z + \frac{f}{2c} \right)^2 - \frac{f^2}{4c} + g$$

$$= a \cdot \left(x + \frac{d}{2a} \right)^2 + b \cdot \left(y + \frac{e}{2b} \right)^2 + c \cdot \left(z + \frac{f}{2c} \right)^2 - \left(\frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4b} + \frac{f^2}{4c} - g \right)$$

Il valore $-\left(\frac{d^2}{4a} + \frac{e^2}{4b} + \frac{f^2}{4c} - g \right)$, corrispondente alla terna $\left(x = -\frac{d}{2a}\ ;\ y = -\frac{e}{2b}\ ;\ z = -\frac{f}{2c} \right)$, rappresenta il minimo, se $a, b, c > 0$, oppure il massimo, se $a, b, c < 0$, della $F(x\,;\,y\,;\,z)$

2.2.5) $x + \frac{1}{x} = x - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + 2$ [http://it.wikipedia.org/wiki/Completamento_del_quadrato]

$$= \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 + 2$$

2.2.6) $F(x) = ax^{2^n} + b$, $\forall a, b \in \mathbb{C}$, con $a, b > 0$, e $\forall n \in \mathbb{Z}$, con $n \geq 2$

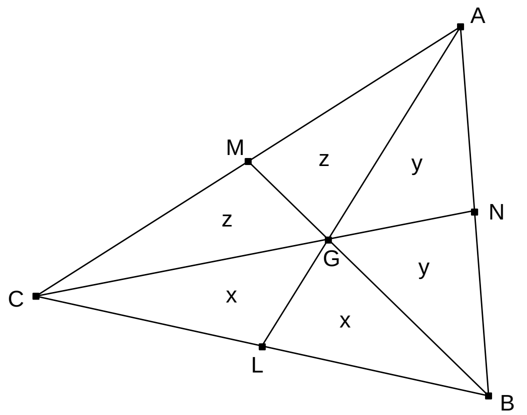
$$\begin{aligned}F(x) &= ax^{2^n} + 2\sqrt{ab}\cdot x^{2^{n-1}} + b - 2\sqrt{ab}\cdot x^{2^{n-1}}\\ &= \left(\sqrt{a}\cdot x^{2^{n-1}} + \sqrt{b}\right)^2 - 2\sqrt{ab}\cdot x^{2^{n-1}}\\ &= \left(\sqrt{a}\cdot x^{2^{n-1}} + \sqrt{b}\right)^2 - \left(\sqrt[4]{4ab}\cdot x^{2^{n-2}}\right)^2\\ &= \left(\sqrt{a}\cdot x^{2^{n-1}} + \sqrt[4]{4ab}\cdot x^{2^{n-2}} + \sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}\cdot x^{2^{n-1}} - \sqrt[4]{4ab}\cdot x^{2^{n-2}} + \sqrt{b}\right)\end{aligned}$$

2.2.7) $a^4 + 4b^4 = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 = \left(a^2 + 2b^2\right)^2 - \left(2ab\right)^2 = \left(a^2 + 2ab + 2b^2\right)\cdot\left(a^2 - 2ab + 2b^2\right)$

ES-056

Verificare che il baricentro di un triangolo “divide” il triangolo stesso in sei triangoli tra loro equivalenti, cioè aventi la stessa area

(Esercizio del 18-01-2007, corso di Didattica della Matematica, prof. Paolo Maroscia - S.S.I.S. Lazio, Indirizzo F.I.M., VIII Ciclo, A.A. 2006-07)



Indicato con G il baricentro, le due aree indicate con x sono uguali perché riferite a triangoli, CLG e BLG, con stessa altezza e relative basi, rispettivamente CL e BL, congruenti.

Analogamente per le aree indicate con y e z.

I due triangoli CLA e BLA sono equivalenti perché hanno stessa altezza e relative basi, rispettivamente CL e BL, congruenti.

Pertanto, $2z + x = 2y + x \Rightarrow z = y$

Analogamente: $2z + y = 2x + y \Rightarrow z = x$

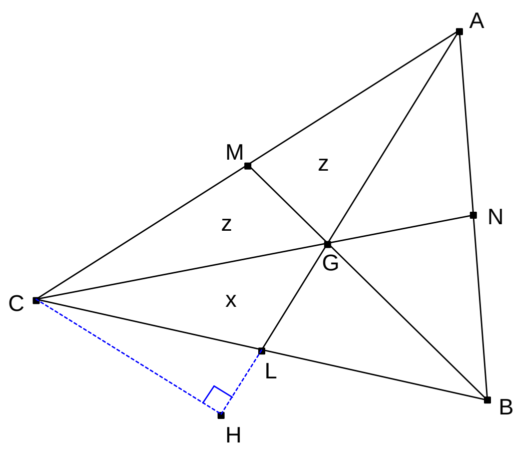
Quindi $x = y = z$

(É chiaro che vale anche $2x + z = 2y + z \Rightarrow x = y$, ma non serve per concludere che $x = y = z$)

PSd+

1) Giustificazione delle virgolette di “divide”: non è il baricentro bensì le tre mediane a dividere il triangolo. Tale divisione, poi, non è una partizione, dato che i 6 triangoli non sono a due a due disgiunti (condividendo punti di frontiera).

2) Con suddetta proprietà, e cioè che le mediane “dividono” un triangolo in sei triangoli equivalenti tra loro, si dimostra la nota proprietà secondo cui il baricentro G divide ogni mediana in due parti in rapporto $2:1$ tra di loro, essendo la maggiore quella comprendente il vertice.

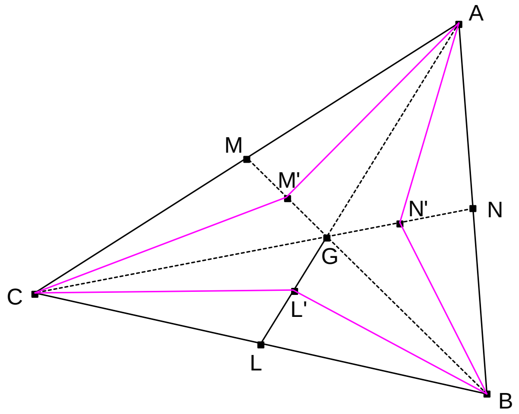


CAG e CLG hanno comune altezza CH, quindi le rispettive aree stanno tra loro come le rispettive basi, AG e LG, relative all’altezza comune, cioè:

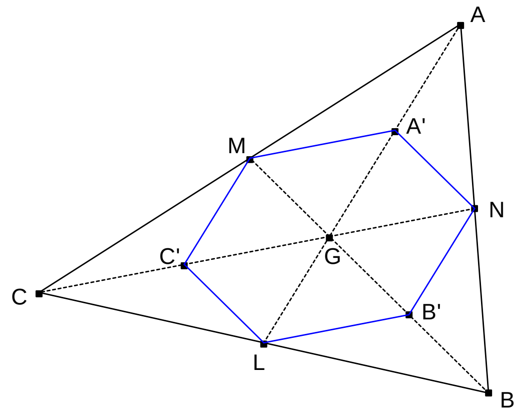
$$\frac{2z}{x} = \frac{AG}{LG} \Rightarrow \frac{AG}{LG} = \frac{2}{1} \qquad [z = x]$$

Analogamente: $\dfrac{BG}{MG} = \dfrac{2}{1}$ e $\dfrac{CG}{NG} = \dfrac{2}{1}$

3) Due esagoni notevoli tra loro equivalenti

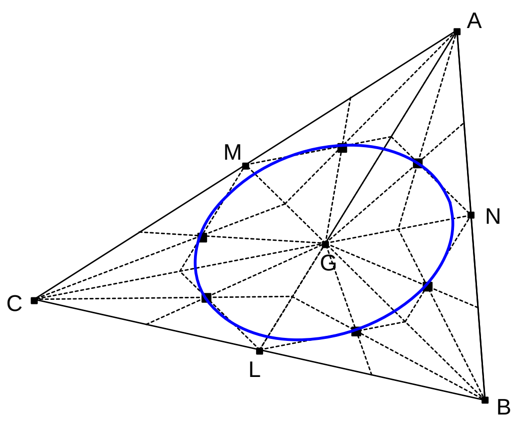


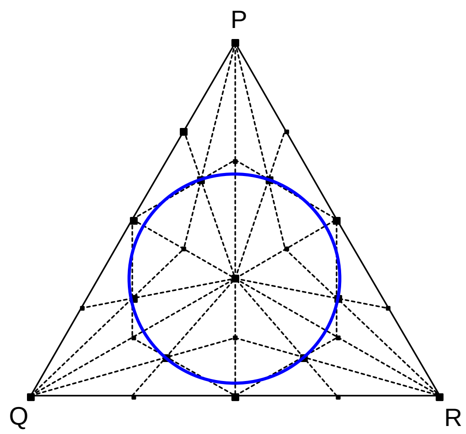
L'esagono concavo (e stellato rispetto a G) $\mathrm{AM'CL'BN'}$, con $\mathrm{M'}$, $\mathrm{L'}$ e $\mathrm{N'}$ rispettivi punti medi di MG, LG e NG è costituito da sei triangoli tra loro equivalenti per complessiva area pari alla metà di quella di ABC



L'esagono convesso $\mathrm{A'MC'LB'N}$, con $\mathrm{A'}$, $\mathrm{B'}$ e $\mathrm{C'}$ rispettivi punti medi di AG, BG e CG è anch'esso costituito da sei triangoli tra loro equivalenti per complessiva area pari alla metà di quella di ABC; inoltre, ha i lati opposti tra loro paralleli e congruenti (è simmetrico rispetto a G)

4) L'ellisse dei baricentri





I baricentri dei sei triangoli "individuati" dal baricentro G giacciono tutti su un'ellisse di centro G (*non* inscritta, come sembra, nell'esagono $\mathrm{A'MC'LB'N}$ di cui sopra). Per dimostrare ciò è sufficiente considerare una trasformazione affine che trasformi il triangolo ABC in un triangolo equilatero qualsiasi PQR. Infatti, le trasformazioni affini convertono mediane in mediane, baricentri in baricentri, ellissi in ellissi (le circonferenze sono ellissi, affinemente parlando), centri di ellissi in centri di ellissi (tangenti in tangenti, punti medi in punti medi e, in generale, conservano i rapporti tra segmenti). D'altra parte, per evidenti ragioni di simmetria, in un triangolo equilatero i sei triangoli "individuati" dal baricentro sono tra loro congruenti e i rispettivi baricentri stanno su una circonferenza di centro il baricentro del triangolo equilatero; inoltre, tale circonferenza *non* è inscritta nell'esagono regolare che ha per vertici i punti medi dei lati del triangolo e i tre punti medi dei segmenti maggiori staccati dal baricentro su ciascuna delle mediane, dato che essa interseca ogni lato dell'esagono in due punti distinti (che trisecano il lato) anziché, come dovrebbe per essere tangente, soltanto nel punto medio

ES-067

È vero che $\frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1+3+5+7}{9+11+13+15} = \ldots = \frac{1}{3}$?

(Esercizio del 22-01-2007, corso di Didattica della Matematica, prof. Paolo Maroscia - S.S.I.S. Lazio, Indirizzo F.I.M., VIII Ciclo, A.A. 2006-07)

La risposta è SI.

I soluzione

Uso la formula $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{k=1}^{2n}(2k-1) - \sum_{k=1}^{n}(2k-1)} = \frac{n^2}{(2n)^2 - n^2} = \frac{1}{3}$$

II soluzione

Uso le formule $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{k=1}^{n}(2n-1+2k)} = \frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n}(2n-1) + 2\cdot\sum_{k=1}^{n} k}$$

$$= \frac{n^2}{(2n-1)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right) + 2\cdot\sum_{k=1}^{n} k}$$

$$= \frac{n^2}{(2n-1)\cdot n + 2\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}} \qquad \left[\sum_{k=1}^{n} 1 = n\right]$$

$$= \frac{n^2}{n\cdot(2n-1+n+1)} = \frac{n^2}{3n^2} = \frac{1}{3}$$

ma potrei anche partire da $\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{j=n+1}^{2n}(2j-1)}$, effettuare per la sommatoria a denominatore la sostituzione di indice $k = j - n$, ottenendo

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{j=n+1}^{2n}(2j-1)}=\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{k=1}^{n}(2(n+k)-1)}=\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{k=1}^{n}(2n-1+2k)}$$, per poi proseguire come già fatto

III soluzione

Per Induzione su $n \geq 1$, riscrivendo però la tesi in forma intera (diversamente, l’induzione è più elaborata)

$\forall n \geq 1:\ \ 3\cdot(\text{somma dei primi } n \text{ dispari}) = \text{somma dei successivi } n \text{ dispari}$, cioè

$$3\cdot\overbrace{\left(\underbrace{2\cdot1-1}_{1°}+\underbrace{2\cdot2-1}_{2°}+\ \dots\ +\underbrace{2\cdot n-1}_{\text{n-esimo}}\right)}^{\text{somma dei primi } n \text{ dispari}}=\overbrace{\underbrace{2\cdot(n+1)-1}_{(n+1)\text{-esimo}}+\underbrace{2\cdot(n+2)-1}_{(n+2)\text{-esimo}}+\ \dots\ +\underbrace{2\cdot(2n)-1}_{\text{2n-esimo}}}^{\text{somma dei successivi } n \text{ dispari}}$$

$$3\cdot(\ 1\ +\ 3\ +\dots+\ 2n-1\ )=\ 2n+1\ +\ 2n+3\ +\dots+\ 4n-1$$

Passo iniziale: $\text{LHS}=3\cdot(2\cdot1-1)=3,\ \text{RHS}=4\cdot1-1=3$

Passo induttivo

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= 3\cdot(\text{somma dei primi } n+1 \text{ dispari})\\
&=3\cdot(1+3+5+\ \dots\ +2n-1 \qquad +2n+1)\\
&=3\cdot(1+3+5+\ \dots\ +2n-1) \qquad +3\cdot(2n+1)\\
&=(2n+1+2n+3+2n+5+\ \dots\ +4n-1)+3\cdot(2n+1) && [\text{ipotesi induttiva}]\\
&=(\qquad +2n+3+2n+5+\ \dots\ +4n-1)+\underbrace{3\cdot(2n+1)+2n+1}_{\|}\\
&=(\qquad +2n+3+2n+5+\ \dots\ +4n-1)+\overbrace{4n+1\ \ +4n+3}\\
&=\qquad +\underbrace{2n+3}_{2\cdot(n+2)-1}+\underbrace{2n+5}_{2\cdot(n+3)-1}+\ \dots\ +\underbrace{4n-1}_{2\cdot(2n)-1}+\underbrace{4n+1}_{2\cdot(2n+1)-1}+\underbrace{4n+3}_{2\cdot(2n+2)-1}\\
&=\qquad \text{somma dei successivi } \overbrace{n+1}^{2n+2-(n+2)+1=} \text{ dispari} \qquad =\text{RHS}
\end{aligned}$$

IV soluzione

Per Induzione su $n \geq 2$, ma lavorando con la tesi in forma fratta $\dfrac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{k=1}^{n}(2n-1+2k)}=\dfrac{1}{3}$

Passo iniziale: $\text{LHS}=\dfrac{1+3}{5+7}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}=\text{RHS}$

Passo induttivo

$$\frac{\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)}{\sum_{k=1}^{n+1}\left(2(n+1)-1+2k\right)}=\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right)+2(n+1)-1}{\left(\sum_{k=1}^{n}\left(2(n+1)-1+2k\right)\right)+2(n+1)-1+2(n+1)}$$

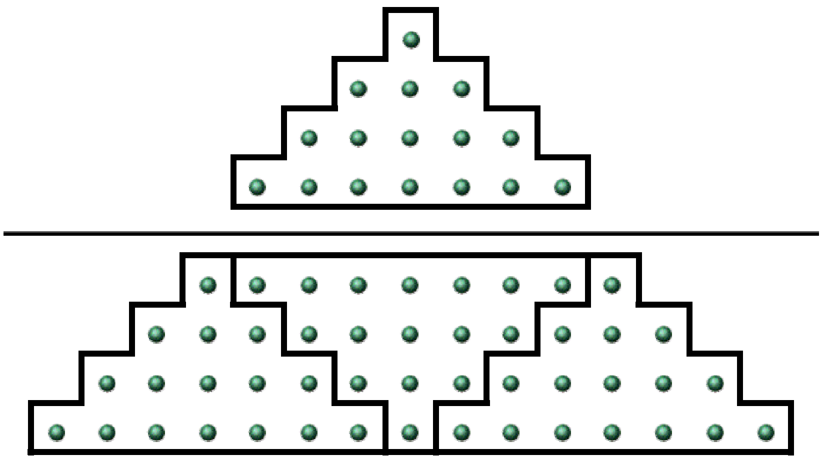
$$=\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right)+2n+1}{\left(\sum_{k=1}^{n}(2n-1+2k+2)\right)+4n+3}$$

$$=\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right)+2n+1}{\sum_{k=1}^{n}(2n-1+2k)+\left(\sum_{k=1}^{n}2\right)+4n+3}$$

$$=\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right)+2n+1}{3\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right)+2n+4n+3}\qquad\left[\begin{array}{l}\sum_{k=1}^{n}2=2\cdot\sum_{k=1}^{n}1=2n\ \text{ e ipotesi induttiva:}\\ \sum_{k=1}^{n}(2n-1+2k)=3\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right)\end{array}\right]$$

$$=\frac{\cancel{\left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right)+2n+1}}{3\cdot\left(\cancel{\left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right)+2n+1}\right)}=\frac{1}{3}$$

PWW[1]



$$\frac{1+3+5+\ \ldots\ +(2n-1)}{(2n+1)+(2n+3)+\ \ldots\ +(4n-1)}=\frac{1}{3}$$

---

[1] Pag. 81, *CRC-Standard Mathematical Tables and Formulae*, di Daniel Zwillinger - 31st Edition 2003, Chapman & Hall/CRC; e anche pag. 115, *Proofs Without Words, Exercises in Visual Thinking*, di Roger B. Nelsen - Class Resource Materials n.1, Published and Distributed by The Mathematical Association of America (MAA), 1993.

ES-074

Dati due numeri naturali m ed n, quale delle due frazioni è la maggiore: $\frac{m}{n}$, $\frac{m+1}{n+1}$?

(Esercizio del 06-02-2007, corso di Didattica della Matematica, prof. Paolo Maroscia - S.S.I.S. Lazio, Indirizzo F.I.M., VIII Ciclo, A.A. 2006-07)

I soluzione

$$\frac{m+1}{n+1}-\frac{m}{n}=\frac{mn+n-mn-m}{n\cdot(n+1)}=\frac{n-m}{n\cdot(n+1)}$$, da cui

$$\frac{m+1}{n+1} \begin{smallmatrix}>\\=\\<\end{smallmatrix} \frac{m}{n} \Leftrightarrow \frac{m+1}{n+1}-\frac{m}{n} \begin{smallmatrix}>\\=\\<\end{smallmatrix} 0 \Leftrightarrow n-m \begin{smallmatrix}>\\=\\<\end{smallmatrix} 0 \Leftrightarrow n \begin{smallmatrix}>\\=\\<\end{smallmatrix} m$$

II soluzione

$$\frac{m+1}{n+1}=\left(\frac{m+1}{n+1}\cdot\frac{n}{m}\right)\cdot\frac{m}{n}=\left(\frac{mn+n}{mn+m}\right)\cdot\frac{m}{n}=\left(\frac{mn+m+n-m}{mn+m}\right)\cdot\frac{m}{n}=\left(1+\frac{n-m}{mn+m}\right)\cdot\frac{m}{n}$$, da cui

$$\frac{m+1}{n+1} \begin{smallmatrix}>\\=\\<\end{smallmatrix} \frac{m}{n} \Leftrightarrow 1+\frac{n-m}{mn+m} \begin{smallmatrix}>\\=\\<\end{smallmatrix} 1 \Leftrightarrow \frac{n-m}{mn+m} \begin{smallmatrix}>\\=\\<\end{smallmatrix} 0 \Leftrightarrow n-m \begin{smallmatrix}>\\=\\<\end{smallmatrix} 0 \Leftrightarrow n \begin{smallmatrix}>\\=\\<\end{smallmatrix} m$$

III soluzione

Distinguo tre casi

1) $m=n \Rightarrow \frac{m}{n}=\frac{m+1}{n+1}=1$

2) $m<n \Rightarrow m\cdot n+m<m\cdot n+n \Rightarrow m\cdot(n+1)<n\cdot(m+1) \Rightarrow \frac{m}{n}<\frac{m+1}{n+1}$

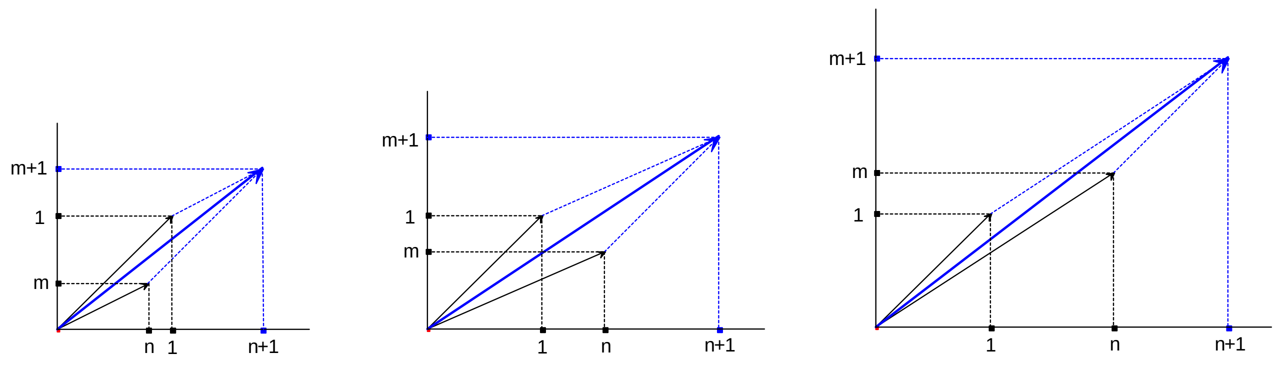
3) $m>n \Rightarrow m\cdot n+m>m\cdot n+n \Rightarrow m\cdot(n+1)>n\cdot(m+1) \Rightarrow \frac{m}{n}>\frac{m+1}{n+1}$

IV soluzione

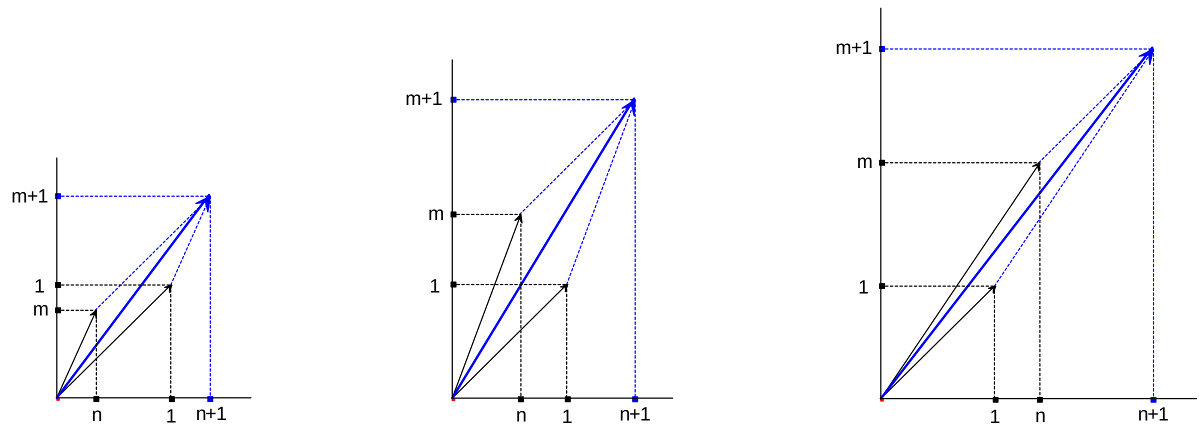
Essendo $\frac{m+1}{n+1}$ la mediante delle frazioni $\frac{m}{n}$ e $\frac{1}{1}$, allora

$$m\le n \Leftrightarrow \frac{m}{n}\le\frac{1}{1} \Leftrightarrow \frac{m}{n}\le\frac{m+1}{n+1}\le\frac{1}{1}$$

$$m\ge n \Leftrightarrow \frac{m}{n}\ge\frac{1}{1} \Leftrightarrow \frac{m}{n}\ge\frac{m+1}{n+1}\ge\frac{1}{1}$$

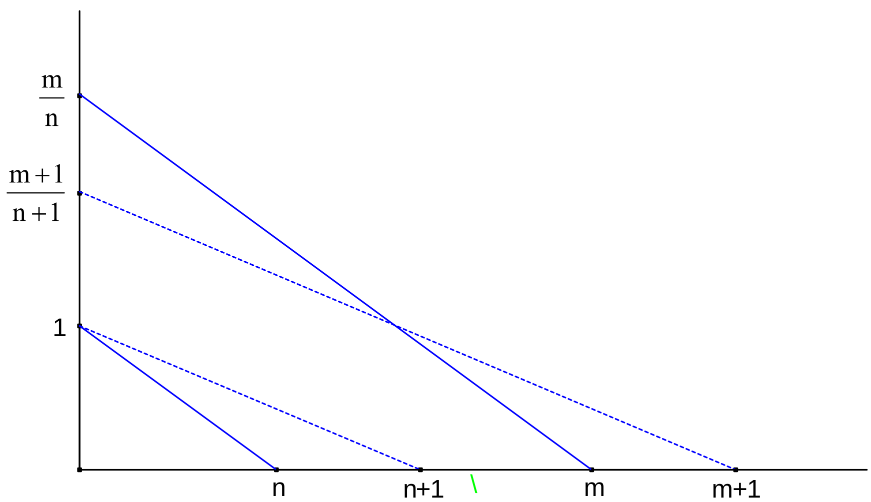


$$m \le n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m}{n} \le \frac{m+1}{n+1} \le 1$$



$$m \ge n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m}{n} \ge \frac{m+1}{n+1} \ge \frac{1}{1}$$

PWW



PSd+

1) La Mediante di due frazioni

Si dice *Mediante delle due frazioni* $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $b, d > 0$, la frazione $\frac{a+c}{b+d}$

È importante distinguere la *frazione* $\frac{A}{B}$ dal *rapporto* $\frac{A}{B}$, anche se, purtroppo, condividono la stessa notazione. Per *frazione* $\frac{A}{B}$, con $A, B \in \mathbb{R}$ e $B \neq 0$, s'intende il numero reale AB^{-1} radice dell'equazione $Ax = B$, identificabile con la coppia ordinata $(A\,;B) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\})$, mentre per *rapporto* $\frac{A}{B}$ s'intende la classe d'equivalenza $\left[\frac{A}{B}\right]_\rho \in \frac{\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\})}{\rho}$ associata alla frazione $\frac{A}{B}$ rispetto alla seguente relazione d'equivalenza $\rho : (A_1\,;B_1)\,\rho\,(A_2\,;B_2) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A_1B_2 - B_1A_2 = 0$. Anche se, per comodità, si usa identificare $\left[\frac{A}{B}\right]_\rho$ con uno qualsiasi dei suoi rappresentanti, ad esempio $\frac{A}{B}$ stessa, oppure $\frac{2A}{2B}, \frac{\sqrt{2}\,A}{\sqrt{2}\,B}, \frac{\frac{A}{\pi}}{\frac{B}{\pi}}, \ldots$, tuttavia non avrebbe senso definire (non sarebbe *ben definita*) la mediante di due rapporti, ancorché a denominatori positivi, come la mediante di due qualsiasi frazioni rappresentanti, in quanto il risultato non sarebbe univoco. Infatti, se considero, ad esempio, i due rapporti $\frac{1}{\sqrt{2}}(\approx 0{,}707)$ e $\frac{\pi}{3}(\approx 1{,}047)$, allora la mediante delle due frazioni rappresentanti $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\frac{\pi}{3}$ è la frazione $\frac{1+\pi}{\sqrt{2}+3}(\approx 0{,}938)$, mentre la mediante delle due frazioni rappresentanti $\frac{2}{2\sqrt{2}}$ e $\frac{\pi}{3}$ è la *diversa* frazione $\frac{2+\pi}{2\sqrt{2}+3}(\approx 0{,}882)$

2) Vale il seguente risultato

$$\boxed{\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \;\Leftrightarrow\; \frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d},\ \forall a, b, c, d \in \mathbb{R},\ \text{con } b, d > 0}$$

I Dim.

$(\Leftarrow)$

Per la proprietà transitiva della relazione d'ordine $\leq$

$(\Rightarrow)$

$$\left.\begin{array}{l} a+c = \frac{a}{b}\cdot b + \frac{c}{d}\cdot d \leq \frac{c}{d}\cdot b + \frac{c}{d}\cdot d = (b+d)\cdot\frac{c}{d} \overset{(b+d>0)}{\Rightarrow} \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d} \\ a+c = \frac{a}{b}\cdot b + \frac{c}{d}\cdot d \geq \frac{a}{b}\cdot b + \frac{a}{b}\cdot d = (b+d)\cdot\frac{a}{b} \underset{(b+d>0)}{\Rightarrow} \frac{a+c}{b+d} \geq \frac{a}{b} \end{array}\right\rangle \Rightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}$$

II Dim.

Tenuto conto dell'ipotesi $b, d > 0$, costruisco la seguente catena di coimplicazioni

$$\frac{a}{b} \le \frac{c}{d} \Leftrightarrow \left\langle \begin{array}{l} a \le \dfrac{c}{d} \cdot b \Leftrightarrow a + c \le \dfrac{c}{d} \cdot b + c = \dfrac{c}{d} \cdot (b+d) \Leftrightarrow \dfrac{a+c}{b+d} \le \dfrac{c}{d} \\ c \ge \dfrac{a}{b} \cdot d \Leftrightarrow a + c \ge \dfrac{a}{b} \cdot d + a = \dfrac{a}{b} \cdot (b+d) \Leftrightarrow \dfrac{a+c}{b+d} \ge \dfrac{a}{b} \end{array} \right\rangle \Leftrightarrow \frac{a}{b} \le \frac{a+c}{b+d} \le \frac{c}{d}$$

III Dim.

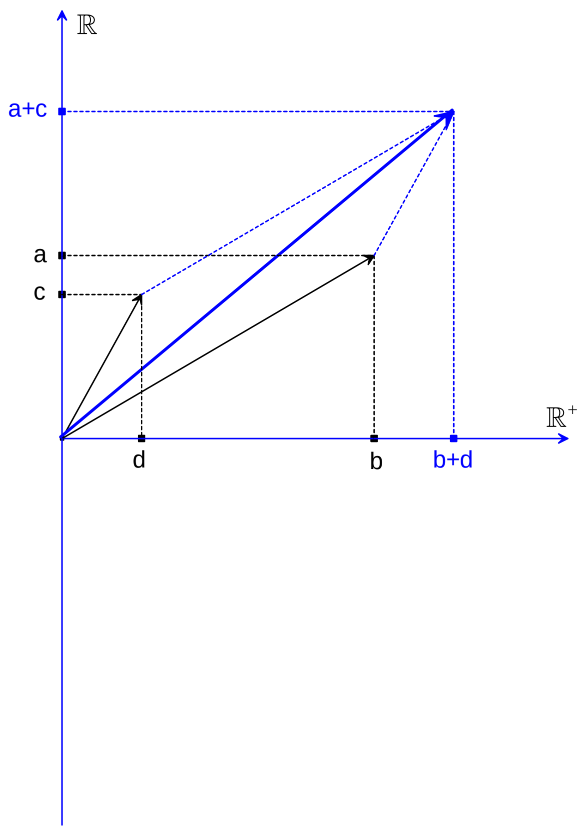
$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{cb - ad}{b(b+d)} = \frac{d}{b+d} \cdot \frac{\frac{cb}{d} - a}{b} = \frac{d}{b+d} \cdot \left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b} \right)$$

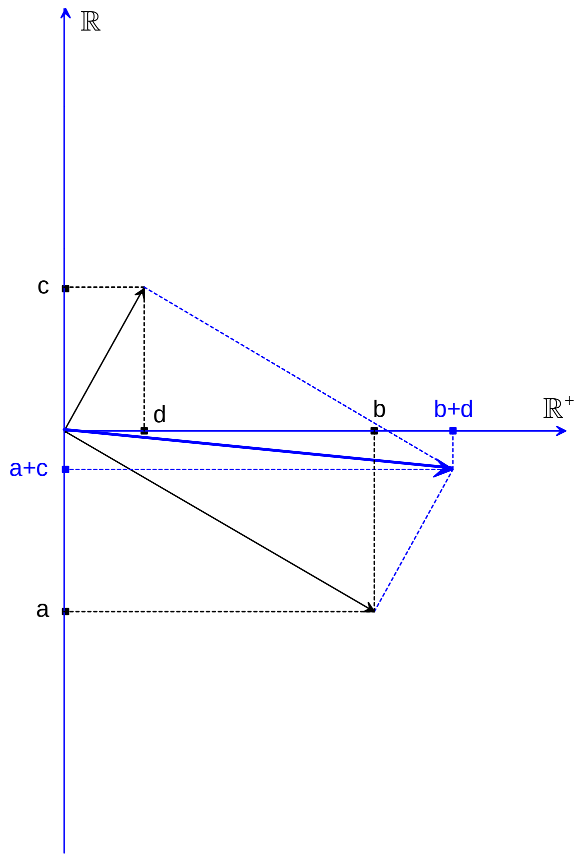
da cui $\dfrac{a+c}{b+d} \ge \dfrac{a}{b} \Leftrightarrow \dfrac{c}{d} \ge \dfrac{a}{b}$ $\left[\dfrac{d}{b+d} > 0 \text{ per l'ipotesi } b, d > 0 \right]$

analogamente, $\dfrac{c}{d} - \dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{cb - ad}{d \cdot (b+d)} = \dfrac{b}{b+d} \cdot \dfrac{c - \frac{ad}{b}}{d} = \dfrac{b}{b+d} \cdot \left(\dfrac{c}{d} - \dfrac{a}{b} \right)$

da cui $\dfrac{c}{d} \ge \dfrac{a+c}{b+d} \Leftrightarrow \dfrac{c}{d} \ge \dfrac{a}{b}$ $\left[\dfrac{b}{b+d} > 0 \text{ per l'ipotesi } b, d > 0 \right]$ ■

PWW





Generalizzando, si dice *Mediante delle* $n \geq 2$ *frazioni* $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$, ... , $\frac{a_n}{b_n}$, con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ e $b_i > 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, la frazione $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}$. Se le frazioni sono *frazioni razionali*[1], la mediante si dice anche *Media Razionale* e si indica con $MR\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right)$. Vale, infine, il risultato

> $\forall a_i, b_i \in \mathbb{R}$, con $b_i > 0$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, con $n \geq 2$ intero qualsiasi, si ha:
>
> $$\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \leq \frac{a_n}{b_n} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} \leq \frac{a_n}{b_n}$$

I Dim.

Tenuto conto che $b_i > 0$, e quindi $b_i \neq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} b_i > 0$, posso scrivere

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{b_i} \cdot b_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_n}{b_n} \cdot b_i\right) = \frac{a_n}{b_n} \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \leq \frac{a_n}{b_n} \\ \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{b_i} \cdot b_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_1}{b_1} \cdot b_i\right) = \frac{a_1}{b_1} \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \geq \frac{a_1}{b_1} \end{array}\right\rangle \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \leq \frac{a_n}{b_n}$$

II Dim.

Per Induzione su $n \geq 2$

Passo iniziale: già visto

Passo induttivo

Date $\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}, \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$, posso sempre supporre, a meno di ri-indicizzare, che sia

$$\frac{a_n}{b_n} = \max\left\{\frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}, \frac{a_n}{b_n}\right\}, \text{ e quindi } \frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$$

Dato che, per ipotesi induttiva, risulta $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} \leq \frac{a_n}{b_n}$ e visto che ho supposto $\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$,

[1] Anche qui vale l’osservazione fatta nel numero precedente: ecco perché non si parla di *numero razionale* bensì di *frazione razionale*.

allora ho che $\dfrac{a_1 + a_2 + \ ... \ + a_n}{b_1 + b_2 + \ ... \ + b_n} \leq \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$

cosicché, considerando la mediante delle due frazioni $\dfrac{a_1 + a_2 + \ ... \ + a_n}{b_1 + b_2 + \ ... \ + b_n}$ e $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$

per passo iniziale ottengo che $\dfrac{a_1 + a_2 + \ ... \ + a_n}{b_1 + b_2 + \ ... \ + b_n} \leq \dfrac{a_1 + a_2 + \ ... \ + a_n + a_{n+1}}{b_1 + b_2 + \ ... \ + b_n + b_{n+1}} \leq \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$

e siccome $\dfrac{a_1}{b_1} \leq \dfrac{a_1 + a_2 + \ ... \ + a_n}{b_1 + b_2 + \ ... \ + b_n}$, per ipotesi induttiva

allora posso concludere asserendo che $\dfrac{a_1}{b_1} \leq \dfrac{a_1 + a_2 + \ ... \ + a_n + a_{n+1}}{b_1 + b_2 + \ ... \ + b_n + b_{n+1}} \leq \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ ■

ES-075

È vero che l’inverso di $1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ si scrive nella forma $a+b\cdot\sqrt[3]{2}+c\cdot\sqrt[3]{4}$, con $a, b, c \in \mathbb{Q}$?

(Esercizio del 22-01-2007, corso di Didattica della Matematica, prof. Paolo Maroscia - S.S.I.S. Lazio, Indirizzo F.I.M., VIII Ciclo, A.A. 2006-07)

La risposta è SI.

I soluzione

$$1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}=1+\sqrt[3]{2}+\left(\sqrt[3]{2}\right)^2=\frac{1^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}{1-\sqrt[3]{2}}=\frac{1-2}{1-\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{-1+\sqrt[3]{2}}$$

quindi $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}=-1+\sqrt[3]{2}$, con $a=-1$, $b=1$ e $c=0$

II soluzione

Cerco $a, b, c \in \mathbb{Q}$ tali che:

$$\begin{aligned}1 &=\left(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)\cdot\left(a+b\cdot\sqrt[3]{2}+c\cdot\sqrt[3]{4}\right)\\ &=a+b\cdot\sqrt[3]{2}+c\cdot\sqrt[3]{4}+a\cdot\sqrt[3]{2}+b\cdot\sqrt[3]{4}+2c+a\cdot\sqrt[3]{4}+2b+2c\cdot\sqrt[3]{2}\\ &=a+2b+2c+\left(a+b+2c\right)\cdot\sqrt[3]{2}+\left(a+b+c\right)\cdot\sqrt[3]{4}\end{aligned}$$

Ora, affinché l’uguaglianza valga, cioè il secondo membro sia razionale e coincida con 1, si deve verificare la condizione $\left(a+2b+2c=1\right)\wedge\left(a+b+2c=0\right)\wedge\left(a+b+c=0\right)$, vale a dire la compatibilità del sistema lineare:

$$\begin{cases}a+b+c=0\\ a+b+2c=0\\ a+2b+2c=1\end{cases}$$

E, infatti, il determinante della matrice dei coefficienti è:

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\2&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=-2-0+1=-1\neq 0$$

dunque, il sistema ha un’unica soluzione che è

$$\begin{cases} a+b+2c-(a+b+c)=0 \\ a+b+c=0 \\ a+2b+2c=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c=0 \\ a=-b \\ a+2b+2c=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=+1 \\ c=0 \end{cases}$$

Pertanto, esiste ed è unico l'inverso (moltiplicativo) di $1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ nella forma $a+b\cdot\sqrt[3]{2}+c\cdot\sqrt[3]{4}$, con $a, b, c \in \mathbb{Q}$, ed è $-1+\sqrt[3]{2}$

PSd+

1) Esiste l'inverso di $a+b\cdot\sqrt[3]{2}+c\cdot\sqrt[3]{4}$, $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ e $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, nella medesima forma ?

Sicuramente si se, ad esempio, $a = q^2$, $b = q$ e $c = 1$, $\forall q \in \mathbb{Q}$; infatti:

$$q^2+q\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4} = \frac{q^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}{q-\sqrt[3]{2}} = \frac{q^3-2}{q-\sqrt[3]{2}} \Rightarrow \frac{1}{q^2+q\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}} = \frac{q-\sqrt[3]{2}}{q^3-2} = \frac{q}{q^3-2}+\frac{1}{2-q^3}\cdot\sqrt[3]{2}$$

$\left[\text{risulta } q^3-2 \neq 0 \ \ \forall q \in \mathbb{Q}\right]$

Nel caso generale, cerco $x, y, z \in \mathbb{Q}$, con $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, tali che:

$$\begin{aligned} 1 &= \left(a+b\cdot\sqrt[3]{2}+c\cdot\sqrt[3]{4}\right)\cdot\left(x+y\cdot\sqrt[3]{2}+z\cdot\sqrt[3]{4}\right) \\ &= \ldots \\ &= (a\cdot x+2c\cdot y+2b\cdot z)+(b\cdot x+a\cdot y+2c\cdot z)\cdot\sqrt[3]{2}+(c\cdot x+b\cdot y+a\cdot z)\cdot\sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

imposto il sistema e calcolo il determinante della relativa matrice dei coefficienti

$$\begin{cases} cx+by+az=0 \\ bx+ay+2cz=0 \\ ax+2cy+2bz=1 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} c & b & a \\ b & a & 2c \\ a & 2c & 2b \end{vmatrix} = 2c\left(ab-2c^2\right)-2b\left(b^2-ac\right)+a\left(2bc-a^2\right) = 6abc-a^3-2b^3-4c^3$$

Se valesse la seguente disuguaglianza:

$(*)$ $\quad 6abc-a^3-2b^3-4c^3 \neq 0$, $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$, con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

allora avremmo risolto giacché si avrebbe l'unica soluzione (con la Regola di Cramer)

$$\begin{cases} x = \dfrac{2bc - a^2}{6abc - a^3 - 2b^3 - 4c^3} \\ y = \dfrac{ab - 2c^2}{6abc - a^3 - 2b^3 - 4c^3} \\ z = \dfrac{ac - b^2}{6abc - a^3 - 2b^3 - 4c^3} \end{cases}$$ con $x, y, z \in \mathbb{Q}$ in quanto funzioni razionali dei razionali a, b, c

Risulta così che l'insieme $\mathcal{M} = \left\{a + b \cdot \sqrt[3]{2} + c \cdot \sqrt[3]{4} :\ \forall a, b, c \in \mathbb{Q}\right\}$, evidente sottoanello del campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali, in quanto $1 \in \mathcal{M}$ e $u - v, uv \in \mathcal{M}$, $\forall u, v \in \mathcal{M}$, è anche sottocampo di $\mathbb{R}$

2) Dimostrazione della $(*)$

I Dim.

Via aritmetica

Se, per assurdo, $\exists (a, b, c) \in \mathbb{Q}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ tale che $6abc = a^3 + 2b^3 + 4c^3$, allora, eliminando i denominatori, esiste anche $(a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{Z}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ tale che:

$(2*)$ $\quad 6a_1b_1c_1 = a_1^3 + 2b_1^3 + 4c_1^3$

Si può benissimo ipotizzare che a_1, b_1 e c_1 siano coprimi, altrimenti, se $\text{MCD}(a_1\ ; b_1\ ; c_1) = d > 1$, con d intero > 1, allora $\exists (a_1', b_1', c_1') \in \mathbb{Z}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ tali che $a_1 = a_1'd$, $b_1 = b_1'd$ e $c_1 = c_1'd$, con i quali la $(2*)$ diventa $(6a_1'b_1'c_1')d^3 = \left((a_1')^3 + 2(b_1')^3 + 4(c_1')^3\right)d^3$, da cui, cancellando d^3 $(\neq 0)$, si giunge all'uguaglianza $6a_1'b_1'c_1' = (a_1')^3 + 2(b_1')^3 + 4(c_1')^3$, tipologicamente identica alla $(2*)$.

Dalla $(2*)$ segue che a_1^3 è pari, e quindi a_1 è pari, cioè $a_1 = 2\alpha_1$ per un opportuno intero α_1, che sostituito nella $(2*)$ dà $12\alpha_1 b_1 c_1 = 8\alpha_1^3 + 2b_1^3 + 4c_1^3$, cioè:

$(3*)$ $\quad 6\alpha_1 b_1 c_1 = 4\alpha_1^3 + b_1^3 + 2c_1^3$

Dalla $(3*)$ segue che b_1^3 è pari, e quindi b_1 è pari, cioè $b_1 = 2\beta_1$ per un opportuno intero β_1, che sostituito $(3*)$ dà $12\alpha_1\beta_1 c_1 = 4\alpha_1^3 + 8\beta_1^3 + 2c_1^3$, cioè:

$(4*)$ $\quad 6\alpha_1\beta_1 c_1 = 2\alpha_1^3 + 4\beta_1^3 + c_1^3$

Dalla $(4*)$ segue, infine, che c_1^3 è pari, e quindi c_1 è pari

Pertanto, a_1, b_1 e c_1, avendo in comune il fattore 2, non sono coprimi, contrariamente a quanto ipotizzato.

II Dim.

Via algebrica

Uso la seguente identità:

$$A^3+B^3+C^3-3ABC=\frac{1}{2}(A+B+C)\cdot\left((A-B)^2+(B-C)^2+(C-A)^2\right)\ ,\ \text{valida } \forall A, B, C\in\mathbb{R}$$

in base alla quale deduco che

$$A^3+B^3+C^3-3ABC=0 \iff (A+B+C=0)\vee(A=B=C)$$

Se in quest’ultima pongo $A=-a$, $B=-\sqrt[3]{2}\cdot b$, $C=-\sqrt[3]{4}\cdot c$, allora ottengo:

$A^3+B^3+C^3-3ABC=-a^3-2b^3-4c^3+6abc$, e quindi $6abc-a^3-2b^3-4c^3=0$ se e solo se

1) $A+B+C=0 \iff a+\sqrt[3]{2}\cdot b+\sqrt[3]{4}\cdot c=0$

oppure

2) $A=B=C \iff a=\sqrt[3]{2}\cdot b=\sqrt[3]{4}\cdot c$

Ma entrambi i casi si verificano se e solo se i tre razionali a , b , c sono tutti nulli, il che implica che la $(*)$ è vera, data l’ipotesi $(a, b, c)\neq(0, 0, 0)$

Infatti, se $a=b=c=0$, allora le 1), 2) sono banalmente verificate. Viceversa:

nel caso 2), se non fosse $a=b=c=0$, allora entrambi i numeri $\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt[3]{4}$ risulterebbero razionali, mentre invece non lo sono, come risulta, ad esempio, applicando il Teorema sulle Radici Razionali (di un’equazione in un’incognita reale a coefficienti razionali, o meglio interi);

nel caso 1), osservo che $z=\sqrt[3]{2}$ è un numero algebrico di grado 3, in quanto radice del polinomio monico $X^3-2\in\mathbb{Q}[X]$ che è irriducibile in $\mathbb{Q}[X]$ dato che è di 3° grado ed è privo di radici in $\mathbb{Q}$, cosicché basta scrivere l’uguaglianza $a+\sqrt[3]{2}\cdot b+\sqrt[3]{4}\cdot c=0$ nella forma $a\cdot 1+b\cdot z+c\cdot z^2=0$ e ricavare che $a=b=c=0$ come semplice conseguenza del seguente teorema

Se $z\in\mathbb{C}$ è un numero algebrico di grado $n>0$, allora gli n numeri $1, z, z^2, z^3, \dots , z^{n-1}$ sono linearmente indipendenti sul campo $\mathbb{Q}$

3) Irriducibilità in $K[X]$, con K campo qualsiasi

Ricordiamo che, se $P\in K[X]-\{0\}$, allora:

i) P si dice *irriducibile in* $K[X]$ se:

$$\forall F, G\in K[X]:\ P=FG \Rightarrow (F\in K-\{0\})\vee(G\in K-\{0\})$$

in altre parole, se possiede solo divisori *banali*, essendo questi: c , cP, $\forall c\in K-\{0\}$

ii) $\deg(P)=1 \Rightarrow$ P è irriducibile in $K[X]$

iii) $(\deg(P)=2)\vee(\deg(P)=3) \Rightarrow (P$ è irriducibile in $K[X] \Leftrightarrow P$ non ha zeri in $K)$

4) Numeri algebrici

Un numero $z \in \mathbb{C}$ si dice *algebrico* (su $\mathbb{Q}$) se è zero di (almeno) un polinomio a coefficienti in $\mathbb{Q}$ e di grado positivo, cioè se:

$\exists P(X)=a_0+a_1X+a_2X^2+\ ...\ +a_nX^n$, con $a_0,\ a_1,\ a_2,\ ...\ ,\ a_n \in \mathbb{Q}$, $n>0$, $a_n \neq 0$, tale che

$P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ ...\ +a_nz^n=0$

Ad esempio: ogni numero razionale $\frac{p}{q}$ è algebrico in quanto zero del polinomio $X-\frac{p}{q}$ (oppure $qX-p$), l’unità immaginaria i è un numero algebrico in quanto zero del polinomio X^2+1, $\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt[3]{4}$ sono algebrici in quanto rispettivamente zeri dei polinomi X^3-2 e X^3-4.

Un numero che non è algebrico viene detto *trascendente* (su $\mathbb{Q}$). Classici numeri trascendenti sono π e il numero di Nepero e.

Chiaramente, se z è algebrico, allora esistono infiniti polinomi a coefficienti in $\mathbb{Q}$, che ammettono z come zero. Dato, infatti, che esiste almeno un $P(X)\in\mathbb{Q}[X]$ tale che $P(z)=0$, basta considerare tutti i polinomi del tipo $P(X)\cdot H(X)$, $\forall H(X)\in\mathbb{Q}[X]$ di grado positivo.

Si dice *grado di un numero algebrico* $z\in\mathbb{C}$ il più piccolo intero positivo n tale che z è zero di un polinomio di grado n a coefficienti in $\mathbb{Q}$. Il polinomio (unico) a coefficienti in $\mathbb{Q}$, monico (cioè con coefficiente direttore $a_n=1$) e di grado minimo tra quelli aventi z come zero è detto *polinomio minimo di* z. Dalla stessa sua definizione, segue subito che un siffatto polinomio è irriducibile in $\mathbb{Q}[X]$. Viceversa, un polinomio monico e irriducibile in $\mathbb{Q}[X]$ che ammette z come zero è necessariamente il polinomio minimo di z. Inoltre, sempre dalla definizione di polinomio minimo di z, segue subito che $1,\ z,\ z^2,\ z^3,\ ...\ ,\ z^{n-1}$ sono linearmente indipendenti sul campo $\mathbb{Q}$.

Ad esempio:

- un numero algebrico è razionale se e solo se ha grado di algebricità 1 $\big($qualsiasi polinomio $\in\mathbb{Q}[X]$ di grado unitario è irriducibile in $\mathbb{Q}[X]\big)$
- i numeri algebrici i e $\frac{1}{\sqrt{2}}$ hanno grado 2 e rispettivi polinomi minimi X^2+1 e $X^2-\frac{1}{2}$ $\big[$entrambi irriducibili in $\mathbb{Q}[X]$ perché di 2° grado e privi di radici in $\mathbb{Q}\big]$
- $\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt[3]{4}$ sono numeri algebrici di grado 3 con rispettivi polinomi minimi X^3-2 e X^3-4 $\big[$anch' essi entrambi irriducibili in $\mathbb{Q}[X]$ perché di 3° grado e privi di radici in $\mathbb{Q}\big]$.

5) L'insieme $\mathcal{M} = \left\{ a + b \cdot \sqrt[3]{2} + c \cdot \sqrt[3]{4} : \ \forall a, b, c \in \mathbb{Q} \right\}$ coincide con $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{2}\right]$, essendo $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{2}\right]$ il minimo sottoanello di $\mathbb{R}$ contenente $\mathbb{Q} \cup \left\{\sqrt[3]{2}\right\}$ $\big($minimo, dunque, rispetto all'inclusione insiemistica$\big)$, e visto che $X^3 - 2$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[X]$, allora l'ideale principale $\left\langle X^3 - 2 \right\rangle$ generato da $X^3 - 2$ $\big[$anche denotato con $\left(X^3 - 2\right)\mathbb{Q}[X]$ o semplicemente con $\left(X^3 - 2\right)\big]$ è massimale $\big($vale a dire, non è contenuto in nessun altro ideale proprio di $\mathbb{Q}[X]$, essendo gli ideali impropri solo $\mathbb{Q}[X]$ stesso e l'ideale nullo generato dallo zero di $\mathbb{Q}[X]\big)$, il che comporta che l'anello quoziente $\mathbb{Q}[X] \big/ \left\langle X^3 - 2 \right\rangle$ è un campo, a sua volta isomorfo ad $\mathcal{M}$ tramite il seguente (evidente) omomorfismo di anelli:

$$
\begin{array}{llll}
\varphi: & \mathbb{Q}[X] & \to & \mathbb{R} \\
 & 0 & \mapsto & 0 \\
 & P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k & \mapsto & P\left(\sqrt[3]{2}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sqrt[3]{2}\right)^k \qquad \left[\forall n \geq 0 \text{ intero}, \ \forall a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}\right]
\end{array}
$$

Infatti, in generale, si ha $\mathbb{Q}[X] \big/ \mathrm{Ker}\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi$, e inoltre:

- $\mathrm{Ker}\varphi = \left\langle X^3 - 2 \right\rangle$, in quanto $\mathrm{Ker}\varphi$ è un ideale principale non contenente polinomi di grado < 3
- $\mathrm{Im}\varphi = \mathcal{M}$, essendo evidente che $\mathcal{M} \subseteq \mathrm{Im}\varphi$, mentre per $\mathrm{Im}\varphi \subseteq \mathcal{M}$ basta osservare che:

  $\forall k \in \mathbb{Z}: \ k \geq 0, \ \exists! q, r \in \mathbb{Z}: \ k = 3q + r$, con $0 \leq r < 3$, cosicché $\left(\sqrt[3]{2}\right)^k = \left(\sqrt[3]{2}\right)^{3q+r} = 2^q \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^r$, e quindi $\left(\sqrt[3]{2}\right)^k \in \mathcal{M}$, da cui, essendo $\mathcal{M}$ sottoanello di $\mathbb{R}$, si ha $P\left(\sqrt[3]{2}\right) \in \mathcal{M}$, vale a dire $\mathrm{Im}\varphi \subseteq \mathcal{M}$.

Infine, dal momento che $\mathcal{M} = \mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{2}\right]$ è un campo, risulta allora $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right) \subseteq \mathcal{M}$, essendo $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$ il minimo sottocampo di $\mathbb{R}$ contenente $\mathbb{Q} \cup \left\{\sqrt[3]{2}\right\}$ $\big($minimo, dunque, rispetto all'inclusione insiemistica$\big)$, e quindi $\mathcal{M} = \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$, dato che risulta già $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{2}\right] \subseteq \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$, essendo entrambi sottoanelli di $\mathbb{R}$ contenenti $\mathbb{Q} \cup \left\{\sqrt[3]{2}\right\}$ ed essendo $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{2}\right]$ il minimo di siffatti sottoanelli.

6) Sapendo che 1, z e z^2 sono linearmente indipendenti su $\mathbb{Q}$, dove $z \in \mathbb{C}$ è una qualunque delle radici dell'equazione $X^3 - 2 = 0$, posso calcolarmi l'inverso di $a + b \cdot \sqrt[3]{2} + c \cdot \sqrt[3]{4}$, con $(a\,;b\,;c) \in \mathbb{Q}^3 - (0\,;0\,;0)$, in modo alternativo al sistema lineare visto in precedenza.

A tale scopo, utilizzo le tre radici dell'equazione $X^3 - 2 = 0$, che sono, oltre il reale $z_1 = \sqrt[3]{2}$, anche i due complessi coniugati, z_2 e z_3, radici dell'equazione $X^2 + \sqrt[3]{2}\,X + \sqrt[3]{4} = 0$, ossia:

$$
\frac{-\sqrt[3]{2} \pm \sqrt{\sqrt[3]{4} - 4\sqrt[3]{4}}}{2} = \frac{-\sqrt[3]{2} \pm \sqrt{-3\sqrt[3]{4}}}{2} = \frac{-\sqrt[3]{2} \pm \sqrt[6]{4} \cdot \sqrt{-3}}{2} = \sqrt[3]{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)
$$

Posto dunque $z_2 = \sqrt[3]{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)$, $z_3 = \overline{z_2} = \sqrt[3]{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)$, è facile verificare la validità delle seguenti due relazioni: $z_1+z_2+z_3=0$, $z_1z_2z_3=2$ (per inciso, esse sono due delle tre Formule di Viète associate all'equazione $X^3-2=0$). Dalla prima ricavo che $z_2+z_3=-z_1$, mentre dalla seconda, dato che $z_1^3=2$, ricavo che $z_1z_2z_3=z_1^3$, vale a dire $z_2z_3=z_1^2$ (visto che $z_1\neq 0$). Essendo $(a\,;b\,;c)\in\mathbb{Q}^3-(0\,;0\,;0)$ e 1, z_k e z_k^2 linearmente indipendenti su $\mathbb{Q}$, $\forall k\in\{1,2,3\}$, si ha che $a+bz_k+cz_k^2\neq 0$, $\forall k\in\{1,2,3\}$, da cui $\Theta \overset{\text{def}}{=} \left(a+bz_1+cz_1^2\right)\left(a+bz_2+cz_2^2\right)\left(a+bz_3+cz_3^2\right)\neq 0$ ($\mathbb{C}$ è un dominio d'integrità). Provo, ora, che il prodotto Θ è razionale per mezzo di opportune manipolazioni algebriche e sfruttando le relazioni di cui sopra.

Opero dapprima con il prodotto tra il 2° e il 3° fattore

$$
\begin{aligned}
\left(a+bz_2+cz_2^2\right)\left(a+bz_3+cz_3^2\right) &= a^2+abz_3+acz_3^2+abz_2+b^2z_2z_3+bcz_2z_3^2+acz_2^2+bcz_3z_2^2+c^2z_2^2z_3^2\\
&= a^2+ab\left(-z_1\right)+ac\left(\left(-z_1\right)^2-2z_1^2\right)+bcz_1^2\left(-z_1\right)+b^2z_1^2+c^2z_1^4\\
&= a^2-abz_1-acz_1^2-bc\underbrace{z_1^3}_{2}+b^2z_1^2+c^2\underbrace{z_1^3}_{2}z_1\\
&= a^2-abz_1-acz_1^2-2bc+b^2z_1^2+2c^2z_1\\
&= a^2-2bc+\left(2c^2-ab\right)z_1+\left(b^2-ac\right)z_1^2
\end{aligned}
$$

dopodiché moltiplico il risultato per il 1° fattore $a+bz_1+cz_1^2$

$$
\begin{aligned}
\Theta = {} & a^3-2abc+\left(2ac^2-a^2b\right)z_1+\left(ab^2-a^2c\right)z_1^2 \quad +\\
& \left(a^2b-2b^2c\right)z_1+\left(2bc^2-ab^2\right)z_1^2+\left(b^3-abc\right)z_1^3 \quad +\\
& \left(a^2c-2bc^2\right)z_1^2+\left(2c^3-abc\right)z_1^3+\left(b^2c-ac^2\right)z_1^4\\
= {} & a^3-2abc+\cancel{\left(2ac^2-2b^2c\right)}z_1+0\,z_1^2+\left(b^3+2c^3-2abc\right)\cdot 2+\cancel{\left(b^2c-ac^2\right)\cdot 2z_1}\\
= {} & a^3+2b^3+4c^3-6abc \;\Longrightarrow\; \Theta\in\mathbb{Q} \quad \left(\text{essendo } a, b, c\in\mathbb{Q}\right)
\end{aligned}
$$

infine, divido la $\Theta = \prod_{k=1}^{3}\left(a+bz_k+cz_k^2\right)$ per $\Theta\cdot\left(a+bz_1+cz_1^2\right)\neq 0$

$$
\frac{1}{a+bz_1+cz_1^2}=\frac{\left(a+bz_2+cz_2^2\right)\left(a+bz_3+cz_3^2\right)}{\Theta}=\frac{a^2-2bc+\left(2c^2-ab\right)z_1+\left(b^2-ac\right)z_1^2}{\Theta}\text{ , vale a dire}
$$

$$
\frac{1}{a+b\cdot\sqrt[3]{2}+c\cdot\sqrt[3]{4}}=\frac{a^2-2bc}{a^3+2b^3+4c^3-6abc}+\frac{2c^2-ab}{a^3+2b^3+4c^3-6abc}\cdot\sqrt[3]{2}+\frac{b^2-ac}{a^3+2b^3+4c^3-6abc}\cdot\sqrt[3]{4}
$$

ES-007

Dimostrare che, per ogni $n \geq 1$, si ha: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ \ldots \ + n^3 = \dfrac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$

I soluzione

Per Induzione

Passo iniziale: $1 = 1^3 = \dfrac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4} = \dfrac{1 \cdot 2^2}{4} = 1$

Passo induttivo

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ \ldots \ + \ n^3 + \ (n+1)^3 = \left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ \ldots \ + \ n^3\right) + \ (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \qquad [\text{ipotesi induttiva}]$$

$$= (n+1)^2 \cdot \left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right)$$

$$= \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4}$$

$$= \frac{(n+1) \cdot \left((n+1)+1\right)^2}{4}$$

II soluzione

Uso la riflessione dell’indice e le formule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)^3$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left((n+1)^3 - 3 \cdot (n+1)^2 \cdot k + 3 \cdot (n+1) \cdot k^2 - k^3\right)$$

$$= (n+1)^3 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right) - 3 \cdot (n+1)^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + 3 \cdot (n+1) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) - \sum_{k=1}^{n} k^3$$

$$= (n+1)^3 \cdot n - 3 \cdot (n+1)^2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + 3 \cdot (n+1) \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} - \sum_{k=1}^{n} k^3$$

esplicito $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{(n+1)^2 \cdot n \cdot \left(n+1-\frac{3}{2}\cdot(n+1)+\frac{1}{2}\cdot(2n+1) \right)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)^2 \cdot n \cdot \left(2n \cancel{+2} - 3n \cancel{-3} + 2n \cancel{+1} \right)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2 \cdot n^2}{4}$$

III soluzione

Calcolo in due modi diversi la somma $\sum_{k=1}^{n+1} k^4$

i) $\sum_{k=1}^{n+1} k^4 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^4 \right) + (n+1)^4$

ii) $\sum_{k=1}^{n+1} k^4 = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^4$ $\left[\begin{array}{l} \text{traslazione di } 1 \text{ dell'indice, con conseguente cambio di} \\ \text{estremi: anch'essi traslano di } 1 \text{, ma in senso opposto} \end{array} \right]$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} (k+1)^4 \qquad \left[\text{isolo il } 1° \text{ termine in modo da far partire l'indice da } 1\right]$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 \right)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} k^4 + 4 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^3 + 6 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 + 4 \cdot \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} k^4 + 4 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^3 + 6 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 + 4 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} k \right) + n$$

uguaglio i due risultati, elimino $\sum_{k=1}^{n} k^4$, esplicito $\sum_{k=1}^{n} k^3$ e uso le formule $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{(n+1)^4 - (n+1) - 4 \cdot \sum_{k=1}^{n} k - 6 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^4 - (n+1) - 4 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} - 6 \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}}{4}$$

$$= \frac{(n+1) \cdot \left((n+1)^3 - 1 - 2n - n \cdot (2n+1) \right)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)\cdot\left((n+1)^3-(2n+1)\cdot(n+1)\right)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2\cdot\left((n+1)^2-(2n+1)\right)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2\cdot n^2}{4}$$

IV soluzione

Calcolo in due modi diversi la somma $\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^4-k^4\right)$

i) $\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^4-k^4\right)=(n+1)^4-1$ [somma telescopica]

ii) $\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^4-k^4\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(k^4+4k^3+6k^2+4k+1-k^4\right)$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(4k^3+6k^2+4k+1\right)$$

$$= 4\cdot\sum_{k=1}^{n}k^3 \quad +6\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2 \quad +4\cdot\sum_{k=1}^{n}k \quad +\sum_{k=1}^{n}1$$

$$= 4\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}k^3\right)+6\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}+4\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}+n$$

uguaglio i due risultati ed esplicito $\sum_{k=1}^{n}k^3$

$$(n+1)^4-1=4\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}k^3\right)+n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)+2n\cdot(n+1)+n$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{(n+1)^4-(n+1)-n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)-2n\cdot(n+1)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^4-(n+1)-2n^2\cdot(n+1)-3n\cdot(n+1)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)\cdot\left((n+1)^3-1-2n^2-3n\right)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)\cdot\left(n^3+3n^2+3n+1-1-2n^2-3n\right)}{4}$$

$$=\frac{(n+1)\cdot\left(n^3+n^2\right)}{4}$$

$$=\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$$

V soluzione

Uso la formula $\binom{k+n}{k+1}\cdot k!=\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{h=0}^{k-1}(j+h)\right)$, con $k=3$

$$\binom{n+3}{4}\cdot 3!=\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{h=0}^{2}(j+h)\right)=$$

$$=(1+0)\cdot(1+1)\cdot(1+2)+(2+0)\cdot(2+1)\cdot(2+2)+\ \dots\ +(n+0)\cdot(n+1)\cdot(n+2)$$

$$=\quad 1^3+3\cdot 1^2+2\cdot 1\quad +\quad 2^3+3\cdot 2^2+2\cdot 2\quad +\ \dots\ +\quad n^3+3n^2+2n$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^3+3\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2+2\cdot\sum_{k=1}^{n}k$$

esplicito $\sum_{k=1}^{n}k^3$ e uso le formule $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\binom{n+3}{4}\cdot 3!-3\cdot\sum_{k=1}^{n}k^2-2\cdot\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{4}-3\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}-2\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n\cdot(n+1)}{4}\cdot\left((n+2)\cdot(n+3)-2\cdot(2n+1)-4\right)$$

$$=\frac{n\cdot(n+1)}{4}\cdot\left(n^2+5n+6-4n-2-4\right)$$

$$=\frac{n\cdot(n+1)}{4}\cdot\left(n^2+n\right)$$

$$=\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$$

VI soluzione

Uso le seguenti identità

$$(\mathrm{I})\qquad k^3=\binom{k}{3}+4\cdot\binom{k+1}{3}+\binom{k+2}{3}\ ,\ \forall k\in\mathbb{Z}:\ k\geq 3$$

$$(\mathrm{II})\quad \binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}\ ,\ \forall n,k\in\mathbb{Z}:\ n\ge k\ge 0$$

$$(\mathrm{III})\quad \binom{m+r+1}{r}=\sum_{h=0}^{r}\binom{m+h}{m}\ ,\ \forall m,r\in\mathbb{Z}:\ m,r\ge 0$$

$$(\mathrm{IV})\quad \binom{n+1}{4}+4\cdot\binom{n+2}{4}+\binom{n+3}{4}=\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}\ ,\ \forall n\in\mathbb{Z}:\ n\ge 3$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=+1+2^3+\sum_{k=3}^{n}\left(\binom{k}{3}+4\cdot\binom{k+1}{3}+\binom{k+2}{3}\right)\qquad \left[\text{scorporo i primi 2 termini dalla }\Sigma\text{ e applico }(\mathrm{I})\right]$$

$$=+1+8+\sum_{k=3}^{n}\binom{k}{3}+4\cdot\sum_{k=3}^{n}\binom{k+1}{3}+\sum_{k=3}^{n}\binom{k+2}{3}$$

$$=\sum_{h=0}^{n-3}\binom{3+h}{3}+4\cdot\left(\sum_{h=1}^{n-2}\binom{3+h}{3}\right)+4\cdot 1+\left(\sum_{h=2}^{n-1}\binom{3+h}{3}\right)+4+1\qquad \left[\begin{array}{l}\text{sostituzione dei 3 indici}\\ h=k-3\ \text{ in I }\Sigma\\ h=k-2\ \text{ in II }\Sigma\\ h=k-1\ \text{ in III }\Sigma\end{array}\right]$$

$$=\sum_{h=0}^{n-3}\binom{3+h}{3}+4\cdot\left(\sum_{h=1}^{n-2}\binom{3+h}{3}\right)+4\cdot\binom{3+0}{3}+\left(\sum_{h=2}^{n-1}\binom{3+h}{3}\right)+\binom{3+1}{3}+\binom{3+0}{3}$$

$$=\sum_{h=0}^{n-3}\binom{3+h}{3}+4\cdot\sum_{h=0}^{n-2}\binom{3+h}{3}+\sum_{h=0}^{n-1}\binom{3+h}{3}\qquad \left[\begin{array}{l}\text{accorpo }4\cdot\binom{3+0}{3}\ \text{ nella }2^a\ \Sigma\\ \text{e }\binom{3+1}{3}+\binom{3+0}{3}\ \text{ nella }3^a\ \Sigma\end{array}\right]$$

$$=\binom{3+n-3+1}{n-3}+4\cdot\binom{3+n-2+1}{n-2}+\binom{3+n-1+1}{n-1}\qquad [\text{applico }(\mathrm{III})]$$

$$=\binom{n+1}{n-3}+4\cdot\binom{n+2}{n-2}+\binom{n+3}{n-1}$$

$$=\binom{n+1}{n+1-(n-3)}+4\cdot\binom{n+2}{n+2-(n-2)}+\binom{n+3}{n+3-(n-1)}\qquad [\text{applico }(\mathrm{II})]$$

$$=\binom{n+1}{4}+4\cdot\binom{n+2}{4}+\binom{n+3}{4}$$

$$=\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}\qquad [\text{applico }(\mathrm{IV})]$$

VII soluzione

Uso l’identità $x^3=\frac{x^2\cdot(x+1)^2}{4}-\frac{(x-1)^2\cdot x^2}{4},\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2\cdot(k+1)^2}{4}-\frac{(k-1)^2\cdot k^2}{4}\right)$$

$\left[\begin{array}{l}\text{la } \Sigma \text{ a destra è telescopica:}\\ \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})\end{array}\right]$

$$=\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}-\frac{(1-1)^2\cdot 1^2}{4}$$

$\left[\text{addendo}_{\text{indice più alto}} - \text{addendo}_{\text{indice più basso}}\right]$

$$=\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$$

VIII soluzione

Utilizzo il risultato generale secondo cui la somma $S_p(n)=\sum_{k=0}^{n}k^p=\sum_{k=1}^{n}k^p$, vista come funzione reale della sola variabile $n\in\mathbb{N}$ (cioè fissato p), è un polinomio in n di grado $p+1$ a coefficienti in $\mathbb{Q}$, $\forall p\in\mathbb{N}$. Dunque, $S_3(n)=a_4n^4+a_3n^3+a_2n^2+a_1n^1+a_0$, con $a_4,\ a_3,\ a_2,\ a_1,\ a_0\in\mathbb{Q}$.

In alternativa, pervengo alla stessa conclusione considerando le *differenze finite*, più precisamente le *differenze finite in avanti* (ingl. *finite forward difference*), della particolare successione reale $f(n)=\sum_{k=0}^{n}k^3=\sum_{k=1}^{n}k^3$. In particolare, $f(n)$ è un polinomio di grado $\mathbf{4}$ in n a coefficienti in $\mathbb{R}$:

i) sia perché la successione $\Delta f(n)$ delle sue *differenze* ***prime*** (più precisamente *differenze finite in avanti di ordine* $\mathbf{1}$) è un polinomio di grado $\mathbf{3}$ in n a coefficienti in $\mathbb{R}$ $\big($Teorema della Differenza Finita Prima Polinomiale$\big)$; infatti: $\Delta f(n)=f(n+1)-f(n)=(n+1)^3$

ii) e sia perché la successione delle sue *differenze* ***quarte*** (più precisamente *differenze finite in avanti di ordine* $\mathbf{4}$) è una ***costante non nulla*** $\big($Teorema della Differenza Finita Costante$\big)$; infatti:

$$\Delta^{(2)}f(n)=\Delta\big(\Delta f(n)\big)=\Delta\Big((n+1)^3\Big)=\big((n+1)+1\big)^3-(n+1)^3=(n+2)^3-(n+1)^3=$$

$$=(n+2)^2+(n+2)(n+1)+(n+1)^2=3n^2+9n+7$$

$$\Delta^{(3)}f(n)=\Delta\Big(\Delta^{(2)}f(n)\Big)=\Delta\Big(3n^2+9n+7\Big)=\Big(3(n+1)^2+9(n+1)+7\Big)-\Big(3n^2+9n+7\Big)=$$

$$=3n^2+6n+3+9n+9+7-3n^2-9n-7=6n+9$$

$$\Delta^{(4)}f(n)=\Delta\Big(\Delta^{(3)}f(n)\Big)=\Delta(6n+9)=\big(6(n+1)+9\big)-(6n+9)=6$$

oppure, direttamente con la relazione $\Delta^{(4)}f(n)=f(n+4)-4f(n+3)+6f(n+2)-4f(n+1)+f(n)$

$$\Delta^{(4)}f(n)=\overbrace{f(n+4)}^{\bullet}-4\overbrace{f(n+3)}^{\bullet\bullet}+6f(n+2)-4\overbrace{f(n+1)}^{\therefore}+\overbrace{f(n)}^{::}$$

$$= \overbrace{(n+4)^3+(n+3)^3 \cancel{+f(n+2)}}^{\bullet} - 4\left(\overbrace{(n+3)^3 \cancel{+f(n+2)}}^{\bullet\bullet}\right) \cancel{+6f(n+2)} +$$

$$-4\left(\overbrace{\cancel{f(n+2)}-(n+2)^3}^{\therefore}\right) + \overbrace{\cancel{f(n+2)}-(n+2)^3-(n+1)^3}^{::}$$

$$= \qquad (n+4)^3 \qquad -3(n+3)^3 \qquad +3(n+2)^3 \qquad -(n+1)^3$$

$$= \overbrace{n^3+12n^2+48n+64}\ \overbrace{-3n^3-27n^2-81n-81}\ \overbrace{+3n^3+18n^2+36n+24}\ \overbrace{-n^3-3n^2-3n-1} = 6$$

n	n^3	$f(n)$	$\Delta f(n)$	$\Delta^{(2)}f(n)$	$\Delta^{(3)}f(n)$	$\Delta^{(4)}f(n)$
0	0	0				
1	1	1	1			
2	8	9	8	7		
3	27	36	27	19	12	
4	64	90	64	37	18	6
5	125	215	125	61	24	6
6	216	331	216	91	30	6
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Posto, dunque, $S_3(n)=f(n)=a_4n^4+a_3n^3+a_2n^2+a_1n+a_0$, i *cinque* coefficienti $a_4,\ a_3,\ a_2,\ a_1,\ a_0$ si calcolano sostituendo ad n *cinque* valori (interi) *distinti arbitrari*

$$n=1 \ \rightarrow \quad 1^3=1=a_4 1^4+a_3 1^3+a_2 1^2+a_1 1+a_0=a_4+a_3+a_2+a_1+a_0$$

$$n=2 \ \rightarrow \quad 1^3+2^3=9=a_4 2^4+a_3 2^3+a_2 2^2+a_1 2+a_0=16a_4+8a_3+4a_2+2a_1+a_0$$

$$n=3 \ \rightarrow \quad 1^3+2^3+3^3=36=a_4 3^4+a_3 3^3+a_2 3^2+a_1 3+a_0=81a_4+27a_3+9a_2+3a_1+a_0$$

$$n=4 \ \rightarrow \quad 1^3+2^3+3^3+4^3=100=a_4 4^4+a_3 4^3+a_2 4^2+a_1 4+a_0=256a_4+64a_3+16a_2+4a_1+a_0$$

$$n=5 \ \rightarrow \quad 1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=225=a_4 5^4+a_3 5^3+a_2 5^2+a_1 5+a_0=625a_4+125a_3+25a_2+5a_1+a_0$$

da cui il sistema

[è chiaro che la scelta $n = 0, 1, 2, 3, 4$ è più efficiente, ma ho voluto escludere $n = 0$, "ligio alla consegna" $n \geq 1$]

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \\ \mathrm{V} \end{array} \begin{cases} a_4+a_3+a_2+a_1+a_0=1 \\ 16a_4+8a_3+4a_2+2a_1+a_0=9 \\ 81a_4+27a_3+9a_2+3a_1+a_0=36 \\ 256a_4+64a_3+16a_2+4a_1+a_0=100 \\ 625a_4+125a_3+25a_2+5a_1+a_0=225 \end{cases}$$

che ha un'unica soluzione dato che la matrice dei coefficienti è una Matrice di Vandermonde e quindi a determinante non nullo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 81 & 27 & 9 & 3 & 1 \\ 256 & 64 & 16 & 4 & 1 \\ 625 & 125 & 25 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^4 & 1^3 & 1^2 & 1 & 1 \\ 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2 & 1 \\ 3^4 & 3^3 & 3^3 & 3 & 1 \\ 4^4 & 4^3 & 4^2 & 4 & 1 \\ 5^4 & 5^3 & 5^2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2 & 1^3 & 1^4 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ 1 & 3 & 3^3 & 3^3 & 3^4 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 & 4^4 \\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3 & 5^4 \end{vmatrix} \qquad \left[\begin{array}{l} \text{permuto le colonne 1-5 e le colonne 2-4 ,} \\ \text{quindi il segno del determinante si conserva} \end{array}\right]$$

$$= \prod_{1 \le h < k \le 5} (k - h)$$

$$\begin{aligned} =(5-4)\cdot(5-3)\cdot(5-2)\cdot(5-1)\cdot \\ \cdot(4-3)\cdot(4-2)\cdot(4-1)\cdot \\ \cdot(3-2)\cdot(3-1)\cdot \\ (2-1) \end{aligned}$$

$$= 4!3!2!1!$$

$$= 24 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \cdot (10 + 2) = 240 + 48 = 288$$

calcolo, pertanto, l'unica soluzione con la Regola di Cramer oppure trasformando, con il più efficiente Metodo di Eliminazione di Gauss, il sistema in uno equivalente avente matrice dei coefficienti di forma Triangolare Superiore

$$\begin{cases} a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 1 \\ 8a_3 + 12a_2 + 14a_1 + 15a_0 = 7 \\ 54a_3 + 72a_2 + 78a_1 + 80a_0 = 45 \\ 192a_3 + 240a_2 + 252a_1 + 255a_0 = 156 \\ 500a_3 + 600a_2 + 620a_1 + 624a_0 = 400 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \text{ho rimpiazzato} \\ \text{la II con } 16 \cdot \mathrm{I} - \mathrm{II} \\ \text{la III con } 81 \cdot \mathrm{I} - \mathrm{III} \\ \text{la IV con } 256 \cdot \mathrm{I} - \mathrm{IV} \\ \text{la V con } 625 \cdot \mathrm{I} - \mathrm{V} \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 1 \\ 8a_3 + 12a_2 + 14a_1 + 15a_0 = 7 \\ 36a_2 + 66a_1 + 85a_0 = 9 \\ 48a_2 + 84a_1 + 105a_0 = 12 \\ 300a_2 + 510a_1 + 627a_0 = 75 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \text{ho rimpiazzato} \\ \text{la III con } 27 \cdot \mathrm{II} - 4 \cdot \mathrm{III} \\ \text{la IV con } 24 \cdot \mathrm{II} - \mathrm{IV} \\ \text{la V con } 125 \cdot \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{V} \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 1 \\ 8a_3 + 12a_2 + 14a_1 + 15a_0 = 7 \\ 36a_2 + 66a_1 + 85a_0 = 9 \\ 12a_1 + 25a_0 = 0 \\ 120a_1 + 244a_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \text{ho rimpiazzato} \\ \text{la IV con } 4\cdot \text{III} - 3\cdot \text{IV} \\ \text{la V con } 25\cdot \text{III} - 3\cdot \text{V} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 1 \\ 8a_3 + 12a_2 + 14a_1 + 15a_0 = 7 \\ 36a_2 + 66a_1 + 85a_0 = 9 \\ 12a_1 + 25a_0 = 0 \\ 6a_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \text{ho rimpiazzato} \\ \text{la V con } 10\cdot \text{IV} - \text{V} \end{bmatrix}$$

procedendo a ritroso a partire dal basso trovo la soluzione

$$\begin{cases} a_4 = 1 - 0 - 0 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{4-1-2}{4} = \frac{1}{4} \\ a_3 = \frac{1}{8}\cdot\left(7 - 15\cdot 0 - 14\cdot 0 - 12\cdot\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}\cdot(7-3) = \frac{1}{2} \\ a_2 = \frac{1}{36}\cdot(9 - 85\cdot 0 - 66\cdot 0) = \frac{1}{4} \\ a_1 = \frac{1}{12}\cdot(0 - 25\cdot 0) = 0 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

Pertanto, $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}\cdot n^4 + \frac{1}{2}\cdot n^3 + \frac{1}{4}\cdot n^2 = \frac{n^2\cdot(n^2+2n+1)}{4} = \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$

IX soluzione

Uso il seguente "array" studiato nel 1934 dal matematico francese Victor Thébault (1882-1960)[1]

$$\begin{array}{|ccccccc} \hline 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & \cdots \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & \cdots \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 & 21 & \cdots \\ 1 & 6 & 11 & 16 & 21 & 26 & \cdots \\ 1 & 7 & 13 & 19 & 25 & 31 & \cdots \\ 1 & 8 & 15 & 22 & 29 & 36 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

[1] Pag. 59, *Elementary Number Theory with Applications*, di Thomas Koshy - Harcourt/Academic Press, 2002. Sono famosi i "Problèmes" geometrici di Thébault, cfr. http://agutie.homestead.com, il sito "Geometry Step by Step from the Land of the Incas", curato dal peruviano Antonio Gutierrez, e http://en.wikipedia.org alla voce Thébault's theorem.

Le righe e le colonne sono tutte progressioni aritmetiche

- la m-esima riga ha $1°$ elemento 1 e ragione $m+1$, $\forall m>0$
- la n-esima colonna ha $1°$ elemento $1+(n-1)\cdot 2$ e ragione $n-1$, $\forall n>0$

Tra le numerose proprietà possedute da questa matrice doppiamente infinita, quelle che ci interessano sono contenute nella seguente illustrazione grafica:

1	3	5	7	9	11	…
1	4	7	10	13	16	…
1	5	9	13	17	21	…
1	6	11	16	21	26	…
1	7	13	19	25	31	…
1	8	15	22	29	36	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

1) per ogni $n\geq 1$, la somma Q_n degli elementi del quadrato n-esimo (a partire da sinistra in alto) vale $\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2$, pari, cioè, al quadrato della somma dei primi n interi positivi

2) la somma S_n degli elementi della “squadra” n-esima (sempre a partire da sinistra in alto), costituita dagli elementi ottenuti per differenza (insiemistica) tra un quadrato e il precedente, vale n^3; per “squadra” 1-esima è da intendersi il quadrato 1-esimo

Dalle relazioni $Q_1=S_1$ e $S_n=Q_n-Q_{n-1}$ per $n\geq 2$, ricavo che $\sum_{k=1}^{n} S_k=Q_n$, da cui, in virtù delle 1), 2), segue la tesi

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2$$

Provo le 1), 2) “giocando” con le progressioni aritmetiche

<u>Dim.</u> 1)

Considero Q_n come somma delle somme de primi n elementi di ciascuna delle prime n righe

$$Q_n=\sum_{m=1}^{n}\left\{\overbrace{\left(\underbrace{1}_{1°\text{ elemento della } m\text{-esima riga}}+\underbrace{1+(n-1)\cdot(m+1)}_{n\text{-esimo elemento della } m\text{-esima riga}}\right)\cdot\frac{n}{2}}^{\text{somma dei primi n elementi della } m\text{-esima riga}}\right\}$$

$$=\frac{n}{2}\cdot\sum_{m=1}^{n}\left(n+1+(n-1)\cdot m\right) \qquad \left[\frac{n}{2} \text{ a fattor esterno perché indipendente dall'indice } m\right]$$

$$=\frac{n}{2}\cdot\left((n+1)\cdot\left(\sum_{m=1}^{n}1\right)+(n-1)\cdot\left(\sum_{m=1}^{n}m\right)\right)$$

$$=\frac{n}{2}\cdot\left((n+1)\cdot n+(n-1)\cdot\frac{(n+1)\cdot n}{2}\right) \qquad \left[\sum_{m=1}^{n}1=n\ ;\ \sum_{m=1}^{n}m=\frac{(n+1)\cdot n}{2}\right]$$

$$=\frac{n}{4}\cdot(n+1)\cdot n\cdot\left(2+(n-1)\right)$$

$$=\frac{n}{4}\cdot(n+1)^2\cdot n$$

$$=\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2$$

<u>Dim.</u> 2)

Considero S_n come somma di due somme

1.1) la somma dei primi n elementi della n- esima riga

$$\left(\overbrace{1}^{\text{primo elemento}}+\overbrace{1+(n-1)\cdot(n+1)}^{\text{n-esimo elemento}}\right)\cdot\frac{n}{2}=\left(n^2+1\right)\cdot\frac{n}{2}$$

1.2) la somma dei primi $n-1$ elementi della n- esima colonna

$$\left(\overbrace{1+(n-1)\cdot 2}^{\text{primo elemento}}+\overbrace{1+(n-1)\cdot 2+(n-2)\cdot(n-1)}^{\text{(n-1)-esimo elemento}}\right)\cdot\frac{n-1}{2}=\left(2+(n-1)\cdot(n+2)\right)\cdot\frac{n-1}{2}=n\cdot(n+1)\cdot\frac{(n-1)}{2}$$

cosicché $S_n=\left(n^2+1\right)\cdot\frac{n}{2}+n\cdot(n+1)\cdot\frac{(n-1)}{2}=\frac{n}{2}\cdot\left(n^2+1+n^2-1\right)=n^3$

In alternativa, basta verificare che $Q_n-Q_{n-1}=n^3$, per $n\geq 2$

$$Q_n-Q_{n-1}=\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{(n-1)\cdot n}{2}\right)^2$$

$$=\frac{n^2}{4}\cdot\left((n+1)^2-(n-1)^2\right)=\frac{n^2}{4}\cdot 4n=n^3$$

X soluzione

Uso il seguente "array" studiato nel 1930 dal matematico belga Maurice Kraitchik (1882-1957)[2]

1	2	3	4	5	6	…
2	4	6	8	10	12	…
3	6	9	12	15	18	…
4	8	12	16	20	24	…
5	10	15	20	25	30	…
6	12	18	24	30	36	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

$\forall n \geq 1$, la riga n-esima e la colonna n-esima coincidono perché entrambe formate dai multipli di n.

Come per l'array di Thébault, la tesi segue osservando che:

1) per ogni $n \geq 1$, la somma Q_n degli elementi del quadrato n-esimo (a partire da sinistra in alto) vale $\left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2$, pari, cioè, al quadrato della somma dei primi n interi positivi;

2) la somma S_n degli elementi della "squadra" n-esima (sempre a partire da sinistra in alto), costituita dagli elementi ottenuti per differenza (insiemistica) tra un quadrato e il precedente, vale n^3; per "squadra" 1-esima è da intendersi il quadrato 1-esimo.

Dim. 1)

$$Q_n = \sum_{m=1}^{n} (m + 2m + 3m + \ \dots \ + n \cdot m)$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \left(m \cdot (1 + 2 + 3 + \ \dots \ + n)\right)$$

$$= (1 + 2 + 3 + \ \dots \ + n) \cdot \sum_{m=1}^{n} m \qquad \left[(1+2+3+\ \dots \ +n) \text{ è indipendente dall'indice } m\right]$$

$$= \frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot \frac{(n+1) \cdot n}{2} = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2 \qquad \left[\Sigma \text{ dei primi } n \text{ interi positivi}\right]$$

Dim. 2)

$$S_n = \overbrace{n + 2n + 3n + \ \dots \ + n^2}^{\text{primi } n \text{ elementi della } n\text{-esima riga}} + \overbrace{n + 2n + 3n + \ \dots \ + (n-1) \cdot n}^{\text{primi } n-1 \text{ elementi della } n\text{-esima colonna}}$$

$$= n \cdot (1 + 2 + 3 + \ \dots \ + n) + n \cdot (1 + 2 + 3 + \ \dots \ + n - 1)$$

---

[2] Pag. 59, *Elementary Number Theory with Applications*, di Thomas Koshy - Harcourt/Academic Press, 2002. Kraitchik si interessò principalmente di Teoria dei Numeri e Matematica Ricreativa.

$$= n \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2}$$

$$= \frac{n^2}{2} \cdot (n+1+n-1) = \frac{n^2}{2} \cdot 2n = n^3$$

oppure, verifico semplicemente che $S_n = Q_n - Q_{n-1} = n^3$, per $n \geq 2$

XI soluzione

Uso il cosiddetto *Teorema di Nicomaco*[3] secondo cui

> $n^3 = \sum_{h=1}^{n} \left(n \cdot (n-1) + 2h - 1 \right)$, ossia:
>
> l’ n- esimo cubo intero, $\forall n \geq 2$, è uguale alla somma degli n dispari consecutivi a partire da $n \cdot (n-1) + 1$

In tal modo, risulta che ogni dispari è addendo di uno ed un solo cubo come illustrato dalla seguente successione di uguaglianze:

$$\begin{array}{lclclclclclcl}
1^3 & = & 1 & & & & & & & & & & \\
2^3 & = & 3 & + & 5 & & & & & & & & \\
3^3 & = & 7 & + & 9 & + & 11 & & & & & & \\
4^3 & = & 13 & + & 15 & + & 17 & + & 19 & & & & \\
5^3 & = & 21 & + & 23 & + & 25 & + & 27 & + & 29 & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \\
n^3 & = & n \cdot (n-1)+1 & + & n \cdot (n-1)+3 & + & n \cdot (n-1)+5 & + & \ldots & & \ldots & + & n \cdot (n-1)+2n-1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ldots & & \ldots & & \vdots \quad \ddots
\end{array}$$

Dopo aver verificato il Teorema di Nicomaco:

$$\sum_{h=1}^{n} \left(n \cdot (n-1) + 2h - 1 \right) = \sum_{h=1}^{n} n \cdot (n-1) + \sum_{h=1}^{n} (2h-1)$$

[3] Nicomachus di Gerasa (~60-120 dC), filosofo neopitagorico platonizzante ellenico vissuto in Palestina (Gerasa oggi è la città di Jerash in Giordania, situata a circa 25 km a nord di Amman). Scrisse una *Introduzione all’aritmetica* (in due libri), un *Manuale di armonia* e una *Teologia dell’aritmetica*. Il suddetto “teorema” è riportato nell’*Introduzione*, opera conosciutissima nell’antichità, con la quale Nicomaco compì un notevole lavoro di raccolta e sistemazione dei risultati della riflessione matematica pitagorica. Scritta sotto forma di manuale per l’apprendimento delle nozioni aritmetiche basilari, l’*Introduzione* ebbe, a partire dalla morte dell’autore, numerose traduzioni e commentari. Traduzioni in latino di Apuleio di Madaura (Lucius Apuleius, ~125-175/180, l’autore delle *Metamorfosi*) e di Boezio di Roma (Anicius Manlius Torquatus Severinus Boethius, 480-525), in arabo da parte di Thābit ibn Qurra di Harran (Abu'l Hasan Thābit ibn Qurra' ibn Marwan al-Sabi al-Harrani, 836-901); commentari ad opera di Giamblico di Calcide (Iamblichus, ~245-325), di Soterico di Alessandria (Sotherichus, ~III sec), di Giovanni Filopono di Alessandria (Joannes Philoponus, ~470-590), di Asclepio di Tralle (Asclepius, VI sec); influenze su autori più tardi, come Cassiodoro di Squillace (Flavius Magnus Aurelius Cassiodorus Senator, ~485-585) e Michele Psello di Nicomedia (lat. Psellus, gr. Μιχαήλ Ψελλός, 1017/18-1078).

$$= n \cdot (n-1) \cdot \left(\sum_{h=1}^{n} 1 \right) + n^2 \qquad \left[\begin{array}{l} \text{metto } n \cdot (n-1) \text{ a fattore della I } \Sigma \text{, perché} \\ \text{indipendente dall'indice } h \text{, mentre per la II } \Sigma \\ \text{uso l'identità } n^2 = \sum_{h=1}^{n} (2h-1) \end{array} \right]$$

$$= n \cdot (n-1) \cdot n + n^2 = n^3 \qquad \left[\sum_{h=1}^{n} 1 = n \right]$$

calcolo il progressivo d'ordine occupato nella successione dei dispari dall'ultimo addendo, cioè quell'intero positivo x tale che $n \cdot (n-1) + 2n - 1 = n^2 + n - 1 = 2x - 1$, ossia $x = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$;

cosicché posso dire che la somma dei primi n cubi coincide con la somma dei primi $\dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$ dispari, da cui, in virtù della formula $m^2 = \sum_{h=1}^{m} (2h-1)$, ottengo la tesi:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{h=1}^{\frac{n \cdot (n+1)}{2}} (2h-1) = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)^2$$

PSd+

1) $\dfrac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} = \left(\dfrac{n \cdot (n+1)}{2} \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2$

Ma vale anche il viceversa:

> Se $(a_k)_{k \geq 1}$ è una successione di numeri reali positivi tale che
>
> $\sum_{k=1}^{n} a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^2$, $\forall n \geq 1$, allora $a_n = n$, $\forall n \geq 1$

<u>Dim.</u>

Per Induzione Forte su $n \geq 1$

Passo iniziale

$a_1^3 = a_1^2 \Rightarrow a_1^2 \cdot (a_1 - 1) = 0 \Rightarrow a_1 - 1 = 0 \Rightarrow a_1 = 1$ $\qquad [a_1 \neq 0$, per l'ipotesi $a_k > 0$, $\forall k \geq 1]$

Passo induttivo

Data l'ipotesi $\sum_{k=1}^{n+1} a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k \right)^2$, e aggiungendo l'ipotesi induttiva $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, ..., $a_n = n$, devo provare che $a_{n+1} = n + 1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k^3 = \left(a_1 + a_2 + \ \dots \ + a_n + a_{n+1}\right)^2$$

$$= \left(a_1 + a_2 + \ \dots \ + a_n\right)^2 + 2\cdot\left(a_1 + a_2 + \ \dots \ + a_n\right)\cdot a_{n+1} + a_{n+1}^2$$

$$= a_1^3 + a_2^3 + \ \dots \ + a_n^3 \quad + 2\cdot\left(1 + 2 + \ \dots \ + n\right)\cdot a_{n+1} \quad + a_{n+1}^2 \qquad \left[\begin{array}{l}\text{ipotesi } \sum_{k=1}^{n} a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \\ \text{più ipotesi induttiva}\end{array}\right]$$

$$= a_1^3 + a_2^3 + \ \dots \ + a_n^3 \quad + \quad 2\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}\cdot a_{n+1} \quad + a_{n+1}^2 \qquad \left[\Sigma \text{ dei primi } n \text{ interi } > 0\right]$$

sottraendo $a_1^3 + a_2^3 + \ \dots \ + a_n^3$ ai due membri, ottengo

$$a_{n+1}^3 = n\cdot(n+1)\cdot a_{n+1} + a_{n+1}^2$$

$$a_{n+1}\cdot\left(a_{n+1}^2 - a_{n+1} - n^2 - n\right) = 0$$

$$a_{n+1}\cdot\left(a_{n+1}^2 - n^2 - \left(a_{n+1} + n\right)\right) = 0$$

$$a_{n+1}\cdot\left(\left(a_{n+1} + n\right)\cdot\left(a_{n+1} - n\right) - \left(a_{n+1} + n\right)\right) = 0$$

$$a_{n+1}\cdot\left(a_{n+1} + n\right)\cdot\left(a_{n+1} - n - 1\right) = 0$$

da cui $a_{n+1} = n + 1$ $\qquad \left[\begin{array}{l} a_{n+1}\cdot\left(a_{n+1}+n\right) \neq 0 \text{ , dato che } n \geq 1 \\ \text{e per l'ipotesi } a_k > 0 \text{ , } \forall k \geq 1\end{array}\right]$ ■

2) Avvalendomi delle relazioni $\sum_{k=1}^{n} k = \binom{n+1}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \binom{n+1}{3} + \binom{n+2}{3}$, e "giocando" con l'Identità di Pascal-Stifel, posso sfruttare la relazione $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \binom{n+3}{4}\cdot 3! - 2\cdot\sum_{k=1}^{n} k - 3\cdot\sum_{k=1}^{n} k^2$, di sopra incontrata, per esprimere $\sum_{k=1}^{n} k^3$ in funzione di soli coefficienti binomiali del tipo $\binom{\dots}{4}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \binom{n+3}{4}\cdot 3! - 2\cdot\sum_{k=1}^{n} k - 3\cdot\sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$= \binom{n+3}{4}\cdot 3! - 3\cdot\left(\binom{n+1}{3} + \binom{n+2}{3}\right) - 2\cdot\binom{n+1}{2}$$

$$= \binom{n+3}{4}\cdot 3! - 3\cdot\left(\binom{n+2}{4} - \binom{n+1}{4} + \binom{n+3}{4} - \binom{n+2}{4}\right) - 2\cdot\left(\binom{n+2}{3} - \binom{n+1}{3}\right)$$

$$= \binom{n+3}{4}\cdot 3! - 3\cdot\left(-\binom{n+1}{4} + \binom{n+3}{4}\right) - 2\cdot\left(\left(\binom{n+3}{4} - \binom{n+2}{4}\right) - \left(\binom{n+2}{4} - \binom{n+1}{4}\right)\right)$$

$$=(3!-3-2)\cdot\binom{n+3}{4}+4\cdot\binom{n+2}{4}+(3-2)\cdot\binom{n+1}{4}$$

$$=\binom{n+1}{4}+4\cdot\binom{n+2}{4}+\binom{n+3}{4}$$

Pertanto, $\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}=\binom{n+1}{4}+4\cdot\binom{n+2}{4}+\binom{n+3}{4}$

3) Provo l’identità $k^3=\binom{k}{3}+4\cdot\binom{k+1}{3}+\binom{k+2}{3}$, $\forall k\in\mathbb{Z}:\ k\geq 3$, in modo diretto

$$\binom{k}{3}+4\cdot\binom{k+1}{3}+\binom{k+2}{3}=\frac{k!}{3!(k-3)!}+4\cdot\frac{(k+1)!}{3!(k-2)!}+\frac{(k+2)!}{3!(k-1)!}$$

$$=\frac{k!}{3!(k-3)!}+\frac{4\cdot(k+1)\cdot k!}{3!(k-2)\cdot(k-3)!}+\frac{(k+2)\cdot(k+1)\cdot k!}{3!(k-1)\cdot(k-2)\cdot(k-3)!}$$

$$=\frac{k!(k-1)\cdot(k-2)+4\cdot(k+1)\cdot k!(k-1)+(k+2)\cdot(k+1)\cdot k!}{3!(k-1)\cdot(k-2)\cdot(k-3)!}$$

$$=\frac{k!\left(k^2-3k+2+4k^2-4+k^2+3k+2\right)}{3!(k-1)\cdot(k-2)\cdot(k-3)!}$$

$$=\frac{k!6k^2}{3!(k-1)\cdot(k-2)\cdot(k-3)!}$$

$$=\frac{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot(k-3)!k^2}{(k-1)\cdot(k-2)\cdot(k-3)!}$$

$$=k^3$$

In alternativa

$$\binom{k}{3}+4\cdot\binom{k+1}{3}+\binom{k+2}{3}=\frac{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)}{3!}+4\cdot\frac{(k+1)\cdot k\cdot(k-1)}{3!}+\frac{(k+2)\cdot(k+1)\cdot k}{3!}$$

$$=\frac{k}{3!}\cdot\left((k+1)\cdot(k-1)+4\cdot\left(k^2-1\right)+(k+2)\cdot(k+1)\right)$$

$$=\frac{k}{6}\cdot\left(k^2-3k+2+4k^2-4+k^2+3k+2\right)$$

$$=\frac{k}{6}\cdot 6k^2=k^3$$

4) Provo l’identità $\binom{n+1}{4}+4\cdot\binom{n+2}{4}+\binom{n+3}{4}=\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$, $\forall n\in\mathbb{Z}:\ n\geq 3$, in modo diretto

$$\binom{n+1}{4}+4\cdot\binom{n+2}{4}+\binom{n+3}{4}=$$

$$=\frac{(n+1)!}{4!(n-3)!}+4\cdot\frac{(n+2)!}{4!(n-2)!}+\frac{(n+3)!}{4!(n-1)!}$$

$$=\frac{(n+1)!}{4!(n-3)!}+\frac{4\cdot(n+2)\cdot(n+1)!}{4!(n-2)\cdot(n-3)!}+\frac{(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)!}{4!(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)!}$$

$$=\frac{(n+1)!(n-1)\cdot(n-2)+4\cdot(n+2)\cdot(n+1)!(n-1)+(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)!}{4!(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)!}$$

$$=\frac{(n+1)!\left(n^2-3n+2+4n^2+4n-8+n^2+5n+6\right)}{4!(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)!}$$

$$=\frac{(n+1)!\left(6n^2+6n\right)}{4!(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)!}$$

$$=\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)!6n\cdot(n+1)}{4!(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)!}$$

$$=\frac{6\cdot n^2\cdot(n+1)^2}{2\cdot 3\cdot 4}$$

$$=\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$$

In alternativa

$$\binom{n+1}{4}+4\cdot\binom{n+2}{4}+\binom{n+3}{4}=$$

$$=\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{4!}+4\cdot\frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot}{4!}+\frac{(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)\cdot n}{4!}$$

$$=\frac{(n+1)\cdot n}{4!}\left((n-1)\cdot(n-2)+4\cdot(n+2)\cdot(n-1)+(n+3)\cdot(n+2)\right)$$

$$=\frac{(n+1)\cdot n}{4!}\left(n^2-3n+2+4\cdot\left(n^2+n-2\right)+n^2+5n+6\right)$$

$$=\frac{(n+1)\cdot n}{24}\left(6n^2+6n\right)$$

$$=\frac{(n+1)^2\cdot n^2}{4}$$

5) Calcolando il progressivo d’ordine occupato nella successione dei dispari dal 1° addendo della sommatoria $\sum_{h=1}^{n}\left(n\cdot(n-1)+2h-1\right)$, vale a dire quell’intero positivo y tale che $n\cdot(n-1)+1=n^2-n+1=2y-1$, ossia $y=\frac{n\cdot(n-1)}{2}+1$, ottengo la seguente alternativa formulazione del Teorema di Nicomaco:

$$n^3=\sum_{h=\frac{n\cdot(n-1)}{2}+1}^{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}(2h-1)$$

verificabile, a sua volta, utilizzando la formula $s^2=\sum_{h=1}^{s}(2h-1)$

$$\sum_{h=\frac{n\cdot(n-1)}{2}+1}^{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}(2h-1)=\sum_{h=1}^{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}(2h-1)-\sum_{h=1}^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}(2h-1)$$

$$=\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{n\cdot(n-1)}{2}\right)^2$$

$$=\frac{n^2}{4}\cdot(n+1+n-1)\cdot(n+1-n+1)=\frac{n^2}{4}\cdot 2n\cdot 2=n^3$$

Il Teorema di Nicomaco può essere così generalizzato[4]

$$(*)\quad n^{m+2}=\sum_{h=1}^{n}\left(n\cdot\left(n^m-1\right)+2h-1\right),\ \forall m,n\in\mathbb{N}\ \text{con}\ n\geq 2$$

ossia: la potenza di ogni intero $n\geq 2$ con esponente $m+2$ è uguale alla somma degli n dispari consecutivi a partire da $n\cdot\left(n^m-1\right)+1$. Infatti:

$$\sum_{h=1}^{n}\left(n\cdot\left(n^m-1\right)+2h-1\right)=n\cdot\left(n^m-1\right)\cdot\left(\sum_{h=1}^{n}1\right)+\sum_{h=1}^{n}(2h-1)=n^2\cdot\left(n^m-1\right)+n^2=n^{m+2}$$

Nel caso particolare $m=0$ ottengo la nota formula $\sum_{h=1}^{n}(2h-1)=n^2$ (forse è per questo motivo che taluni autori attribuiscono anche questa formula a Nicomaco)[5].

Calcolando il progressivo d’ordine occupato nella successione dei dispari dal 1° e dall’ultimo addendo della sommatoria contenuta nella $(*)$, ossia quegli interi positivi x e y tali che:

[4] Fonte: Albert van Mil, *Generalized Nicomachus’s theorem*, 2006 - http://lucitworks.com/ , Snippets >> Mathematics.
[5] Cfr. pag. 71, *Proofs Without Words, Exercises in Visual Thinking*, di Roger B. Nelsen - Class Resource Materials, Published and Distributed by The Mathematical Association of America (MAA), 1993.

$$\begin{cases} n\cdot\left(n^m-1\right)+\quad 1 \quad =2x-1 \;\Rightarrow\; x=\dfrac{n\cdot\left(n^m-1\right)}{2}+1 \\[2ex] n\cdot\left(n^m-1\right)+2n-1=2y-1 \;\Rightarrow\; y=\dfrac{n\cdot\left(n^m-1\right)}{2}+n=\dfrac{n\cdot\left(n^m+1\right)}{2} \end{cases}$$

posso riscrivere la $(*)$ nel modo seguente

$$n^{m+2}=\sum_{h=\frac{n\cdot\left(n^m-1\right)}{2}+1}^{\frac{n\cdot\left(n^m-1\right)}{2}+n}\left(2h-1\right)=\sum_{h=\frac{n\cdot\left(n^m-1\right)}{2}+1}^{\frac{n\cdot\left(n^m+1\right)}{2}}\left(2h-1\right)$$

[verificabile, come già fatto nel caso $m=1$, anche tramite la formula $s^2=\sum_{h=1}^{s}\left(2h-1\right)$]

Per $m=2$ si ha

$$\begin{array}{llllllll}
1^4 & = & 1 & & & & & \\
2^4 & = & 7 & +\;9 & & & & \\
3^4 & = & 25 & +\;27 & +\;29 & & & \\
4^4 & = & 61 & +\;63 & +\;65 & +\;67 & & \\
5^4 & = & 121 & +\;123 & +\;125 & +\;127 & +\;129 & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
n^4 & = & n\cdot\left(n^2-1\right)+1 & +\;n\cdot\left(n^2-1\right)+3 & +\;n\cdot\left(n^2-1\right)+5 & +\;\ldots & \ldots & +\;n\cdot\left(n^2-1\right)+2n-1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \quad \ddots
\end{array}$$

È evidente che non tutti i dispari figurano nella soprastante somma, a differenza dello speciale caso $m=1$. Osservo, inoltre, come gli elementi di ogni riga siano simmetrici rispetto al cubo del progressivo di riga, cubo che è presente tra i suddetti elementi solo quando il progressivo di riga è dispari. Questa osservazione vale in generale. Infatti:

per n dispari *c'è un* termine centrale nella sommatoria contenuta nella $(*)$, corrispondente ad $h=\dfrac{n+1}{2}$, che è $n\cdot\left(n^m-1\right)+2\cdot\dfrac{n+1}{2}-1=n^{m+1}$

per n pari *non c'è un* termine centrale nella sommatoria contenuta nella $(*)$, e la semisomma dei due termini centrali, corrispondenti ad $h=\dfrac{n}{2}\;,\;\dfrac{n}{2}+1$, è

$$\frac{\left(n\cdot\left(n^m-1\right)+2\cdot\dfrac{n}{2}-1\right)+\left(n\cdot\left(n^m-1\right)+2\cdot\left(\dfrac{n}{2}+1\right)-1\right)}{2}=\frac{2n\cdot\left(n^m-1\right)+n-1+n+1}{2}=n^{m+1}$$

Con questa proprietà posso:

i) calcolare potenze intere usando solo la somma e le potenze precedenti (procedimento ricorsivo)

ad esempio, conoscendo $3^4=81$, calcolo 3^5

$$3^5 = \left(3^4-2\right)+3^4+\left(3^4+2\right)=79+81+83=243$$

conoscendo $6^3=216$, calcolo 6^4

$$6^4=\left(6^3-5\right)+\left(6^3-3\right)+\left(6^3-1\right)+\left(6^3+1\right)+\left(6^3+3\right)+\left(6^3+5\right)=211+213+215+217+219+221=1296$$

(è chiaro che questo procedimento risulta più suggestivo che pratico);

ii) espandere, sempre con procedimento ricorsivo, una potenza di un dispari in somma di dispari (non consecutivi), ad esempio

$$\begin{aligned}
3^5 &= \left(3^4-2\right)+3^4+\left(3^4+2\right)=79+81+83\\
&=79+\left(\left(3^3-2\right)+3^3+\left(3^3+2\right)\right)+83=79+25+27+29+83\\
&=79+25+\left(\left(3^2-2\right)+3^2+\left(3^2+2\right)\right)+29+83=79+25+7+9+11+29+83\\
&=79+25+7+\left(\left(3-2\right)+3+\left(3+2\right)\right)+11+29+83=79+25+7+1+3+5+11+29+83
\end{aligned}$$

Un modo più sistematico di vedere le stesse cose è provare il seguente teorema[6]

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall n,\, k\ge 2 \text{ interi: } n^k \text{ si può esprimere come somma di } n\\ \text{interi dispari consecutivi a partire da } n^{k-1}-n+1\end{array}}$$

<u>Dim.</u>

Considerata la somma

$(**)$ $n^k = n\cdot n^{k-1} = \underbrace{n^{k-1}+n^{k-1}+\ \dots\ +n^{k-1}}_{n \text{ volte}}$, distinguo i due casi: i) n pari e ii) n dispari

i)

Vista la $(**)$ come somma di $\dfrac{n}{2}$ coppie di termini $\left(\text{tutti } = n^{k-1}\right)$ simmetrici rispetto al centro

$$\overbrace{\underset{\left(\frac{n}{2}\right)^{a}}{n^{k-1}} + \overbrace{\underset{\left(\frac{n}{2}-1\right)^{a}}{n^{k-1}} + \ \dots\ + \overbrace{\underset{2^{a}}{n^{k-1}} + \overbrace{\underset{1^{a}}{n^{k-1}} + \underset{1^{a}}{n^{k-1}}} + \underset{2^{a}}{n^{k-1}}} + \ \dots\ + \underset{\left(\frac{n}{2}-1\right)^{a}}{n^{k-1}}} + \underset{\left(\frac{n}{2}\right)^{a}}{n^{k-1}}}$$

6 Fonte: Erzsébet Orosz, *On Odd-Summing Numbers*, Annales Mathematicae et Informaticae, Volume 31 (2004) - http://www.ektf.hu/tanszek/matematika/ami/

è chiaro che essa non varia se, $\forall k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$, sottraggo al primo termine della k-esima coppia il k-esimo dispari e, al contempo, sommo lo stesso dispari al secondo termine della stessa coppia. Pertanto, posso riscrivere la scrivere $(**)$ come segue

$$
n^k = \overbrace{\left(n^{k-1}\underbrace{-n+1}_{-\left(2\left(\frac{n}{2}\right)-1\right)}\right)}^{1^\circ\ \text{termine}} + \overbrace{\left(n^{k-1}\underbrace{-n+3}_{-\left(2\left(\frac{n}{2}-1\right)-1\right)}\right)}^{2^\circ\ \text{termine}} + \dots + \overbrace{\left(n^{k-1}\underbrace{-3}_{-(2\cdot 2-1)}\right)}^{\left(\frac{n}{2}-1\right)^\circ\ \text{termine}} + \overbrace{\left(n^{k-1}\underbrace{-1}_{-(2\cdot 1-1)}\right)}^{\left(\frac{n}{2}\right)^\circ\ \text{termine}} + \longrightarrow
$$

$$
\longleftarrow \overbrace{\left(n^{k-1}\underbrace{+n-1}_{2\left(\frac{n}{2}\right)-1}\right)}^{n^\circ\ \text{termine}} + \overbrace{\left(n^{k-1}\underbrace{+n-3}_{2\left(\frac{n}{2}-1\right)-1}\right)}^{(n-1)^\circ\ \text{termine}} + \dots + \overbrace{\left(n^{k-1}\underbrace{+3}_{2\cdot 2-1}\right)}^{\left(\frac{n}{2}+2\right)^\circ\ \text{termine}} + \overbrace{\left(n^{k-1}\underbrace{+1}_{2\cdot 1-1}\right)}^{\left(\frac{n}{2}+1\right)^\circ\ \text{termine}} +
$$

da cui rilevo che n^k è la somma di n interi dispari, in quanto ciascuno ottenuto sottraendo o sommando un dispari al pari n^{k-1} (visto che n è pari), chiaramente consecutivi e a partire da $n^{k-1} - n + 1$

<u>Esempio</u>

$$
\begin{aligned}
8^2 &= (8-7)+(8-5)+(8-3)+(8-1)+(8+1)+(8+3)+(8+5)+(8+7) \\
&= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
8^3 &= \left(8^2-7\right)+\left(8^2-5\right)+\left(8^2-3\right)+\left(8^2-1\right)+\left(8^2+1\right)+\left(8^2+3\right)+\left(8^2+5\right)+\left(8^2+7\right) \\
&= 57 + 59 + 61 + 63 + 65 + 67 + 69 + 71
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
8^4 &= \left(8^3-7\right)+\left(8^3-5\right)+\left(8^3-3\right)+\left(8^3-1\right)+\left(8^3+1\right)+\left(8^3+3\right)+\left(8^3+5\right)+\left(8^3+7\right) \\
&= 505 + 507 + 509 + 511 + 513 + 515 + 517 + 519
\end{aligned}
$$

e così via

ii)

Vista la $(**)$ come somma del termine centrale $\left(= n^{k-1}\right)$ e di $\frac{n-1}{2}$ coppie di addendi $\left(\text{tutti } = n^{k-1}\right)$ simmetrici rispetto al centrale

$$
\overbrace{\underset{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{a}}{n^{k-1}} + \overbrace{\underset{\left(\frac{n-3}{2}\right)^{a}}{n^{k-1}} + \dots + \overbrace{\underset{2^{a}}{n^{k-1}} + \overbrace{\underset{1^{a}}{n^{k-1}} + n^{k-1} + \underset{1^{a}}{n^{k-1}}} + \underset{2^{a}}{n^{k-1}}} + \dots + \underset{\left(\frac{n-3}{2}\right)^{a}}{n^{k-1}}} + \underset{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{a}}{n^{k-1}}}
$$

è chiaro che essa non varia se, $\forall k = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$, sottraggo al primo termine della k-esima coppia il k-esimo pari e, al contempo, sommo lo stesso pari al secondo termine della stessa coppia. Pertanto, posso riscrivere la scrivere $(**)$ come segue

$$
n^k = \left\langle
\begin{array}{l}
\overbrace{\left(n^{k-1}\underbrace{-n+1}_{-2\left(\frac{n-1}{2}\right)}\right)}^{1^\circ\ \text{termine}} + \overbrace{\left(n^{k-1}\underbrace{-n+3}_{-2\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)-1\right)}\right)}^{2^\circ\ \text{termine}} + \ldots + \overbrace{\left(n^{k-1}\underbrace{-4}_{-2\cdot 2}\right)}^{\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)-1\right)^\circ=\left(\frac{n-3}{2}\right)^\circ\ \text{termine}} + \overbrace{\left(n^{k-1}\underbrace{-2}_{-2\cdot 1}\right)}^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^\circ\ \text{termine}} + \\
\longrightarrow \\
\overbrace{\left(n^{k-1}\underbrace{+n-1}_{2\left(\frac{n-1}{2}\right)}\right)}^{n^\circ\ \text{termine}} + \overbrace{\left(n^{k-1}\underbrace{+n-3}_{2\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)-1\right)}\right)}^{(n-1)^\circ\ \text{termine}} + \ldots + \overbrace{\left(n^{k-1}\underbrace{+4}_{2\cdot 2}\right)}^{\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)+3\right)^\circ=\left(\frac{n+5}{2}\right)^\circ\ \text{termine}} + \overbrace{\left(n^{k-1}\underbrace{+2}_{2\cdot 1}\right)}^{\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)+2\right)^\circ=\left(\frac{n+3}{2}\right)^\circ\ \text{termine}} + \\
\longleftarrow
\end{array}
\right\rangle + \overbrace{n^{k-1}}^{\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)+1\right)^\circ = \left(\frac{n+1}{2}\right)^\circ\ \text{termine}}
$$

da cui rilevo che n^k è la somma di n interi dispari, in quanto ciascuno ottenuto sottraendo o sommando un pari al dispari n^{k-1} (visto che n è dispari), chiaramente consecutivi e a partire da $n^{k-1} - n + 1$

<u>Esempio</u>

$$
\begin{aligned}
7^2 &= (7-6)+(7-4)+(7-2)+7+(7+2)+(7+4)+(7+6) \\
&= \ \ 1 \ + \ 3 \ + \ 5 \ +7+ \ 9 \ + \ 11 \ + \ 13
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
7^3 &= (7^2-6)+(7^2-4)+(7^2-2)+7^2+(7^2+2)+(7^2+4)+(7^2+6) \\
&= \ \ 43 \ + \ 45 \ + \ 47 \ +49+ \ 51 \ + \ 53 \ + \ 55
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
7^4 &= (7^3-6)+(7^3-4)+(7^3-2)+\ 7^3\ +(7^3+2)+(7^3+4)+(7^3+6) \\
&= \ \ 337 \ + \ 339 \ + \ 341 \ +343+ \ 345 \ + \ 347 \ + \ 349
\end{aligned}
$$

e così via ■

ES-024

a) Se $x+y=30$ e $x^3+y^3=8100$, quanto vale x^2+y^2 ?

b) Se $y \neq x$, $xy=-6$ e $x^3-x=y^3-y$, quanto vale x^2+y^2 ?

a)

La risposta è 480 .

Uso l’identità $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy\cdot(x+y)$ [II Identità (o Formula) di Waring]

$$
\begin{aligned}
xy &= \frac{(x+y)^3-(x^3+y^3)}{3(x+y)} \\
&= \frac{30^3-8100}{3\cdot 30} \\
&= \frac{3^3\cdot 10^3-3^4\cdot 10^2}{3^2\cdot 10} \\
&= \frac{3^2\cdot 10^2\cdot(3\cdot 10-3^2)}{3^2\cdot 10} \\
&= 10\cdot(30-9)=10\cdot 21=210
\end{aligned}
$$

poi, uso l’identità $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ [I Identità (o Formula) di Waring]

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2 &= 30^2-2\cdot 10\cdot 21 \\
&= 3^2\cdot 10^2-2\cdot 10\cdot 3\cdot 7 \\
&= 3\cdot 10\cdot(30-14) \\
&= 30\cdot 16=3\cdot 16\cdot 10=480
\end{aligned}
$$

b)

La risposta è 7 .

$$x^3-x=y^3-y$$

$$x^3-y^3=x-y$$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=x-y$$

$$x^2+xy+y^2=1 \qquad [x-y\neq 0 \text{ per ipotesi}]$$

$$x^2-6+y^2=1 \Rightarrow x^2+y^2=7$$

PSd+

1) Potrei proseguire calcolando i valori di x e y

a) $\begin{cases} x+y=30 \\ x\cdot y=210 \end{cases}$

trattandosi di sistema simmetrico elementare, risolvo l'equazione $t^2-30t+210=0$ nell'incognita ausiliaria t, ricavando $t=15\pm\sqrt{225-210}=15\pm\sqrt{15}$, e quindi le due soluzioni tra loro simmetriche

$$\left(x_1=15-\sqrt{15}\ ;\ y_1=15+\sqrt{15}\right)\ ,\ \left(x_2=15+\sqrt{15}\ ;\ y_2=15-\sqrt{15}\right)$$

b) $\begin{cases} x^2+y^2=7 \\ x\cdot y=-6 \end{cases} \to \begin{cases} x^2+y^2-2xy=7-2(-6) \\ x\cdot y=-6 \end{cases} \to \begin{cases} (y-x)^2=19 \\ x\cdot y=-6 \end{cases} \to \begin{cases} y-x=\pm\sqrt{19} \\ x\cdot y=-6 \end{cases}$

da cui i due sistemi:

$$1)\ \begin{cases} y=x-\sqrt{19} \\ x^2-\sqrt{19}x+6=0 \end{cases} \to \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{19}\pm\sqrt{5}\,i}{2} \\ y=\dfrac{-\sqrt{19}\pm\sqrt{5}\,i}{2} \end{cases} \begin{array}{l} \left(x_1=+\dfrac{\sqrt{19}}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}i\ ;\ y_1=-\dfrac{\sqrt{19}}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}i\right) \\ \left(x_2=+\dfrac{\sqrt{19}}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}i\ ;\ y_2=-\dfrac{\sqrt{19}}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}i\right) \end{array}$$

$$2)\ \begin{cases} y=x+\sqrt{19} \\ x^2+\sqrt{19}x+6=0 \end{cases} \to \begin{cases} x=\dfrac{-\sqrt{19}\pm\sqrt{5}\,i}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{19}\pm\sqrt{5}\,i}{2} \end{cases} \begin{array}{l} \left(x_3=-\dfrac{\sqrt{19}}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}i\ ;\ y_3=+\dfrac{\sqrt{19}}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}i\right) \\ \left(x_4=-\dfrac{\sqrt{19}}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}i\ ;\ y_4=+\dfrac{\sqrt{19}}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}i\right) \end{array}$$

Le 4 soluzioni sono simmetriche (simmetrico è il sistema di partenza): $(x_1\ ;y_1)$ con $(x_3\ ;y_3)$ e $(x_2\ ;y_2)$ con $(x_4\ ;y_4)$. Inoltre, $(x_1\ ;y_1)=-(y_2\ ;x_2)=\left(\overline{x_2}\ ;\ \overline{y_2}\right)$ e $(x_3\ ;y_3)=-(y_4\ ;x_4)=\left(\overline{x_4}\ ;\ \overline{y_4}\right)$

2) Le Identità (o Formule) di Waring[1]

Consentono di esprimere *la somma di due potenze simili*, x^n+y^n, $\forall n>0$ intero, *in funzione della somma e del prodotto delle due basi*, x *e* y. Le prime 10 Identità di Waring sono:

I	$x^2+y^2=s^2-2p$
II	$x^3+y^3=s^3-3sp$
III	$x^4+y^4=s^4-4s^2p+2p^2$

[1] Edward Waring (1736-1798), matematico britannico.

IV	$x^5+y^5=s^5-5s^3p+5sp^2$
V	$x^6+y^6=s^6-6s^4p+9s^2p^2-2p^3$
VI	$x^7+y^7=s^7-7s^5p+14s^3p^2-7sp^3$
VII	$x^8+y^8=s^8-8s^6p+20s^4p^2-16s^2p^3+2p^4$
VIII	$x^9+y^9=s^9-9s^7p+27s^5p^2-30s^3p^3+9sp^4$
IX	$x^{10}+y^{10}=s^{10}-10s^8p+35s^6p^2-50s^4p^3+25s^2p^4-2p^5$
X	$x^{11}+y^{11}=s^{11}-11s^9p+44s^7p^2-77s^5p^3+55s^3p^4-11sp^5$

Il polinomio a 2° membro, detto *Polinomio di Waring*, è omogeneo di grado n rispetto alle variabili $s=x+y$ e $p=x\cdot y$, dette *funzioni simmetriche elementari* (o *fondamentali*) *di* x *e* y, purché si consideri p già di 2° grado, ordinato secondo le potenze crescenti di p, da 0 ad $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ [ove $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ è la parte intera di $\frac{n}{2}$], e decrescenti di 2 in 2 di s, da n fino a 1 oppure 2 a seconda che n sia rispettivamente dispari o pari, con segni alterni iniziando con $+$, e con coefficienti interi ricavabili con il seguente array detto *Triangolo di Martino*[2]

2	◇	**2**	◇	**2**	◇	**2**	◇	**2**	◇	…
	1	◇	**3**	◇	**5**	◇	**7**	◇	**9**	…
		1	◇	**4**	◇	**9**	◇	**16**	◇	…
			1	◇	**5**	◇	**14**	◇	**30**	…
				1	◇	**6**	◇	**20**	◇	…
					1	◇	**7**	◇	**27**	…
						1	◇	**8**	◇	…
							1	◇	**9**	…
								1	◇	…
									1	…
										⋱
x^0+y^0	$x+y$	x^2+y^2	x^3+y^3	x^4+y^4	x^5+y^5	x^6+y^6	x^7+y^7	x^8+y^8	x^9+y^9	…

Si scrive una linea orizzontale di 2 alternati da spazi vuoti o riempiti con un separatore qualsiasi, ad esempio ◇ ;

si scrive una linea diagonale di 1 a partire dal primo 2 a sinistra;

a partire dalla terza colonna in poi, sommando ad un qualsiasi numero, ad eccezione degli 1 in diagonale, quello sottostante a sinistra si ottiene il numero sottostante a destra;

i numeri contenuti nelle colonne cominciando dal basso sono i moduli dei coefficienti dei polinomi di Waring.

$x^0+y^0=2$ e $x+y$ sono presenti solo per completezza; le Identità di Waring propriamente dette iniziano da x^2+y^2

3) La formula generale per le Identità di Waring

$\forall n>1$ intero, il binomio x^n+y^n (simmetrico e omogeneo di grado n rispetto ad x e y) si può esprimere come un polinomio a coefficienti interi in $s=x+y$ e $p=x\cdot y$

risultando $$x^n+y^n=\sum_{h=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\left((-1)^h\cdot\frac{n}{n-h}\cdot\binom{n-h}{h}\cdot s^{n-2h}\cdot p^h\right)$$ [ove $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ è la parte intera di $\frac{n}{2}$]

[2] Trovato su un testo delle superiori di qualche decennio fa, di cui, purtroppo, non ricordo l'autore.

Dim.

Considero x e y come radici dell'equazione di $2°$ grado $t^2 - s\cdot t + p = 0$

quindi $x = \dfrac{s-\sqrt{s^2-4p}}{2}$ e $y = \dfrac{s+\sqrt{s^2-4p}}{2}$, da cui, tramite lo sviluppo binomiale, ricavo

$$x^n + y^n = \frac{\left(s-\sqrt{s^2-4p}\right)^n + \left(s+\sqrt{s^2-4p}\right)^n}{2^n}$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\cdot s^{n-k}\cdot\left(-\sqrt{s^2-4p}\right)^k\right] + \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}s^{n-k}\cdot\left(\sqrt{s^2-4p}\right)^k\right]}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2^n}\cdot\sum_{k=0}^{n}\left\{\binom{n}{k}\cdot s^{n-k}\cdot\left[\left(-\sqrt{s^2-4p}\right)^k + \left(\sqrt{s^2-4p}\right)^k\right]\right\}$$

dato che tutti i termini per k dispari sono nulli, se per gli altri adotto la sostituzione $k = 2h$, ottengo

$$x^n + y^n = \frac{1}{2^n}\cdot\sum_{h=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\left\{\binom{n}{2h}\cdot s^{n-2h}\cdot\left[\left(-\sqrt{s^2-4p}\right)^{2h} + \left(\sqrt{s^2-4p}\right)^{2h}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2^n}\cdot\sum_{h=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\left\{\binom{n}{2h}\cdot s^{n-2h}\cdot 2\cdot\left(\sqrt{s^2-4p}\right)^{2h}\right\}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\sum_{h=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\left\{\binom{n}{2h}\cdot s^{n-2h}\cdot\left(s^2-4p\right)^h\right\}$$

[a questo punto ho risposto alla parte della tesi affermante che $x^n + y^n$ si può esprimere come un polinomio in s e p, dato che l'espressione ottenuta dà senz'altro luogo ad un polinomio in s e p (e a coefficienti sicuramente in $\mathbb{Q}$) ; da adesso in poi proseguo per arrivare ad esprimere il termine generico della Σ come effettivo (esplicito) monomio in s e p e il cui coefficiente sia manifestamente intero]

$$= \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\sum_{h=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\left(\binom{n}{2h}\cdot s^{n-2h}\cdot\sum_{j=0}^{h}\left(\binom{h}{j}\cdot\left(s^2\right)^{h-j}\cdot(-4p)^j\right)\right)$$

[sviluppo binomiale di $\left(s^2-4p\right)^h$]

$$= \sum_{h=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\binom{n}{2h}\cdot s^{n-2h}\cdot\sum_{j=0}^{h}\left((-1)^j\cdot 2^{2j}\cdot\binom{h}{j}\cdot s^{2h-2j}\cdot p^j\right)\right)$$

[trasporto dentro la Σ esterna il fattore $\frac{1}{2^{n-1}}$ perché è indipendente dall'indice h]

$$=\sum_{h=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\left(\sum_{j=0}^{h}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\binom{n}{2h}\cdot s^{n-2h}\cdot(-1)^j\cdot 2^{2j}\cdot\binom{h}{j}\cdot s^{2h-2j}\cdot p^j\right)\right) \qquad \left[\begin{array}{l}\text{trasporto dentro la } \Sigma \text{ interna il} \\ \text{fattore } \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\binom{n}{2h}\cdot s^{n-2h} \text{ perché} \\ \text{è indipendente dall'indice } j\end{array}\right]$$

$$=\sum_{h=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\left(\sum_{j=0}^{h}\left((-1)^j\cdot 2^{2j-n+1}\cdot\binom{n}{2h}\cdot\binom{h}{j}\cdot s^{n-2j}\cdot p^j\right)\right)$$

$$=\sum_{h=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\left(\sum_{j=h}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\left((-1)^h\cdot 2^{2h-n+1}\cdot\binom{n}{2j}\cdot\binom{j}{h}\cdot s^{n-2h}\cdot p^h\right)\right) \qquad \left[\begin{array}{l}\text{uso l'identità } \sum_{h=0}^{m}\left(\sum_{j=0}^{h}a_{hj}\right)=\sum_{h=0}^{m}\left(\sum_{j=h}^{m}a_{jh}\right) \\ \text{in particolare:} \\ \cdot\ \text{cambio gli estremi della } \Sigma \text{ interna} \\ \quad \text{che passano da } 0\nearrow h \text{ ad } h\nearrow m \\ \cdot\ \text{il passaggio } a_{hj}\to a_{jh} \text{ significa che} \\ \quad \text{scambio gli indici nel termine generico}\end{array}\right]$$

$$=\sum_{h=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\left((-1)^h\cdot 2^{2h-n+1}\cdot s^{n-2h}\cdot p^h\cdot\sum_{j=h}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\left(\binom{n}{2j}\cdot\binom{j}{h}\right)\right) \qquad \left[\begin{array}{l}\text{trasporto fuori dalla } \Sigma \text{ interna} \\ \text{il fattore } (-1)^h\cdot 2^{2h-n+1}\cdot s^{n-2h}\cdot p^h \\ \text{perché è indipendente dall'indice } j\end{array}\right]$$

$$=\sum_{h=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\left((-1)^h\cdot 2^{2h-n+1}\cdot s^{n-2h}\cdot p^h\cdot 2^{n-2h-1}\cdot\frac{n}{n-h}\binom{n-h}{h}\right) \qquad \left[\begin{array}{l}\text{uso l'identità} \\ \sum_{j=h}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\left(\binom{n}{2j}\cdot\binom{j}{h}\right)=2^{n-2h-1}\cdot\frac{n}{n-h}\binom{n-h}{h}\end{array}\right]$$

$$=\sum_{h=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\left((-1)^h\cdot\frac{n}{n-h}\cdot\binom{n-h}{h}\cdot s^{n-2h}\cdot p^h\right)$$

La sommatoria così ottenuta è un polinomio in s e p a coefficienti di segno alterno, dovuto al fattore $(-1)^h$, iniziando dal $+$ (per $h=0$), e interi, essendo tali i coefficienti binomiali e valendo l'identità

$$\frac{n}{n-h}\binom{n-h}{h}=\binom{n-h}{h}+\binom{n-h-1}{h-1}$$

Infatti, tramite la Regola di Assorbimento $\binom{m}{k}=\frac{m}{k}\cdot\binom{m-1}{k-1}$, con $m=n-h$ e $k=h$, ricavo

$$\binom{n-h}{h}=\frac{n-h}{h}\cdot\binom{n-h-1}{h-1} \Rightarrow \frac{h}{n-h}\cdot\binom{n-h}{h}=\binom{n-h-1}{h-1} \Rightarrow \frac{n+h-n}{n-h}\cdot\binom{n-h}{h}=\binom{n-h-1}{h-1} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{n}{n-h}-1\right)\cdot\binom{n-h}{h}=\binom{n-h-1}{h-1} \Rightarrow \frac{n}{n-h}\binom{n-h}{h}=\binom{n-h}{h}+\binom{n-h-1}{h-1}$$

■

4) Per verificare l'identità $\sum_{h=0}^{m}\left(\sum_{j=0}^{h} a_{hj}\right)=\sum_{h=0}^{m}\left(\sum_{j=h}^{m} a_{jh}\right)$, valida in un qualsiasi anello A, basta osservare la seguente configurazione matriciale delle due doppie sommatorie (e tener conto delle proprietà associativa e commutativa della somma di A), per constatare che esse sono costituite dagli stessi addendi (ordinati e raggruppati in differenti modi), essendo le due matrici una trasposta dell'altra

$$
\begin{array}{lllllllll}
\sum_{h=0}^{m}\left(\sum_{j=0}^{h} a_{hj}\right)= & a_{00} & & & & & & & + \\
& a_{10} & + a_{11} & & & & & & + \\
& a_{20} & + a_{21} & + a_{22} & & & & & + \\
& \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & & \vdots \\
& a_{(m-1)0} & + a_{(m-1)1} & + a_{(m-1)2} & + & \ldots & + a_{(m-1)(m-1)} & & + \\
& a_{m0} & + a_{m1} & + a_{m2} & + & \ldots & + a_{m(m-1)} & + a_{mm} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllll}
\sum_{h=0}^{m}\left(\sum_{j=h}^{m} a_{jh}\right)= & a_{00} & + a_{10} & + a_{20} & + \ldots + & a_{(m-1)0} & + a_{m0} & + \\
& & a_{11} & + a_{21} & + \ldots + & a_{(m-1)1} & + a_{m1} & + \\
& & & + a_{22} & + \ldots + & a_{(m-1)2} & + a_{m2} & + \\
& & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
& & & & & a_{(m-1)(m-1)} & + a_{m(m-1)} & + \\
& & & & & & a_{mm} &
\end{array}
$$

5) Per una dimostrazione della "tosta" identità

$$\sum_{j=h}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\left(\binom{n}{2j}\cdot\binom{j}{h}\right)=2^{n-2h-1}\cdot\frac{n}{n-h}\binom{n-h}{h}\ ,\ \text{valida}\ \ \forall n,h\in\mathbb{Z}:\ n>0\ ,\ 0\le h\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$$

che fa uso della teoria delle cosiddette *funzioni generatrici*, vedi la formula (3.120) a pag. 84 del Chap. 2 "Gould's Combinatorial Identities" dell'esoterico testo del prof. Renzo Sprugnoli, del Dipartimento di Sistemi e Informatica dell'Università di Firenze, dal titolo *Riordan Array Proofs of Identities in Gould's Book* (del 7 febbraio 2006) per la cui lettura sono necessari alcuni supporti teorici, riportati, ad esempio, nell'altro importante testo dello stesso autore dal titolo *An Introduction to Mathematical Methods in Combinatorics* (del 18 gennaio 2006). Entrambi questi testi sono disponibili online all'indirizzo http://www.dsi.unifi.it/~resp/

Mi chiedo come possa essere una dimostrazione della suddetta identità per "semplice" Induzione!

ES-109

Determinare tutte le coppie $(m\ ;\ n)$ di interi positivi per le quali $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ è un intero

[Problem 4 Second Day, The Thirty-Fifth IMO (International Mathematical Olympiads), 1994, Hong Kong]

I soluzione

Essendo m ed n interi entrambi >0, la frazione $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ è sempre positiva purché $(m\ ;\ n)\neq(1\ ;\ 1)$.

Inizio a provare con i primi valori di n.

- Per $n=1$ si ha che $\dfrac{n^3+1}{mn-1}=\dfrac{1^3+1}{m-1}=\dfrac{2}{m-1}$ è intero se e solo se:

$$(m-1=1)\vee(m-1=2)\ \Leftrightarrow\ (m=2)\vee(m=3)$$

e dunque le due soluzioni $(2\ ;\ 1)$ e $(3\ ;\ 1)$.

- Per $n=2$ si ha che $\dfrac{n^3+1}{mn-1}=\dfrac{2^3+1}{2m-1}=\dfrac{9}{2m-1}$ è intero se e solo se:

$$(2m-1=1)\vee(2m-1=3)\vee(2m-1=9)\ \Leftrightarrow\ (m=1)\vee(m=2)\vee(m=5)$$

e dunque le tre soluzioni $(1\ ;\ 2)$, $(2\ ;\ 2)$ e $(5\ ;\ 2)$.

- Per $n=3$ si ha che $\dfrac{n^3+1}{mn-1}=\dfrac{3^3+1}{mn-1}=\dfrac{28}{3m-1}=\dfrac{7\cdot 2^2}{3m-1}$ è intero se e solo se:

$$\begin{array}{cccccc}
(3m-1=1)\ \vee & (3m-1=2)\vee & (3m-1=4)\ \vee & (3m-1=7)\ \vee & (3m-1=14)\vee & (3m-1=28)\\
\Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow\\
\left(m=\dfrac{2}{3}\notin\mathbb{Z}\right)\vee & (m=1) & \vee\left(m=\dfrac{5}{3}\notin\mathbb{Z}\right)\vee & \left(m=\dfrac{8}{3}\notin\mathbb{Z}\right)\vee & (m=5) & \vee\left(m=\dfrac{29}{3}\notin\mathbb{Z}\right)
\end{array}$$

e dunque le due soluzioni $(1\ ;\ 3)$ e $(5\ ;\ 3)$.

- Per $n=4$ si ha che $\dfrac{n^3+1}{mn-1}=\dfrac{4^3+1}{4m-1}=\dfrac{65}{4m-1}=\dfrac{5\cdot 13}{4m-1}$ è intero se e solo se:

$$\begin{array}{ccccccc}(4m-1=1) & \vee & (4m-1=5) & \vee & (4m-1=13) & \vee & (4m-1=65)\\ \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \left(m=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}\right) & \vee & \left(m=\frac{3}{2}\notin\mathbb{Z}\right) & \vee & \left(m=\frac{7}{2}\notin\mathbb{Z}\right) & \vee & \left(m=\frac{33}{2}\notin\mathbb{Z}\right)\end{array}$$

e dunque nessuna soluzione.

È chiaro, però, che così non posso continuare, dato che, oltre a complicarsi i calcoli al crescere di n, non ho alcuna garanzia di scovare *tutte le soluzioni in un tempo finito*.

Pertanto, d’ora in poi suppongo che esistano m, n e k interi positivi tali che $n>4$ e $\dfrac{n^3+1}{mn-1}=k$.

Dunque $n^3+1=k(mn-1) \Rightarrow k=kmn-n^3-1=n\left(km-n^2\right)-1 \Rightarrow k\equiv -1 \pmod n$.

Posto, perciò, $k+1=hn$, per un opportuno h intero >0 $\left(\text{visto che } k>0\text{, ed } n>0\text{, perché } n>4\right)$, e sostituendo $hn-1$ a k in $n^3+1=k(mn-1)$, ottengo:

$n^3+1=(hn-1)(mn-1)=mhn^2-(m+h)n+1$, cioè

i) $\quad n^2=mhn-(m+h)$

da cui, per la linearità della relazione di divisibilità, deve risultare $n\,|\,m+h$, cioè $nt=m+h$, per un opportuno intero $t>0$ $\left(\text{visto che } m,\ n \text{ ed } h \text{ sono interi } >0\right)$.

- Per $t=1$, cioè $m+h=n$, la i) diventa:

i_1) $\quad n=mh-1 \Leftrightarrow n+1=m(n-m)$, che a sua volta

per $n-m=1$, diventa $n+1=m\cdot 1=(n-1)\cdot 1=n-1$, da cui l’assurdo $1=-1$;

per $n-m=2$, diventa $n+1=m\cdot 2=(n-2)\cdot 2$, cioè $n=5$, e dunque la soluzione $(3\,;\,5)$;

per $n-m=3$, diventa $n+1=m\cdot 3=(n-3)\cdot 3$, cioè $n=5$, e dunque la soluzione $(2\,;\,5)$;

per $n-m>3$, diventa impossibile in quanto:

per $m\geq h$, e quindi $m\geq \dfrac{n}{2}$ $\left(\text{essendo } m+h=n\right)$, si ottiene la seguente disuguaglianza

$n+1=m(n-m)\geq \dfrac{n}{2}\cdot(n-m)>\dfrac{n}{2}\cdot 3=n+\overbrace{\dfrac{n}{2}>n+\dfrac{4}{2}}^{n>4}>n+2>n+1$, ossia l’assurdo $n+1>n+1$, mentre per $0 < m < h$, e quindi $0 < m < \frac{n}{2}$ $\left(\text{essendo sempre } m + h = n\right)$, scritta la i_1) nella forma $m^2 - mn + n + 1 = 0$, e studiatala come equazione nell'incognita m, si ha che $\Delta = n^2 - 4n - 4 \geq 0$ per $\left(n \leq 2 - 2\sqrt{2} \approx -0,83\right) \vee \left(n \geq 2 + 2\sqrt{2} \approx +4,83\right)$ e, inoltre, la sequenza dei coefficienti $+1$, $-n$ e $n+1$ mostra due variazioni di segno $\left(\text{essendo } n > 0, \text{ perché } n > 4\right)$, cosicché, con l'assunto $n > 4$ intero, le due soluzioni, m_1 e m_2, sono reali distinte ed entrambe positive, e questo rende impossibile la relazione di Viète $m_1 + m_1 = n$ con m ed n $\left(\text{interi}\right)$ tali che $0 < m < \frac{n}{2}$. In alternativa, quest'ultimo caso, $0 < m < \frac{n}{2}$, si può affrontare ragionando con m in modo analogo a quanto fatto in precedenza con $n - m$; in particolare la i_1):

per $m = 1$, diventa $n+1 = 1\cdot\left(n-1\right)$, da cui l'assurdo $1 = -1$;

per $m = 2$, diventa $n+1 = 2\cdot\left(n-2\right)$, cioè $n = 5$, e dunque la soluzione $\left(2\ ;\ 5\right)$;

per $m = 3$, diventa $n+1 = 3\cdot\left(n-3\right)$, cioè $n = 5$, e dunque la soluzione $\left(3\ ;\ 5\right)$;

per $m > 3$, diventa impossibile in quanto:

$0 < m < \frac{n}{2} \Rightarrow n - m > n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$, da cui la disuguaglianza

$$n+1 = m\left(n-m\right) > 3\cdot\left(n-m\right) > 3\cdot\frac{n}{2} = n + \overbrace{\frac{n}{2} > n + \frac{4}{2}}^{n\,>\,4} > n+2 > n+1$$, ossia l'assurdo $n+1 > n+1$

- Per $t = 2$, cioè $m + h = 2n$, la $i)$ diventa:

i_2) $\quad n = mh - 2 \Leftrightarrow n + 2 = m\left(2n - m\right)$, che a sua volta

per $2n - m = 1$, diventa $n+2 = m\cdot 1 = \left(2n-1\right)\cdot 1$, da cui $n = 3$, contro l'ipotesi $n > 4$;

per $2n - m \geq 2$, diventa impossibile in quanto:

per $m \geq h$, e quindi $m \geq n$ $\left(\text{essendo } m + h = 2n\right)$, si ottiene la seguente disuguaglianza $n + 2 = m\left(2n - m\right) \geq n\left(2n - m\right) \geq n \cdot 2 = n + \overbrace{n > n + 4}^{n\,>\,4} > n + 2$, ossia l'assurdo $n + 2 > n + 2$, mentre

per $0 < m < h$, e quindi $0 < m < n$ $\left(\text{essendo sempre } m + h = 2n\right)$, scritta la i_2) nella forma $m^2 - 2mn + n + 2 = 0$ e utilizzato lo stesso ragionamento del caso precedente, si ha che la relazione di Viète $m_1 + m_1 = 2n$ diventa impossibile con m ed n $\left(\text{interi}\right)$ tali che $0 < m < n$. In alternativa, quest'ultimo caso, $0 < m < n$, si può affrontare ragionando con m in modo analogo a quanto fatto in precedenza con $2n - m$; in particolare la i_2):

per $m = 1$, diventa $n+2 = 1\cdot\left(2n-1\right)$, da cui $n = 3$, contro l'ipotesi $n > 4$;

per $m \geq 2$, diventa impossibile in quanto:

$0 < m < n \;\Rightarrow\; -m > -n \;\Rightarrow\; 2n - m > 2n - n = n$, da cui la disuguaglianza

$$n + 2 = m(2n - m) \geq 2(2n - m) > 2n = n + \overbrace{n > n + 4}^{n>4} > n + 2$$, ossia l'assurdo $n + 2 > n + 2$

- Per $t \geq 3$, cioè $m + h \geq 3n$, si ha:

$$m + h \geq 3n = n + n + \overbrace{n > n + n + 4}^{n>4} = n + 2 + n + 2 \;\Rightarrow\; (m \geq n + 2) \vee (h \geq n + 2)$$

Se $m \geq n + 2$, allora dalla i), riscritta nella forma $n^3 + 1 = (hn - 1)(mn - 1)$, ricavo

$$n^3 + 1 = \underbrace{(hn - 1)(mn - 1) \geq (n - 1)}_{h>0 \;\Rightarrow\; h \geq 1 \;\Rightarrow\; hn \geq n}((n + 2)n - 1) = n^3 + 1 + \underbrace{n(n - 3) > n^3 + 1 + 4 \cdot 1}_{n>4\text{, e quindi anche } n-3>1} > n^3 + 5 > n^3 + 1$$

vale a dire l'assurdo $n^3 + 1 > n^3 + 1$

Se $h \geq n + 2$, allora $n^3 + 1 = (hn - 1)\underbrace{(mn - 1) \geq ((n + 2)n - 1)(n - 1)}_{m,\, n \;\geq 1 \;\Rightarrow\; mn \geq n}$

e dunque lo stesso assurdo di sopra.

Avendo esaurito tutta la casistica, concludo dicendo che le coppie $(m\,;n)$ di interi che rendono intera la frazione $\dfrac{n^3 + 1}{mn - 1}$ sono, nell'ordine in cui sono state trovate, le seguenti 9:

$(2\,;1)$, $(3\,;1)$

$(1\,;2)$, $(2\,;2)$, $(5\,;2)$

$(1\,;3)$, $(5\,;3)$

$(3\,;5)$, $(2\,;5)$

II soluzione

Osservo che $mn - 1$ e m^3 sono coprimi. Infatti, $(-1)(mn - 1) + mn = 1$ (Identità di Bezout), da cui $\mathrm{MCD}(mn - 1\,;m) = 1$, e quindi $\mathrm{MCD}(mn - 1\,;m^k) = 1$, $\forall k \geq 2$. Pertanto si ha:

$$mn - 1 \mid n^3 + 1 \;\Leftrightarrow\; mn - 1 \mid m^3(n^3 + 1)$$ $\left[\begin{array}{l}\text{la } \Rightarrow \text{ è ovvia, mentre} \\ \text{la } \Leftarrow \text{ è conseguenza del Lemma di Euclide}\end{array}\right]$

mentre, scrivendo $m^3(n^3 + 1) = m^3n^3 - 1 + m^3 + 1 = (mn - 1)(m^2n^2 + mn + 1) + m^3 + 1$, risulta che:

$$mn - 1 \mid m^3(n^3 + 1) \;\Leftrightarrow\; mn - 1 \mid m^3 + 1$$

cosicché, per transitività, segue che

$$mn-1 \mid n^3+1 \iff mn-1 \mid m^3+1$$

La simmetria sancita da quest’ultima equivalenza (ossia m ed n interscambiabili) mi consente di ricercare le soluzioni intere che rendono intera la frazione $\frac{n^3+1}{mn-1}$ limitandomi ai due soli casi $m=n$ ed $m>n$, giacché quelle del secondo sono esattamente le simmetriche di quelle che rendono intera la frazione simmetrica $\frac{m^3+1}{mn-1}$ proprio nel caso mancante $n>m$.

Se $m=n$, allora $\frac{n^3+1}{mn-1}=\frac{n^3+1}{n^2-1}=\frac{(n+1)(n^2-n+1)}{(n+1)(n-1)}=\frac{n(n-1)+1}{n-1}=n+\frac{1}{n-1}$ è intero se e solo se $n-1=1$, e quindi la soluzione $(2\,;2)$.

Per $m>n$ distinguo i due sottocasi: $m>n=1$ ed $m>n\ge 2$.

Se $m>n=1$, allora $\frac{n^3+1}{mn-1}=\frac{2}{m-1}$ è intero se e solo se $(m-1=1)\vee(m-1=2)$, e dunque le due soluzioni $(2\,;1)$ e $(3\,;1)$ $[$e quindi anche le simmetriche $(1\,;2)$ e $(1\,;3)$, attinenti il caso $1=m<n]$.

Se $m>n\ge 2$, sia $k\in\mathbb{Z}$: $\frac{n^3+1}{mn-1}=k$, cioè $n^3+1=k(mn-1)$. Vediamo di valutare un siffatto k.

- Anzitutto osservo che $k>0$, cioè $k\ge 1$, dato che la frazione $\frac{n^3+1}{mn-1}$ è sempre positiva per m ed n interi entrambi >0, purché $(m\,;n)\ne(1\,;1)$
- Poi confronto k con n tramite lo studio del segno dell’espressione $(n-k)(mn-1)$ e ben sapendo che $mn-1>0$:

$$\begin{aligned}
(n-k)(mn-1) &= n(mn-1)-k(mn-1) \\
&= n(mn-1)-n^3+1 && [\text{ipotesi } n^3+1=k(mn-1)] \\
&= mn^2-n^3-n+1 \\
&= n^2(m-n)-n+1 \\
&> n^2-n+1 && [\text{ipotesi } m-n>0] \\
&\ge 2^2-2+1 && [\text{ipotesi } n\ge 2] \\
&= 3
\end{aligned}$$

Dunque $(n-k)(mn-1)>0$, e siccome $mn-1>0$, ne deduco allora che $n-k>0$, cioè $k<n$.

Sin qui, pertanto, ho ottenuto che $0 < k < n$.

- Ora cerco una minorazione di k in funzione di n. A tale scopo, scritta l’ipotesi $n^3+1=k(mn-1)$ nella forma $n(km-n^2)=k+1$, e osservato che:

$$n > k > 0 \Rightarrow (n>0)\wedge(k+1>0) \Rightarrow km-n^2>0 \text{, cioè } km-n^2 \geq 1$$

ne deduco che $n = n\cdot 1 \leq n(km-n^2)=k+1$, vale a dire $n-1\leq k$.

Ho ottenuto, quindi, che $n-1\leq k<n$, e ciò comporta, essendo k un intero, che $k=n-1$.

Sostituisco $n-1$ a k in $n^3+1=k(mn-1)$ ed esplicito rispetto ad m:

$$n^3+1=mn(n-1)-(n-1) \Rightarrow mn(n-1)=n^3+n \Rightarrow m=\frac{n^2+1}{n-1}$$

Visto che m è intero, ho allora che $n-1|n^2+1$, e visto che, banalmente, è $n-1|n^2-1$, ne ricavo, per linearità della relazione di divisibilità, che $n-1|n^2+1-(n^2-1)=2 \Rightarrow n-1\leq 2$. D’altra parte, l’ipotesi $n\geq 2$ implica che $n-1\geq 1$, cosicché $1\leq n-1\leq 2 \Rightarrow (n-1=1)\vee(n-1=2)$, vale a dire $(n=2)\vee(n=3)$, cui corrisponde lo stesso $m=\frac{2^2+1}{2-1}=\frac{3^2+1}{3-1}=5$, e dunque le due soluzioni $(5\,;2)$ e $(5\,;3)$ [e quindi anche le simmetriche $(2\,;5)$ e $(3\,;5)$, attinenti il caso $n>m\geq 2$]

In conclusione, le coppie $(m\,;n)$ intere che rendono intera la frazione $\frac{n^3+1}{mn-1}$ sono, nell’ordine in cui sono state trovate, le seguenti 9:

$(2\,;2)$

$(2\,;1)$, $(3\,;1)$ e le simmetriche $(1\,;2)$, $(1\,;3)$

$(5\,;2)$, $(5\,;3)$ e le simmetriche $(2\,;5)$, $(3\,;5)$