1. Serie numeriche: le nozioni più antiche sulle serie. Lettura e commento di testi

Una prima introduzione alle serie deve tenere conto che una somma di infiniti addendi viene spesso intuitivamente recepita dagli allievi come "infinitamente grande". La storia della matematica può aiutarci ad orientare correttamente gli allievi; in particolare, possiamo riferirci a Zenone d'Elea (490-430 a.C.) e al celebre paradosso di Achille e della Tartaruga: la sua analisi, com'è noto, porta alla considerazione di una serie geometrica *convergente*. Questo esempio può essere didatticamente utile: in esso viene implicitamente presentata un'addizione con infiniti addendi la cui somma non potrà mai superare, per quanti addendi siano considerati, un numero finito.

Possono però sorgere alcuni equivoci: ad esempio, qualche allievo potrebbe notare che gli addendi così sommati sono "sempre più piccoli" (indefinitamente piccoli): e c'è il rischio di interpretare tale condizione (che prevede che il termine generale sia infinitesimo) come *sufficiente* affinché una serie sia convergente.

NEC

Per evitare la formazione di questa errata concezione, come vedremo, potrà essere utile un altro esempio tratto dalla storia: la serie armonica, la cui divergenza è stata provata nel XIV secolo da Nicola d'Oresme (e per essa, come per la serie precedente, il termine generale è infinitesimo). Gli allievi potranno allora capire che la sola condizione che prevede il termine generale infinitesimo non basta a garantire la convergenza di una serie.

Esempî storici e ricaduta didattica: un sommario

Presentiamo innanzitutto un breve sommario di esempî tratti dalla storia della matematica riferiti alle serie numeriche, con la specificazione delle ricadute didattiche:

[Osserviamo che tale sommario potrà essere fatto riferimento anche per quanto riguarda le proposte successive (2 e 3)]

Un esempio storico interessante riguarda le più antiche nozioni di serie numerica: già Aristotele di Stagira (384-322 a.C.) osservava implicitamente che la somma di una serie di infiniti addendi (considerata in senso potenziale) può essere limitata.

"L'infinito per aggiunzione è, poi, quasi la medesima cosa che l'infinito per divisione, giacché esso si produce nel finito per aggiunta, in modo contrario all'altro. Invero, nella misura che una grandezza si vede divisa all'infinito, nella stessa misura essa risulta aggiunta a quella finita. Difatti, se noi da una grandezza finita desumiamo una determinata grandezza e poi ne desumiamo ancora un'altra nella medesima proporzione, senza però portar via la grandezza stessa dell'intero, non riusciremo a percorrere il finito; se, al contrario, accresceremo la proporzione in modo da portar via progressivamente la grandezza stessa, allora riusciamo a percorrerla, perché tutto ciò che è finito si toglie via mediante la sottrazione di un qualsivoglia finito. Dunque, l'infinito non è in altra guisa, ma solo in questa, cioè in potenza e per detrazione [...] ed è, altresì, in potenza, come la materia, e non mai di per sé, come è, invece, il finito. Anche per aggiunzione l'infinito è, così, pur sempre in potenza, e noi diciamo che, in un certo senso, lo è allo stesso modo che per divisione: sempre, infatti, si potrà assumere qualcosa al di fuori di esso, ma, non di meno, esso non supererà ogni grandezza finita, come, invece, per divisione supera ogni grandezza finita e rimane sempre minore. Di conseguenza non si può ammettere che l'infinito, neppure potenzialmente, superi il tutto per aggiunzione, a meno che l'infinito non sia accidentalmente in entelechia, come, secondo i fisiologi, è infinito quel corpo che è al di fuori del cosmo e la cui sostanza è aria o altra cosa di tal genere. Ma se, in tal modo, un corpo sensibile non può essere infinito in entelechia, è chiaro che neppure in potenza esso potrà esser tale per aggiunzione, se non, come dicevamo, nel senso contrario a quello della divisione. Anche Platone, infatti, per questa ragione concepì due infiniti [il grande e il piccolo], perché sembra che ci sia un superamento e un processo verso l'infinito sia per accrescimento sia per diminuzione. Ma pur avendo ammesso due infiniti, egli non ne fa uso: infatti, secondo lui, nei numeri non sussiste affatto l'infinito né per detrazione, perché la monade è il minimo, né per aggiunzione, perché egli concepisce il numero fino alla decade" (*Fisica*, III, VI, 206 b, 1-33).

Nella *Quadratura della parabola*, Archimede di Siracusa (287-212 a.C.) fa riferimento alla serie geometrica di ragione ¼ nell'importante proposizione seguente:

Proposizione 23. "Se alcune grandezze si pongono ordinatamente nel rapporto quadruplo [cioè se ciascuna è quadrupla della seguente], tutte le grandezze [sommate insieme] più ancora la terza parte della più piccola saranno i quattro terzi della maggiore".

Se consideriamo unitaria la prima delle grandezze alle quali la proposizione fa riferimento, ciò si esprime scrivendo:

$$1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$
$$\left(1+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{4}{3}$$
$$\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16}=\frac{4}{3}$$
$$\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\right)+\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{64}}_{\text{Resto}}=\frac{4}{3} \qquad \text{etc.}$$

$$1+\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\dots\right)}_{R}=\frac{4}{3}$$

Il risultato archimedeo riguarda la somma dei primi termini di una serie geometrica di ragione 4; ma se consideriamo ora l'intera serie, ovvero gli infiniti termini:

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{i}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\dots$$

$$R=\frac{1}{3}\cdot 1$$

la proposizione afferma che il resto ottenuto considerando solo i primi *n* termini è la terza parte del termine *n*-esimo (ovvero dell'ultimo termine considerato). Considerando dunque solo il primo termine, risulta:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\dots=\frac{1}{3}$$

e la somma degli infiniti termini viene così ad essere:

$$1+\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\dots\right)}_{\frac{1}{3}\cdot 1}=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

Nella proposizione 35 del libro IX degli *Elementi*, Euclide (IV-III sec. a.C.) esprime un analogo risultato (ma in forma più generale):

"Se si danno quanti si voglia numeri in proporzione continuata fra loro, e dal secondo e dall'ultimo di essi si sottraggono numeri uguali al primo, si avrà che la differenza fra il secondo ed il primo numero sta al primo come la differenza fra l'ultimo ed il primo sta alla somma di tutti i numeri che precedono l'ultimo".

Una simile argomentazione porta ad un risultato che sarà ripreso molti secoli più tardi: la formula generale per la somma di una serie geometrica compare infatti in un'opera di François Viète (1540-1603), *Varia responsa* (1593), ed era nota a Pierre de Fermat (1601-1665); essa fu pubblicata anche da Andreas Tacquet (1612-1660) in *Arithmeticae theoria et praxis accurate demonstrata* e da John Wallis (1616-1703) in *Arithmetica infinitorum*, opere entrambe risalenti al 1655.

Tacquet notava, a proposito della formula per il calcolo della somma di una "progressione infinita":

"Tu che mi leggi vedrai con quanta facilità si giunga a quanto ti avevo promesso: cioè il passaggio da una progressione finita alla progressione infinita. Vi è ragione di stupirsi che gli aritmetici che conoscevano il teorema relativo alle progressioni finite abbiano ignorato quello concernente le progressioni infinite, che da esso si deduce immediatamente" (citato in: Loria, 1929-1933, p. 517).

Rileviamo però che queste considerazioni (ed i non pochi procedimenti analoghi sviluppati quasi contemporaneamente) *non* erano precedute da una rigorosa dimostrazione di convergenza. Anzi, come avremo occasione di rilevare ancora, la nozione stessa di convergenza non sembra essere presente nelle opere dei matematici del XVII secolo.