SCUOLA DI SPECIALIZZAZIONE ALL'INSEGNAMENTO NELLA SCUOLA SECONDARIA

Indirizzo Matematico – Fisico – Informatico

Prova aggiuntiva di MATEMATICA

12 Aprile2007

Durata della prova scritta: 1 ~~2~~ ore

La prova aggiuntiva si intende superata se si risponde correttamente ad almeno 3 delle domande seguenti. In caso contrario si proseguirà con la prova orale.

1. Si consideri l'insieme formato dai numeri naturali della forma 6n + 3. Tale insieme è chiuso rispetto all'addizione? E rispetto alla moltiplicazione?

2. Dato il triangolo equilatero *ABC*, sul lato *AB* si consideri un punto *P* e da esso si traccino le parallele ai lati *AC* e *BC*, che intersecano tali lati, rispettivamente, nei punti *R* e *S*. Determinare la posizione di *P* su *AB* in modo che il triangolo *PRS* abbia area ~~minima~~. massima

3. Enuncia il principio di induzione e utilizzalo per dimostrare che: la somma dei primi k naturali dispari è k^2;

4. Due circonferenze, k e k', sono tangenti esternamente nel punto T. Due rette distinte, a e b, condotte per T, secano la circonferenza k rispettivamente nei punti A, B e la circonferenza k' nei punti A' e B'. Stabilire se le rette AB e A'B' sono parallele o incidenti e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

5. Di un triangolo sono assegnati due lati e un angolo non compreso fra essi. Si discutano le condizioni di costruibilità.

1) <u>Uso le congruenze modulo 6</u>, $\equiv_6$:

posto $S = \{x \in \mathbb{N} : x = 6n+3,\ n \in \mathbb{N}\}$

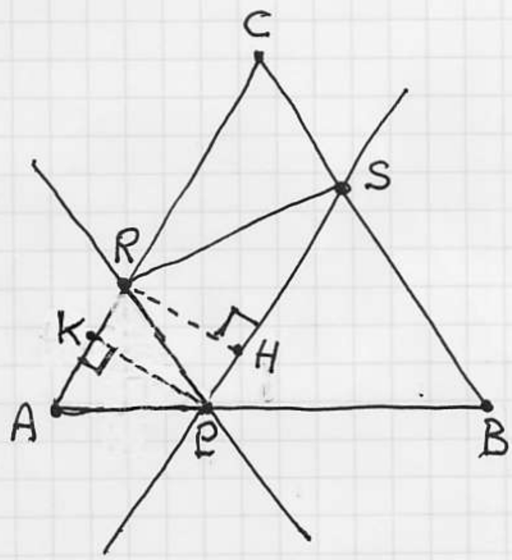
si ha $x \in S \Leftrightarrow x \equiv_6 3$, quindi

$\forall x, y \in S$ si ha :

$x + y \equiv_6 3+3 \equiv_6 0 \Rightarrow x+y \notin S$

$x \cdot y \equiv_6 3 \cdot 3 \equiv_6 9 \equiv_6 3 \Rightarrow x \cdot y \in S$.

2)



Posto :

l = lunghezza del lato del triangolo equilat. ABC

$x = \overline{AP} \left(= \overline{RA} = \overline{RP} \right)$

$S(x)$ = area di PRS

- <u>Calcolo di $S(x)$</u> :

<u>1º modo</u> :

uso area (triang. equilat.) $= \dfrac{\text{lato}^2}{4} \cdot \sqrt{3}$

$$S(x) = \frac{S(ABC) - S(PBS) - S(APR)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{l^2}{4}\sqrt{3} - \frac{(l-x)^2}{4}\sqrt{3} - \frac{x^2}{4}\sqrt{3} \right] =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8} \left[l^2 - (l-x)^2 - x^2 \right] =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8} \left[(l+x)(l-x) - (l-x)^2 \right] =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8} (l-x) \left[l+x - (l-x) \right] = \frac{\sqrt{3}}{8} (l-x)\, 2x$$

cioè $\boxed{S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} x (l-x) = -\frac{\sqrt{3}}{4} x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} l x}$;

2° modo: $\overline{RH} = \overline{PK} = \frac{x}{2}\sqrt{3}$, $\overline{PS} = \overline{PB} = l - x$,

$$S(x) = \frac{\overline{PS} \cdot \overline{RH}}{2} = \frac{(l-x)\,\frac{x}{2}\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} x (l-x) \ ;$$

- Studio del massimo di $S(x)$:

1° modo: uso parabola,

infatti $S(x)$ è una parabola

con concavità verso il basso

onde per cui ha massimo nel vertice, cioè:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{-\frac{\sqrt{3}\,l}{4}}{2\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)} = \frac{l}{2},$$

$$y_V = S(x_V) = -\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}l\cdot\left(\frac{l}{2}\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{16}l^2 + \frac{\sqrt{3}}{8}l^2 = \frac{\sqrt{3}}{16}l^2,$$

quindi:

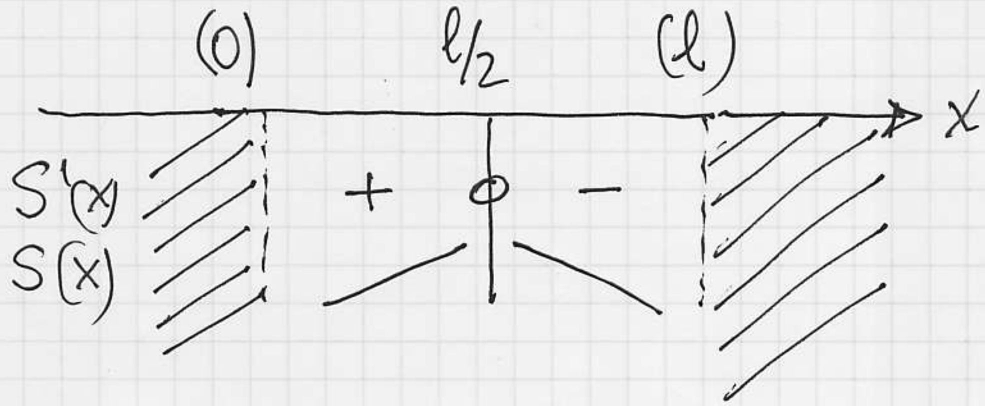
$S(x)$ è massima per $x = \frac{l}{2}$ e tale massimo vale $\frac{\sqrt{3}}{16}l^2$;

<u>2° modo:</u> uso la derivata $S'(x)$,

$$S'(x) = \frac{\sqrt{3}}{8}(-4x+2l)$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{l}{2}$$

$$S'(x) > 0 \quad \text{per} \quad x < \frac{l}{2}$$



q. di $x = \frac{l}{2}$ e' massimante (di $S(x)$),

oppure, senza studiare il segno di $S'(x)$,

uso derivate successive:

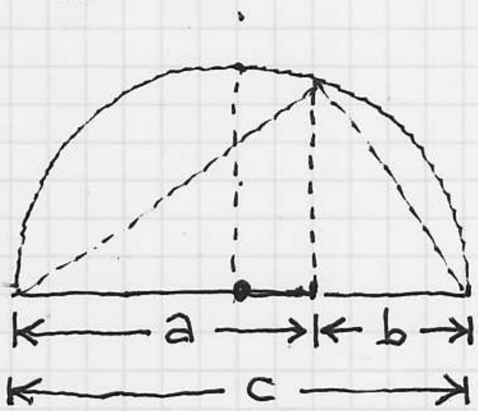
$$S''(x) = \frac{\sqrt{3}}{8}(-4) < 0 \quad \forall x \quad (0 \le x \le l)$$

cioe' $S\left(\frac{l}{2}\right) < 0 \Rightarrow x = \frac{l}{2}$ massimante;

3° modo: uso la proprietà secondo cui 2 numeri positivi a somma costante hanno prodotto massimo se e solo se sono uguali

dim.: siano a, b i 2 numeri >0 e sia

$a + b = c$, basta vedere la figura sottostante e usare II Teor. Euclide



tornando a noi :

$S(x)$ e' costituita da

- un fattore costante positivo $\frac{\sqrt{3}}{4}$
- 2 fattori variabili entrambi positivi

x ($x=0$ escluso xché in tal caso $S(0)=0$ sicuramente non massimo)

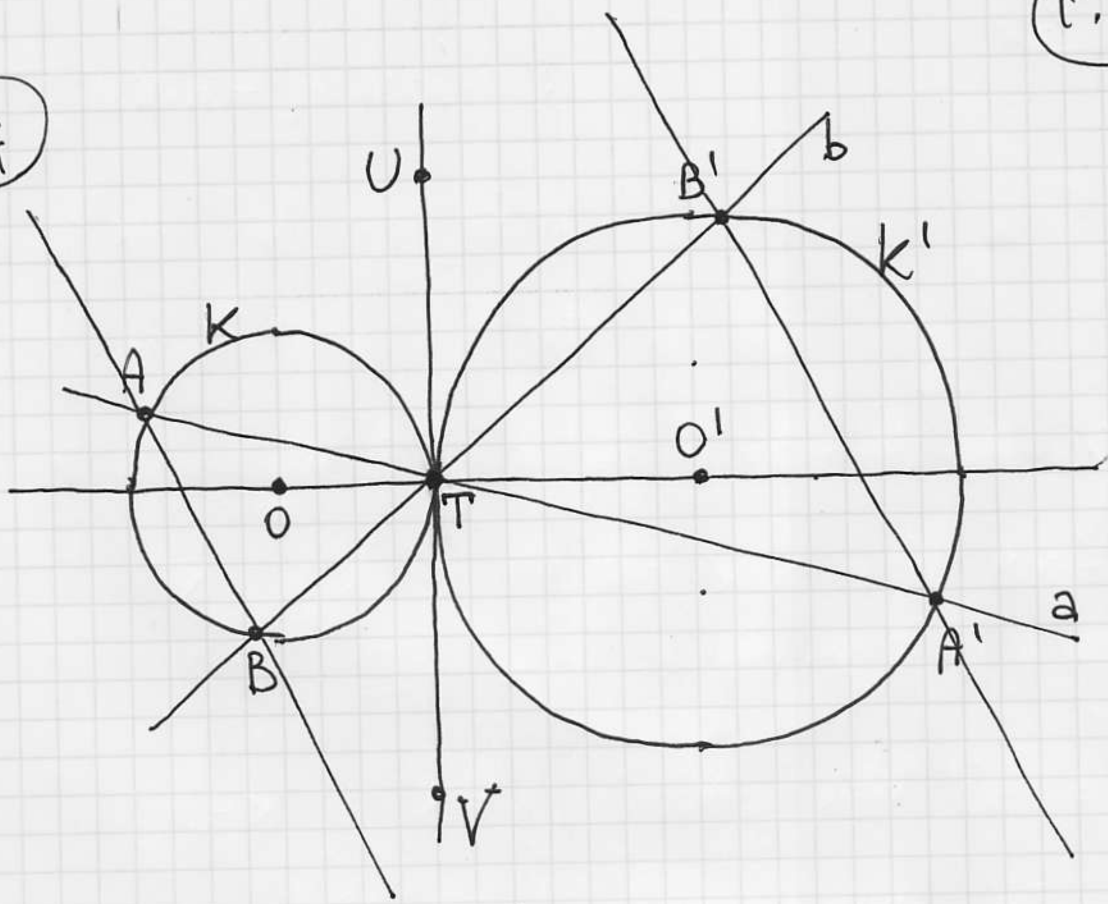
$l-x$ ($x=l$ escluso xché $S(l)=0$)

e tali che la loro somma e' la costante l,

quindi $x\cdot(l-x)$ e' massimo, e con esso e' massimo anche $\frac{\sqrt{3}}{4}x(l-x)$, cioe' $S(x)$, per $x=l-x$, cioe' $x=\frac{l}{2}$.

3) fatto e rifatto con Bernardi e Maroscia (vd. in rete su sito I semestre sotto Maroscia miei documenti)

4



retta U,T,V tangente a k e k'

$U\hat{T}A \cong A\hat{B}T$ perché angoli alla circonf. che insistono sullo stesso arco $\overset{\frown}{TA}$ di k,

$V\hat{T}A' \cong T\hat{B'}A'$ " " arco $\overset{\frown}{TA'}$ di k',

$U\hat{T}A \cong V\hat{T}A'$ perché angoli opposti al vertice,

quindi, per transitività, si ha

$A\hat{B}T \cong T\hat{B'}A'$ angoli alterni interni,

onde per cui le rette A,B e A',B' sono parallele.

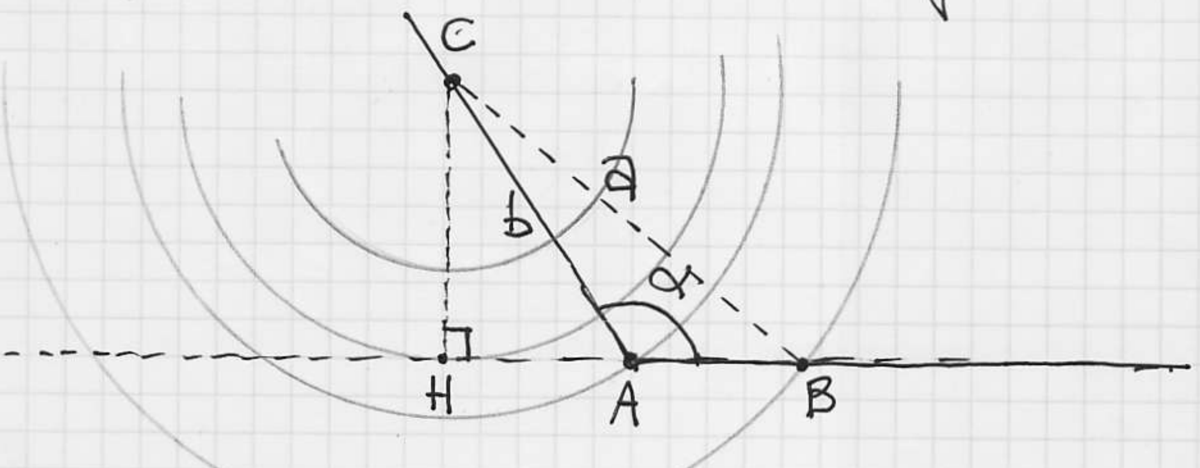
(5) Il problema si può formulare anche così:

Costruire un triangolo dati due lati e l'angolo opposto ad uno di essi.

Siano a, b, α i dati, con α opposto ad a; si distinguono 3 casi:

5.1) <u>α e' ottuso</u>:

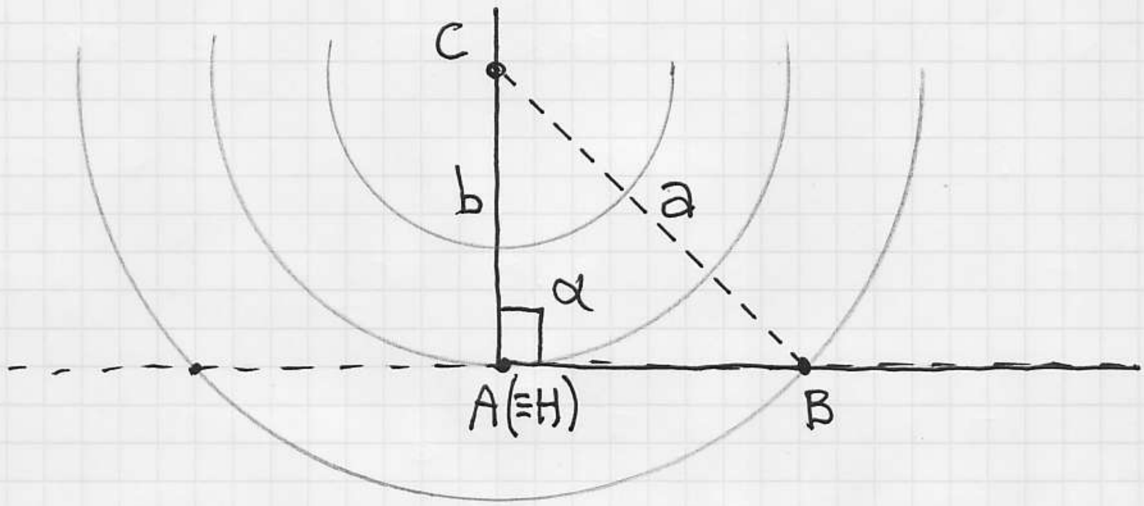
si costruisce un angolo di vertice A e ampiezza α e su uno dei suoi lati si stacchi un segmento AC di lunghezza b, si descrive poi la circonf. di centro C e raggio a:
il punto di intersez. B di questa circonf. con l'altro lato dell'angolo e' il terzo vertice del triangolo richiesto



affinché il problema sia possibile occorre che sia $a > b$;

5.2) <u>α è retto</u> :

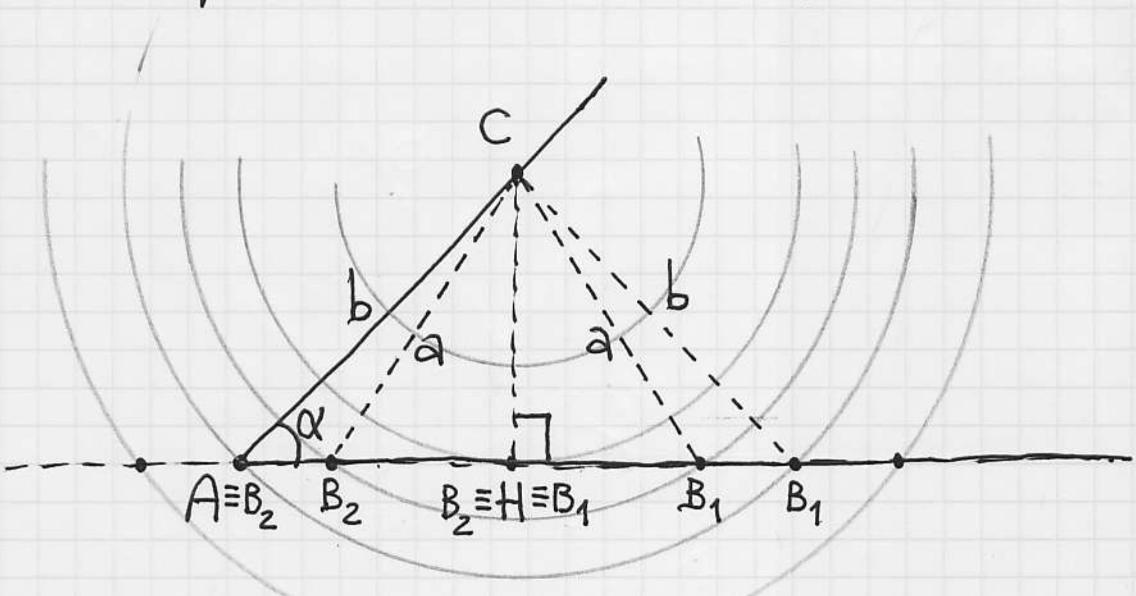
si procede come nel caso precedente



il problema è possibile solo se $a > b$;

5.3) <u>α è acuto</u> :

si procede come nei casi precedenti



il problema è possibile solo se

$$CH \leq a \leq b$$

ed ammette 2 soluzioni CAB_1 e CAB_2 ;
oppure 1 soluzione CAH ;

<u>Riepilogando</u>:

detto β l'angolo del triangolo costruito opposto al lato b, si ha lo schema:

5.1) α ottuso
- $\to a \leq b$ nessuna soluz.
- $\to a > b$ 1 soluz. ; β acuto

5.2) α retto
- $\to a \leq b$ nessuna soluz.
- $\to a > b$ 1 soluz. ; β acuto

5.3) α acuto
- $\to a < CH$ nessuna soluz.
- $\to a = CH$ 1 soluz. ; β retto
- $\to a > CH$
  - $\to a < b$ 2 soluz. ; β_1, β_2 supplementari
  - $\to a = b$ 1 soluz. ; $\beta = \alpha$
  - $\to a > b$ 1 soluz. ; $\beta < \alpha$