10-1-2007

Modulo "Metodologia delle Scienze sperimentali"

Carlo Tarsitani

1. Il concetto di "modello"

Ci siamo occupati dei seguenti punti:
1. il rapporto tra matematica e realtà;
2. il linguaggio matematico della fisica;
3. i modelli in fisica e nelle altre scienze sperimentali: il loro ruolo e la loro natura.

Abbiamo sostenuto: (o almeno questo tutto)

i. La matematica è una scienza sperimentale, anche se si riferisce ad aspetti "globali" dell'esperienza e si arricchisce attraverso lo sviluppo delle altre discipline scientifiche (di tutto questo l'attuale modo di insegnare entrambe le discipline non lascia intravedere alcunché).

ii. Matematica e fisica sono in un rapporto reciprocamente costitutivo (almeno fino alla fine del XIX secolo); *non è vero* che la fisica *si serva* della matematica come *strumento per fare calcoli*, come se le conoscenze matematiche si fossero sviluppate indipendentemente dalla fisica (di tutto questo l'attuale modo di insegnare entrambe le discipline non lascia intravedere alcunché).

iii. I modelli sono parte integrante della rappresentazione fisica del mondo e la matematica ha un ruolo concettualmente costitutivo nella costruzione dei modelli fisici (di tutto questo l'attuale modo di insegnare entrambe le discipline non lascia intravedere alcunché). problema del criterio di distinzione tra modello fisico e modello matematico

iv. I modelli hanno un rapporto *dialettico* con le "teorie", ossia con quegli schemi generali di spiegazione che stabiliscono i criteri di concettualizzazione dell'esperienza. Le teorie generano modelli (es. il pendolo) e i modelli generano teorie (es. i modelli della teoria cinetica, dell'etere elettromagnetico, della struttura atomica, ecc.). Il modello diventato teoria assume la forma di una struttura matematica astratta, con una componente *sintattica*, una componente *semantica*, e una componente *pragmatica* (di tutto questo l'attuale modo di insegnare entrambe le discipline non lascia intravedere alcunché).[1]

---

[1] Dal punto di vista sintattico, ogni teoria è un insieme di definizioni, postulati e teoremi, né più né meno di una teoria matematica. Si tratta di una struttura logica astratta che adotta come regole sintattiche quelle della logica elementare. Dal punto di vista semantico, una teoria stabilisce quali

l'APPROSSIMAZIONE è un "AVVICINAMENTO" (non un "ALLONTANAMENTO") a volte graduale come nel modello dell'atomo.

ES PV=nRT è una legge piuttosto idealizzata - Van Der Waals approssima la formula complicandola, ma avvicinandosi di più al comportamento dei gas reali

v. I modelli "approssimano" la realtà: da modelli più rozzi e schematici si passa a modelli più completi e più precisi. Essi si riferiscono in genere a un sistema (un oggetto) *particolare*, le cui caratteristiche specifiche non possono essere dedotte dai postulati della teoria. Talvolta il modello entra in contraddizione con la teoria di riferimento. es) la teoria cinetica nasce come teoria "MECCANICA", ma poi si perfeziona introducendo ipotesi che si avvicinano di più alla realtà

vi. Talora i modelli matematici acquistano una vita propria, si distaccano dal sistema particolare per rappresentare il quale sono stati ideati e acquistando una valenza generale che consente loro di essere applicati a una classe di sistemi completamente diversi tra loro: in questo caso si può parlare di modelli matematico-sperimentali. es. PENDOLO per piccole oscillazioni | Vd. pag 3 | e per tutti i moti ARMONICI e può essere usato in tutti altri sistemi fisici

vii. I modelli fisici possono trasformarsi in altrettante indicazioni per *costruire materialmente* oggetti che "funzionano" secondo le caratteristiche del modello: dalla ricerca scientifica si passa alla ricerca tecnica.

Lezione I

Testo consigliato: G.Israel, *La visione matematica della realtà*, Laterza, 2003

In genere distinguiamo le **conoscenze matematiche** dalle **conoscenze sperimentali**, come se fossero il prodotto di attività conoscitive profondamente diverse, senza alcun legame tra loro.

Questa concezione è espressa dalla parabola cosiddetta "dell'uomo solo" di Johann Herschel (ricordate? "Un uomo tenuto isolato dalla nascita in un ambiente buio potrebbe dedurre l'intera matematica, ma non potrebbe dire cosa succede a un cucchiaino di zucchero versato nell'acqua".)

La matematica non si occuperebbe di "verità di fatto", ma solo di "verità di ragione". Per alcuni eminenti logici dell'inizio del XX secolo: le proposizioni matematiche sono solo "tautologie".

Ne deriva l'idea che le scienze sperimentali sono il regno della "**matematica applicata**".

Eppure...

Galileo: «il libro della natura è scritto in caratteri matematici...»

---

sono le grandezze fisiche che c'interessano, quali sono gli oggetti o sistemi e i principi che guidano le loro interazioni. Dal punto di vista pragmatico la teoria ci dice come va schematizzato un fenomeno, come dobbiamo muoverci di fronte all'esperienza, su cosa dobbiamo dirigere la nostra attenzione, e che tipo di risultati consideriamo accettabili.

Tradizione pitagorico-platonica: il **numero** è l'essenza delle cose.

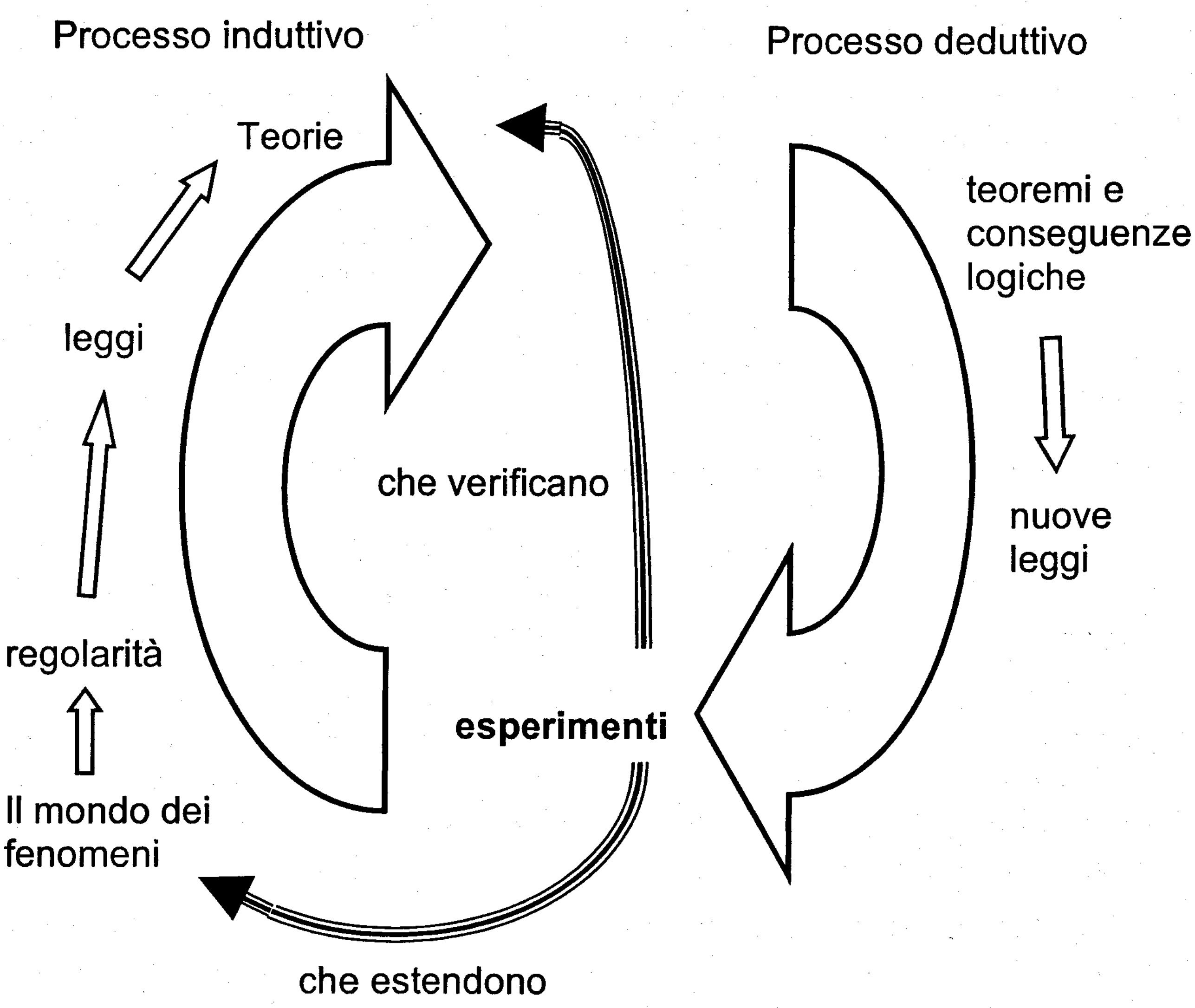
Le scienze cosiddette "**esatte**" studiano una **realtà matematica**. Gli scienziati studiano le **leggi matematiche** che regolano i fenomeni naturali (e sociali) e costruiscono **modelli matematici** dei processi e degli oggetti di cui si occupano.

La matematica della realtà viene "scoperta" attraverso l'osservazione, la misura e l'esperimento. Talvolta una **scoperta scientifica** può tradursi in una **scoperta matematica**.

Si può allora dire che la fisica è essenzialmente "matematica applicata"?

Cominciamo con i problemi legati a un "modello" generale del **metodo** delle scienze sperimentali.

Il circolo delle conoscenze fisiche



Questioni "classiche":

- ♣ viene prima la teoria o l'esperimento?
- ♣ si possono fare osservazioni senza teoria?
- ♣ Cosa succede quando cambiano le teorie?

Possiamo osservare che:

A. gli esperimenti non si fanno per caso, ma affrontano problemi conoscitivi che nascono all'interno di un contesto teorico;

B. sia "saper osservare", sia "saper sperimentare" sono due **capacità** che si acquisiscono in anni di duro lavoro (o di "educazione culturale");

C. non esistono teorie definitivamente *confermate*; quando cambiano le teorie cambiano i criteri di "lettura" delle esperienze pregresse e si intravedono nuove possibilità sperimentali prima del tutto inconcepibili;

D. l'esperienza fisica è profondamente condizionata dal fatto che il linguaggio della fisica è il linguaggio matematico (Wittgenstein: «i limiti del mio mondo coincidono con i limiti del mio linguaggio»; Es. i 30 modi di chiamare la NEVE o gli ORSI degli eschimesi

E. la fisica parla essenzialmente degli **oggetti** (gli "enti", i "sistemi") di cui è fatto il mondo materiale e dei **processi** ipotetici che essi compiono;

F. la descrizione degli oggetti e dei processi fa spesso ricorso a **modelli**.

Nelle concezioni epistemologiche contemporanee il concetto di "modello" acquista un ruolo centrale: le leggi e le teorie sono "rappresentazioni" di processi e "mondi" possibili; le leggi approssimano e schematizzano i comportamenti reali, i postulati teorici delimitano i confini concettuali entro i quali ha senso costruire leggi e/o modelli.

Per esempio, la "legge della gravitazione universale" è formulata ed ha senso in un mondo in cui esistono forze che si esercitano come azioni dirette a distanza, proporzionali alle accelerazioni dei corpi su cui agiscono.

È una legge perché ha un carattere **universale**: vale per **tutti** i corpi che hanno una massa gravitazionale, quelli che una volta si chiamavano «gravi». Altri esempi: la "legge di Hooke", la "legge di Ohm".

Tuttavia, nell'applicazione ai casi reali, queste leggi diventano rappresentazioni specifiche di oggetti o interazioni *particolari*.

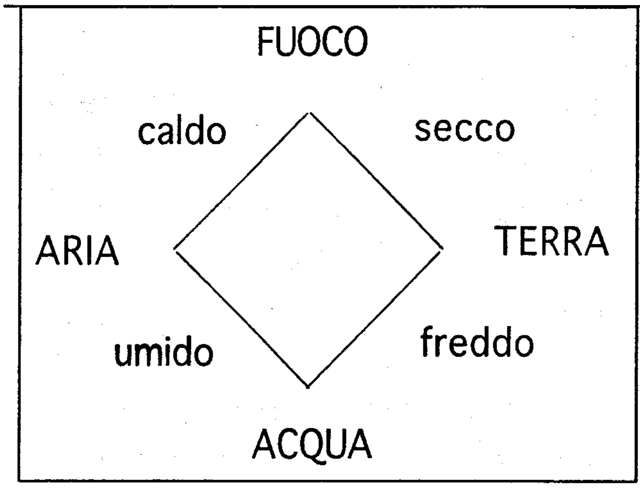
La legge universale della gravitazione è applicabile rigorosamente solo nel caso di *due* corpi interagenti. La legge di Hooke e la legge di Ohm definiscono implicitamente le proprietà degli oggetti cui si riferiscono: la "molla ideale", "il conduttore ohmico".

Le molle ideali e i conduttori ohmici non si trovano andando a passeggio: bisogna costruirli. Le leggi naturali ci portano a costruire un mondo di oggetti "artificiali".

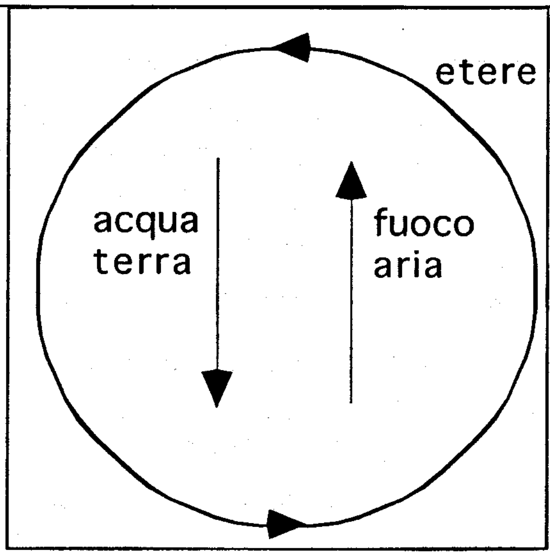
È difficile definire astrattamente la natura di una legge: cosa ci facciamo con la "legge della domanda e dell'offerta"? E che dire della "legge dei grandi numeri", o della "legge empirica del caso"?

In realtà, molto spesso si usa la parola "legge", invece si sta parlando di un **modello**. Per esempio: "la legge dei gas perfetti".

La matematizzazione della realtà e la "nuova fisica"



La "fisica" aristotelica si basava sulle **qualità** degli elementi primari.



La "forma" del moto locale dei quattro elementi è una loro proprietà qualitativa

Tutti i cambiamenti, compresi i movimenti, hanno le stesse caratteristiche: vanno dalla "potenza" all' "atto" e possono essere "naturali" e/o "violenti".

Le cause sono classificabili secondo categorie universali:
causa materiale   causa formale
causa finale   causa efficiente

Con la "rivoluzione scientifica" si assiste alla sostituzione sistematica delle qualità con le quantità. Le proprietà delle cose variano dal più al meno e non per "miscela" e contrapposizione di qualità "contrarie".

Dalla tendenza alla matematizzazione sistematica dei fenomeni reali segue la tendenza ad assegnare un ruolo centrale al **moto locale**.

Il moto locale è il *cambiamento* fondamentale e deve essere rappresentato matematicamente in tutte le sue sfumature: dalle circonferenze (Copernico) alle ellissi (Keplero), dalla direzione all'accelerazione (Galileo). Principio d'inerzia e principio di relatività: non c'è differenza qualitativa tra stato di quiete e stato di moto rettilineo uniforme.

Le cause dei movimenti sono di natura essenzialmente *meccanica* (urti, spinte, pressioni, forze). Ma ciò che qualifica la natura della causalità meccanica è la sua formulazione matematica.

Lo **spazio** e il **tempo** diventano enti essenzialmente matematici: non hanno posizioni (istanti) né direzioni privilegiate (l'insoluto problema della "freccia del tempo").
Sono *omogenei* e *isotropi*. La *posizione* di un corpo nello spazio deve essere esprimibile numericamente con un numero adeguato di coordinate spaziali (o di configurazione). Per la sua collocazione temporale basta un numero.

Nasce quindi il problema dell'**analisi** del moto.

Per studiare il moto, le proprietà matematiche non possono più essere considerate solo nel loro "essere" (il "numero"), bensì devono essere descritte *nel loro fluire* e/o *cambiare*.

Un'ipotesi metafisica, il **principio di continuità**, diventa uno dei presupposti del metodo matematico per studiare la realtà. Tutti i cambiamenti avvengono per variazioni "infinitesime" (Leibniz), e la variazione infinitesima è rappresentata da un *differenziale*.

Newton: se il moto rettilineo uniforme è "naturale", ciò che deve essere spiegato è l'**accelerazione**. Se la velocità è una "flussione", ossia una *derivata*, l'accelerazione è la flussione di una flussione, ossia una *derivata seconda*.

Nasce l'equazione fondamentale della dinamica:
$F = m(d^2s/dt^2)$

Il **problema fondamentale della dinamica** acquista una fisionomia caratteristica: se $F = F(x, y, z, dx/dt, \ldots)$, quale sarà la traiettoria percorsa dal corpo nello spazio?

Il problema fondamentale dell'analisi causale del moto (dinamica) si traduce nella ricerca della soluzione di una o più **equazioni differenziali**. Ne segue che il "modello" di causalità, diviene il modello della **causalità deterministica**. Lo stato attuale di un sistema isolato (quindi anche dell'universo intero) è univocamente determinato dal suo stato iniziale e determina univocamente ogni suo stato futuro.

Grazie alla visione atomistica, anche la **materia** è essenzialmente una **quantità**.

Prima della rivoluzione scientifica gli atomi erano minuscoli "pezzi" di materia che avevano le forme più svariate. A questo atomismo "geometrico-qualitativo" va sostituito un atomismo matematico che si inserisca senza contraddizioni nello schema esplicativo della meccanica.

L'atomo è sinonimo di "discreto", mentre l'evoluzione dinamica è per definizione "continua". Per superare questa dicotomia, l'atomo viene allora identificato con un **punto materiale**.

Il punto è *l'elemento costitutivo elementare dello spazio geometrico astratto*. L'unica proprietà fisica del punto materiale è l'unità elementare di **massa**.

Nella fisica newtoniana la massa è una grandezza "quantizzata".

Per Newton, tutti gli atomi ultimi sono identici tra loro. Le differenze tra le sostanze sono riconducibili alla loro struttura "molecolare": le molecole che formano le varie sostanze sono particolari configurazioni stabili di un numero notevole di atomi elementari tutti uguali tra loro. Le differenze qualitative tra le sostanze sono così ricondotte a differenze di configurazione geometrico-dinamica.

Ora capiamo Newton quando definiva la massa di un corpo come la "quantità di materia" in esso contenuta: la quantità di materia di un corpo non è altro che il numero di atomi che lo compongono.

Si profila una particolare visione del mondo.
- concezione *atomista*
- concezione *riduzionista*
- concezione *determinista*

Essa conduce ad una *nuova* fisica e, nello stesso tempo, a una *nuova* matematica. Lo sviluppo dell'analisi matematica è anche lo sviluppo della meccanica classica. Da un lato, i concetti matematici sono plasmati dalle esigenze della nuova meccanica, dall'altro il significato dei concetti fisici è strettamente dipendente dalla loro rappresentazione matematica. Da un lato, l'analogia meccanica diventa il criterio principe per l'intera modellistica matematica, dall'altro, la fisica non si serve della matematica a scopi tecnici e non ha senso parlare di *applicazione* della matematica alla fisica.

Nasce la dicotomia, così importante per la didattica, tra "intuitivo" e "astratto", tra "visualizzabile" e "simbolico".

Unica, parziale, eccezione all'intera storia: **il calcolo delle probabilità**. Quando i primi fisici *teorici* cominciano ad ammettere che nel mondo possono accadere fenomeni del tutto *casuali*, l'intera visione del mondo basata sull'*analisi meccanica del moto* comincia ad andare in pezzi.

Torniamo ai "modelli"

Ci occuperemo dei seguenti punti:
a) l'uso dei modelli nelle scienze sperimentali e nelle tecniche;
b) il rapporto tra aspetto matematico e aspetto fisico dei modelli.

Prendiamo, per esempio, ... un *pendolo*!

Per Aristotele: un grave cui s'impedisce con la violenza di muoversi secondo la sua natura.

Per Galileo: un grave che compie oscillazioni isocrone.

Per Newton: un corpo vincolato soggetto alla forza gravitazionale.

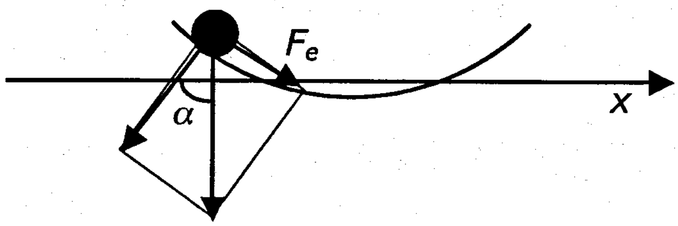
Per noi: «Un punto materiale di massa *m* vincolato a un punto fisso da un filo inestensibile, privo di massa... ».

In fisica si usano diversi modelli di pendolo: si parla di "pendolo semplice" e "pendolo composto", pendolo "piano" e pendolo "sferico", pendolo "ideale" e "pendolo reale".

In primo luogo, il pendolo è un oggetto puramente *meccanico*: è la teoria di cui disponiamo che ci indica i criteri in base ai quali rivelare la "essenza" dell'oggetto, "difalcando gli impedimenti" (ossia eliminando i fattori contingenti) che caratterizzano gli oggetti della vita quotidiana.

L'oggetto che c'interessa deve poter essere rappresentato come un *punto materiale*, vincolato a muoversi su un arco di circonferenza e soggetto alla *forza peso* F (sulla Terra, $F = mg$).

$$F_e = mg\text{sen}\alpha$$



Applichiamo la seconda legge della dinamica (v. fig.):

$(d^2/dt^2)\alpha = -\, g\text{sen}\alpha$!?

Approssimazione delle "piccole oscillazioni": sen$\alpha \approx \alpha$, $\alpha = x/L$

$(d^2/dt^2)x = -\, (g/L)x$!!

È l'equazione delle oscillazioni armoniche!

L'aspetto matematico del modello,

$A(d^2/dt^2)q + Cx = 0$,

gli conferisce una grande generalità: esso descrive un *oscillatore armonico*, quale che sia la sua natura. Potenza dell'astrazione matematica!

Si noti, per inciso, che solo con sottili accorgimenti tecnici riusciamo a costruire oggetti reali che approssimano il comportamento del modello. Nella tecnica, dobbiamo fare in modo che il moto del nostro pendolo sia assimilabile a quello di un *oscillatore armonico*.

In teoria, la fisica è piena di oscillatori armonici.

Il "pendolo composto" è visto come un corpo girevole attorno a un asse fisso, occorre conoscerne il "momento d'inerzia", ma si arriva a un risultato matematico del tutto analogo.

Parliamo ora del pendolo "reale". Si tratta sempre di un modello, ma si tratta di un modello che approssima "meglio" i fenomeni reali.

Occorre in questo caso schematizzare le forze d'attrito:

$F_a = -\, Kv$

L'equazione differenziale del moto diventa:

$m(d^2/dt^2)x + K(d/dt)x + (mg/L)x = 0$

È sempre un'equazione lineare e omogenea!

Dal modello fisico si passa al modello matematico:

$A(d^2/dt^2)q + B(d/dt)q + Cq = 0$

Si tratta del modello matematico di "moto oscillatorio smorzato". In fisica se ne fa ampio uso, per spiegare e modellizzare molteplici fenomeni...

L'equazione si risolve facilmente. Sappiamo infatti che ponendo

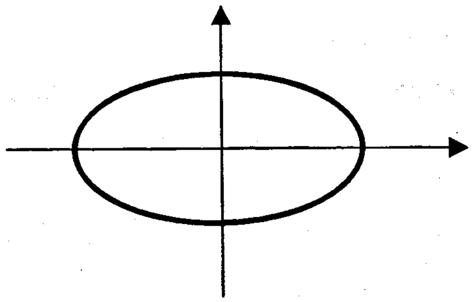
$q(t) = A\exp(\gamma t)$

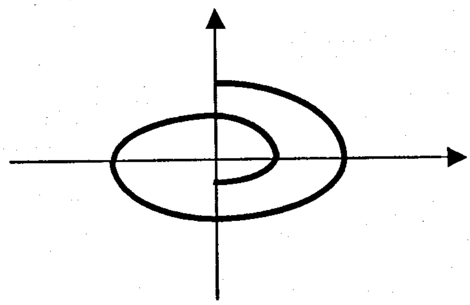
si ottiene un'equazione risolvente che è una semplice equazione algebrica di secondo grado.

I valori di *A, B e C,* determinano gli andamenti possibili. In particolare si passa da una $q(t)$ che è una semplice funzione esponenziale decrescente, all'andamento sinusoidale "smorzato" da una funzione esponenziale.

Applicazione tipica: circuito RLC.

Notare come abbiamo *andamenti tipici*: se rappresentiamo sul piano $(q, dq/dt)$ il modello di oscillatore armonico e modello di oscillatore smorzato, otteniamo le due figure:





Possiamo dire che abbiamo ottenuto una buona descrizione di oggetti reali? Sì ma con una certa approssimazione. Abbiamo uno schema matematico e un oggetto reale che gli "somiglia". Ora, quanto più questa somiglianza è artificialmente riprodotta, tanto meglio conosciamo il comportamento del sistema. Strana procedura: vogliamo conoscere un oggetto e lo modifichiamo per conoscerlo meglio. Non solo, ma quello che ci resta tra le mani è uno schema matematico astratto. Il pendolo reale dei nostri manuali di fisica è del tutto irreale: ma è importante l'equazione che lo definisce. L'importante è che il pendolo reale sia un caso particolare di oscillatore smorzato. L'oscillatore smorzato è un

modello astratto, definito in pratica dalla sua equazione differenziale.
In questo processo gioca un ruolo decisivo l'*analogia matematica*. Infatti ritroviamo lo stesso modello quando discutiamo un circuito oscillante con resistenza non trascurabile, il moto di un liquido in un tubo ad U, e via discorrendo.

Quando si riferisce ad un oggetto o a un processo fisico *particolare*, la teoria fisica non può che farne una schematizzazione, una idealizzazione. Molto spesso ne costruisce un "modello". Per farlo usa leggi fisiche note (per es., la legge dell'attrazione gravitazionale). Il modello ottenuto può restare "attaccato" a quel particolare oggetto o processo, oppure può acquistare un potere "epistemico" generale. In virtù dell'analogia matematica può essere applicato a diversi sistemi. In questi casi conta più il suo aspetto matematico che il sistema fisico originario.

In generale, le leggi fisiche sono *vere* solo approssimativamente; sono sicuramente *vere* per i "modelli" degli oggetti e dei processi naturali.

Dalla causalità alla casualità

La connessione causale tra "storia passata" e "storia futura" di un sistema fisico è garantita

- dal principio di *ragione sufficiente* e dal principio di continuità (non ci sono "fratture" o "lacune" nel corso dell'evoluzione): Leibniz (~ 1700)
- dalla visione metafisica "determinista" (Laplace ~ 1800);
- dal teorema di esistenza e unicità della soluzione di un'equazione differenziale (ammesso che si conoscano *esattamente* le condizioni iniziali): Cauchy (~ 1830);
- dall'esistenza di grandezze che rimangono "invariate" durante il cambiamento (le costanti del moto: energia, impulso, momento angolare, ecc.): Lagrange – Hamilton – Joule, ecc. (~ 1780 – 1850).

Laplace (1825): «la curva descritta da una semplice molecola d'aria o di vapore è regolata in modo altrettanto certo delle leggi planetarie [...] Non vi è altra differenza fra di esse se non quella che vi mette la nostra ignoranza» (concezione **epistemica** della probabilità).

Ma il caso non si può tenere a bada!

Nella teoria dell'evoluzione di Darwin il caso assume un ruolo centrale. Le mutazioni sono **casuali** e solo la successiva selezione naturale garantisce la sopravvivenza della specie che si trova ad essere più "adatta" alla particolare nicchia ambientale.

Lo sviluppo della "statistica" (scienza dello stato) mette in risalto il principio della stabilità delle medie di grandi numeri di valori di particolari variabili, proprio in virtù della loro distribuzione casuale (per es., la media delle misure dell'ampiezza toracica dei soldati di leva).

Nascono così anche in fisica i primi modelli statistici, basati su processi *casuali*.

Il modello cinetico dei gas

Dall'inizio dell'800, il gas "perfetto" è definito da un modello "fenomenologico":

$$PV = nRT \quad (1)$$

A metà dell'800 avvengono alcune scoperte importanti:

1. Il principio di conservazione dell'energia, visto come prima legge della termodinamica;

2. La seconda legge della termodinamica;

3. La nascita della "statistica": il comportamento di numero molto grande di persone individuali mostra la "ferrea necessità" delle leggi fisiche.

Dalla prima legge segue che l'energia macroscopica apparentemente perduta si trasferisce ai gradi di libertà microscopici: "il calore è una forma di movimento".

Dalla seconda legge segue che non è possibile recuperare integralmente l'energia trasferita a livello microscopico: l'energia macroscopica non è perduta, ma solo "dissipata".

La *statistica* mostra in particolare che, il comportamento medio di un numero molto elevato di individui esibisce una straordinaria *regolarità* e *stabilità, a patto che le differenze individuali di comportamento siano di natura essenzialmente casuale*.

Nasce così il "*Programma cinetico-atomistico*": alla luce delle suddette scoperte, qual è la **natura** del sistema fisico che esibisce la legge (1)?

Inizia un lungo percorso che porterà alla scoperta del nesso tra l'entropia S di un sistema in un determinato stato e la probabilità W di questo stato. Si tratta del nesso esplicitato nel celebre *principio di Boltzmann*:

$S = k \ln W$

Inizialmente, il programma è rivolto alla costruzione di un modello del gas tale da dimostrare che la (1) è una *legge statistica*.

Krönig (1856): «la traiettoria di ciascuna molecola deve essere così irregolare da sottrarsi a ogni possibilità di calcolo. Tuttavia, secondo le leggi della teoria della probabilità, si può assumere un moto completamente regolare al posto del suddetto moto completamente irregolare».

Modello: è come se le molecole si muovessero di moto rettilineo e uniforme, tutte con la stessa velocità.

Clausius (1857): all'equilibrio il valore assoluto delle velocità delle molecole del gas si distribuisce con una dispersione molto esigua intorno a un valore medio; si può continuare ad assumere che tutte le molecole hanno la stessa velocità, anche se si muovono in ogni possibile direzione. Le direzioni della velocità sono "equiprobabili". Anche se in generale ci si può aspettare che l'urto di una molecola con la parete del recipiente sia del tutto irregolare, «non si produrrà alcuna differenza nei risultati se assumiamo che per ciascuna molecola l'angolo e la velocità di riflessione siano uguali a quelli di incidenza».

Clausius (1858): le molecole hanno una "sfera d'azione" e quindi un *cammino libero medio*.

Le ipotesi costitutive del modello:

C1. le molecole sono distribuite con densità uniforme nel recipiente, ovvero il numero di molecole in ogni sottovolume del recipiente è proporzionale alle dimensioni di tale volume;

C2. la distribuzione dei diversi valori delle velocità molecolari è la stessa quale che sia l'elemento di volume del recipiente stiamo considerando,

C3. in ciascun elemento di volume, che sia abbastanza grande da contenere un gran numero di molecole, tutte le direzioni delle velocità sono «*gleichberechtigt*:», ossia «con ugual diritto e ugual fondamento».

C4. il numero di molecole per unità di volume che si trovano nello spazio attraversato dalla sfera d'azione di una molecola è lo stesso di quello delle molecole che si trovano in ogni parte dello spazio a disposizione;

C5. il numero di collisioni che avvengono nell'elemento di tempo δt tra due gruppi di molecole che si muovono le une verso le altre è uguale al numero delle molecole del secondo gruppo che al tempo t è contenuto nel volume spazzato dalle "sfere d'azione" delle molecole del primo gruppo («ipotesi sul numero di urti» o «*stosszahlansastz*»).

Maxwell (1859): «invece di dire che le particelle sono dure, sferiche e perfettamente elastiche, potremmo, se ci piace, dire che le particelle sono centri di forza, la cui azione è insensibile se non a una piccola distanza, dove si manifesta improvvisamente una forza repulsiva di intensità molto grande. È evidente che le due ipotesi portano agli stessi risultati».

Le velocità delle molecole non sono pressappoco uguali, piuttosto lo stato microscopico del gas è caratterizzato da una *funzione di distribuzione delle velocità molecolari*: «Se un grande numero di particelle sferiche identiche sono in moto in un recipiente perfettamente elastico, tra le particelle si verificheranno collisioni e le loro velocità saranno alterate ad ogni collisione; sicché dopo un certo tempo la *vis viva* sarà ripartita tra le particelle secondo una qualche legge regolare, essendo determinabile il numero medio di particelle la cui velocità è compresa entro determinati limiti, anche se la velocità di ciascuna particella cambia ad ogni urto».

"Analogia" con il concetto di *errore casuale*. Nel 1850, Herschel aveva osservato:

«Una palla è lasciata cadere da una certa altezza, con l'intenzione di colpire un dato bersaglio. Quale che sia il punto in cui cade, la sua deviazione dal centro del bersaglio è l'*errore*, e la probabilità di questo errore è la funzione incognita del suo quadrato, cioè della somma dei quadrati della sua deviazione in due direzioni ortogonali. Ora, dato che la probabilità di ogni singola deviazione dipende soltanto dal suo valore assoluto, e non dalla sua direzione, ne segue che la probabilità di ciascuna di queste deviazioni ortogonali, deve essere la stessa funzione del suo quadrato. E poiché la deviazione obliqua osservata è equivalente al verificarsi simultaneo delle due ortogonali, che sono essenzialmente indipendenti l'una dall'altra, ed è pertanto un evento composto di cui quelle sono i costituenti semplici indipendenti, la sua probabilità sarà dunque il prodotto delle loro probabilità separate. Pertanto, la forma della nostra funzione sconosciuta viene ad essere determinata da quella condizione, cioè che il prodotto di due tali funzioni di due elementi indipendenti è uguale alla stessa funzione della loro somma. Ma si dimostra in ogni trattato di algebra che questa proprietà è la caratteristica peculiare, e solo ad essa appartiene, della funzione esponenziale o antilogaritmica. Questa dunque è la funzione del quadrato dell'errore che esprime la probabilità di commettere quell'errore. »

Confrontiamo questa descrizione con le ipotesi di Maxwell.

M1: le molecole sono distribuite con densità uniforme nell'intero volume a disposizione;

M2: la funzione di distribuzione $f(v)$ rappresenta il numero «medio» di molecole che hanno una velocità compresa tra v e $v + dv$, «il numero di particelle la cui velocità giace tra v e $v + dv$ [...] è $Nf(v)dv$;

M3: il numero $f(v)$ non dipende dal segno di v,

$$\Rightarrow f(v) = f(v^2);$$

M4: i numeri di - molecole con una componente v_x di v è del tutto indipendente dal numero di molecole con una componente v_y e così via per le tre componenti di v,

$$\Rightarrow f(v^2) = f(v_x^2)\, f(v_y^2)\, f(v_z^2);$$

M5: essendo $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, deve allora essere

$$f(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = f(v_x^2)\, f(v_y^2)\, f(v_z^2),$$

$$\Rightarrow f(v^2) = C\exp(-\beta v^2), \text{ con } C \text{ e } \beta \text{ costanti } (\beta = 1/kT).$$

Conclusione di Maxwell: «Le velocità sono distribuite tra le particelle secondo la stessa legge in cui gli errori sono distribuiti tra le osservazioni nella teoria del "metodo dei minimi quadrati"».

I modelli di Clausius e Maxwell sono indubbiamente modelli *meccanici*, ma è dubbio che siano anche modelli *deterministici*.

Nel 1872, grazie all'intervento di Boltzmann, il modello assume un carattere fondamentale e le sue assunzioni cominciano ad assumere lo status epistemologico di "postulati" di una teoria vera e propria: la **meccanica statistica**.

B1. La funzione di distribuzione di Maxwell, opportunamente corretta, vale in generale per qualsiasi sistema all'equilibrio. Essa diviene la *funzione di distribuzione di Maxwell-Boltzmann*:

$f_{MB}(E) = C\exp(-\beta E) = C\exp(-E/kT)$

B2. "**Teorema H**": definito il funzionale $H = H(f)$, dove f è una funzione di distribuzione arbitraria, si dimostra che, in seguito alle interazioni molecolari:

- $dH/dt \leq 0$,
- per $H = H_{min}$, $f(E) = f_{MB}(E)$.

La funzione $-H$ si comporta come l'**entropia**!

B3. La nuova teoria "spiega" con ipotesi riguardanti le molecole le leggi della *termodinamica fenomenologica*; in particolare sembra spiegare la tendenza irreversibile verso lo stato di equilibrio.

Il paradosso dell'irreversibilità

A. Assumiamo che il sistema si trovi inizialmente in uno stato micro X^* corrispondente a una f di non-equilibrio: dal teorema di B. esso dovrebbe evolvere verso uno stato micro X_e^* corrispondente alla f_{MB};

B. Ad ogni stato X_e^* corrisponde uno stato $-X_e^*$ che corrisponde anch'esso alla f_{MB};

C. In base alle leggi della meccanica lo stato $-X_e^*$ evolve verso lo stato $-X^*$ corrispondente alla f;

Risposta di Boltzmann: "a condizioni iniziali eccezionali corrispondono evoluzioni del sistema altrettanto eccezionali".

Prendiamo un sistema lasciato a se stesso da lungo tempo: esso si trova quasi sicuramente in uno stato di equilibrio. Questo vuol dire che gli stati micro $\pm X^*$ e $\pm X_e^*$ formano un insieme di misura trascurabile rispetto alla misura dell'insieme degli stati micro $\pm X_e$

Introduzione di un metodo generale alternativo. Presa una f qualsiasi posso calcolarne la probabilità. Per farlo devo suddividere l'energia in intervalli finiti di lunghezza a. Data una f arbitraria, devo contare i numeri N_1, N_2, ..., di molecole che si trovano in ciascun intervallo di energia.

Una qualsiasi permutazione di due molecole tra loro non altera la f.

Il numero totale di permutazioni ammissibili mi fornisce la probabilità W della f.

Posso quindi definire l'entropia anche per uno stato di non equilibirio come

$S = k\ln W$

Posso dimostrare rigorosamente che la "permutabilità" ha un massimo molto pronunciato e che tale massimo corrisponde a

$f = f_{MB}$

In questo modo, un modello si trasforma progressivamente in teoria. Qualcosa di analogo avverrà dopo la formulazione del *modello di struttura atomica* da parte di Niels Bohr (si noti che anche in questo caso le assunzioni del modello sono in contrasto con le teorie note).