

Esercizi (IV)

6.2.7

A. Dimostrare che, per ogni numero naturale n , si ha:

$$1 + 2 + \dots + (n-1) + n + (n-1) + \dots + 2 + 1 = n^2$$

B. Verificare che l'unica quaterna di numeri reali del tipo $(a, a+1, a+2, a+3)$ tale che: $a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 = (a+3)^3$ è la quaterna $(3, 4, 5, 6)$.

C. Descrivere geometricamente l'insieme dei punti del piano:

$$S = \{ P = (t^2, t^3) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

D. Scomporre i seguenti polinomi in fattori a coefficienti reali:

$$x^3 - x^2 - x + 1, \quad x^4 + 2$$

E. Dimostrare che, se a e b sono due numeri dispari, allora $a^2 - b^2$ è divisibile per 8.

F. Stabilire se l'applicazione $f: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ definita da:

$$f(x, y) = x + y \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}$$

è iniettiva o suriettiva.

G. Dimostrare che $\sqrt{6}$ non è un numero razionale.

H. Sia dato un numero primo p e siano a, b due numeri naturali tali che:

$$a + b = p$$

Dimostrare che risulta: $\text{MCD}(a, b) = 1$.

I. Dati due numeri naturali m, n , quale delle due frazioni è la maggiore:

$$\frac{m}{n}, \quad \frac{m+1}{n+1} ?$$

L. Risolvere l'equazione in x, y : $(x-1)(y+2) = 0$.

*. Dimostrare che tra le persone presenti a una festa ve ne sono sempre almeno due che incontrano uno stesso numero di amici.

(A) • Usa $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$;

$$\begin{aligned} & (1+2+\dots+(n-1)+n) + ((n-1)+\dots+2+1) = \\ & \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ & = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)[(n-1)+1]}{2} = \dots \end{aligned}$$

oppure

$$\begin{aligned} & (1+2+\dots+(n-1)) + n + ((n-1)+\dots+2+1) = \\ & \swarrow \quad \quad \quad \searrow \\ & = 2 \cdot \frac{(n-1)[(n-1)+1]}{2} + n = \dots ; \end{aligned}$$

• induzione :

$n=1$ ovvio ,

$$\begin{aligned} & (1+2+\dots+(n-1)+n) + (n+1)+n + ((n-1)+\dots+2+1) = \\ & \downarrow \quad \quad \quad \swarrow \quad \quad \quad \searrow \\ & = n^2 + (n+1)+n = (n+1)^2 . \end{aligned}$$

B

$$\begin{array}{r} a^3 \\ a^3 + 3a^2 + 3a + 1 \\ a^3 + 6a^2 + 12a + 8 \end{array} = (a+3)^3$$

$$3a^3 + 9a^2 + 15a + 9 = a^3 + 9a^2 + 27a + 27$$

$$2a^3 - 12a - 18 = 0$$

$$a^3 - 6a - 9 = 0$$

$a=3$ e' radice ($3^3 - 6 \cdot 3 - 9 = 0$) quindi

$$(a-3)(a^2+3a+3)=0$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} 3 & 1 & 0 & -6 & -9 \\ & & 3 & 9 & 9 \\ \hline & 1 & 3 & 3 & 0 \end{array}$$

ma $a^2+3a+3=0$ non ha radici reali ($\Delta < 0$)

pertanto $a=3$ e' l'unica radice reale.

C

$$\begin{cases} x=t^2 \\ y=t^3 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=x^3 \\ x \geq 0, y \in \mathbb{R} \end{cases}, \text{ l'insieme e'}$$

$$\mathcal{C}^+ \cup \{(0,0)\} \cup \mathcal{C}^- \quad \text{ove:}$$

$$\mathcal{C}^+ = \{(x, x\sqrt{x}) \mid x > 0\}$$

$$\mathcal{C}^- = \{(x, -x\sqrt{x}) \mid x > 0\}$$

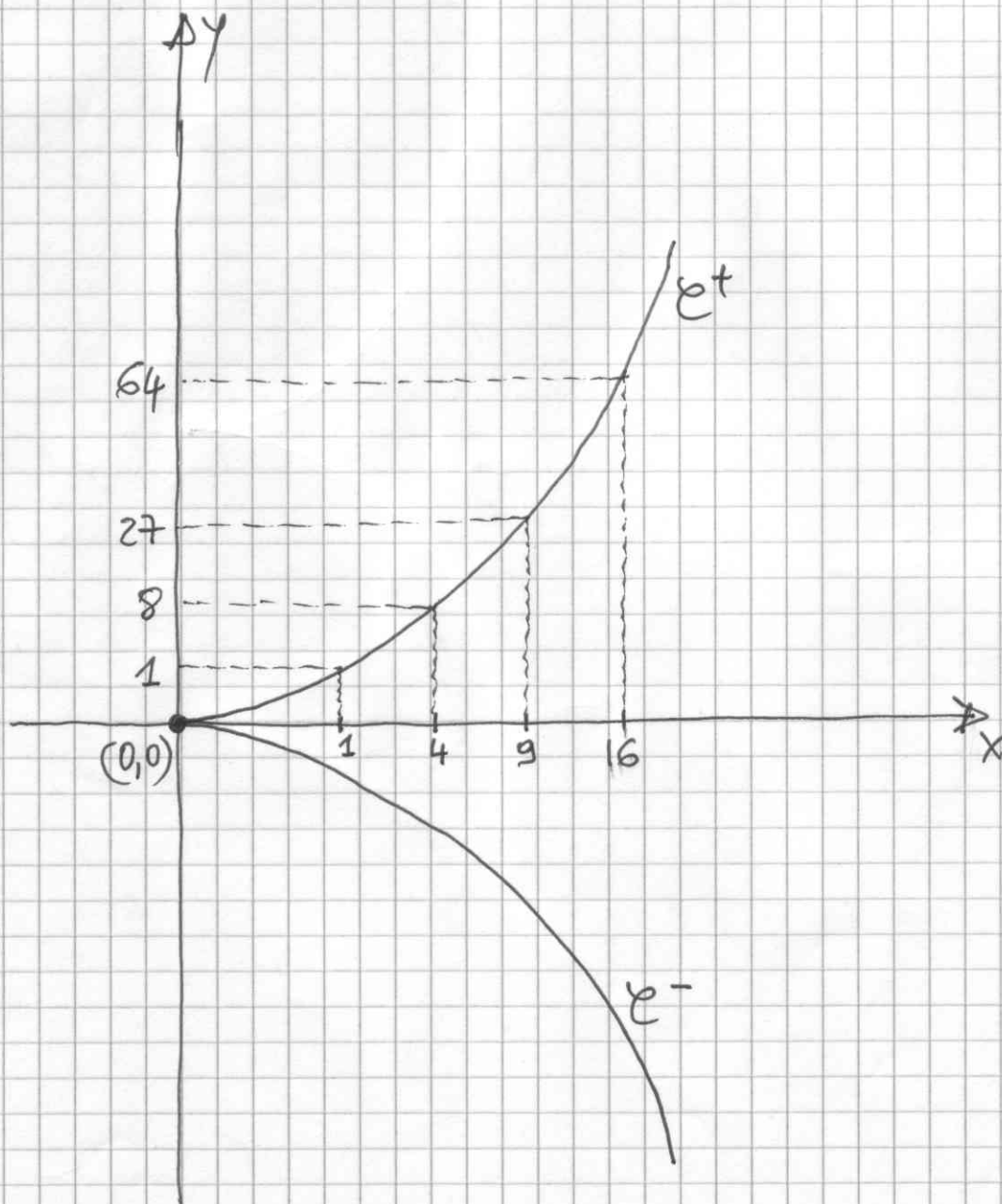
$\mathcal{C}^+$ e $\mathcal{C}^-$ simmetriche risp. all'asse x ,
studiamo solo $\mathcal{C}^+$ cioe' $y=x^{3/2}$ con $x > 0$

$$y > 0$$

$$y' = \frac{3}{2} x^{1/2} > 0 \Rightarrow y \text{ crescente}$$

$$y'' = \frac{3}{4} x^{-1/2} > 0 \Rightarrow y \text{ concava (concav. verso } \uparrow)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = 0 \Rightarrow \mathcal{C}^+ \text{ esce orizz.nte dall'origine}$$



D

$$x^3 - x^2 - x + 1 = x^2(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^2-1) \\ = (x-1)^2(x+1)$$

$$x^4 + 2 = x^4 + 2\sqrt{2}x^2 + (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2}x^2 = \\ = (x^2 + \sqrt{2})^2 - \sqrt{8}x^2 = \\ = (x^2 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt[4]{8}x)^2 = \\ = (x^2 + \sqrt{2} + \sqrt[4]{8}x)(x^2 + \sqrt{2} - \sqrt[4]{8}x)$$

E

2 dispari differiscono sempre di un pari, perciò

$$a = 2k-1 + 2h, \quad b = 2k-1 \quad \text{con } h, k \in \mathbb{Z}$$

$$a^2 - b^2 = (2k-1)^2 + 4h(2k-1) + 4h^2 - (2k-1)^2 =$$

$$= 4h(2k-1+h), \quad \text{distinguiamo 2 casi:}$$

- h pari cioè $h = 2u$ con $u \in \mathbb{Z}$, q.d.

$$a^2 - b^2 = 8u(2k-1+2u) \Rightarrow 8 \mid a^2 - b^2,$$

- h dispari cioè $h = 2u-1$ con $u \in \mathbb{Z}$, q.d.

$$2k-1+h = 2k-1+2u-1 = 2(k+u-1), \quad \text{q.d.}$$

$$a^2 - b^2 = 4h \cdot 2(k+u-1) \Rightarrow 8 \mid a^2 - b^2.$$

(n.b. $x \mid y$ significa x divide y)

F

iniettiva no x.d. $f(3;2) = f(2;3)$

suriettiva si x.d. $f(z-5;5) = z \quad \forall z \in \mathbb{Z}$

Ⓖ UFFA!

$\sqrt{6}$ e' irraz. xde' e' radice dell'equaz. a coeffic. interi $x^2 - 6 = 0$ che puo' avere come radici raz. solo $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ (che, tra l'altro, non sono radici).

Ⓕ Supponiamo (p.a.) che $MCD(a, b) = d > 1$

cioe' $a = du, b = dv$ con $u, v \geq 1$

(cioe' $u+v \geq 2$), coniche'

$$p = a + b = d(u+v) \Rightarrow d \mid p$$

ma p e' primo e pertanto solo 2 casi sono possibili:

- $d = 1$ in contraddiz. con $d > 1$,
- $d = p \Rightarrow p = p(u+v) \geq 2p$ assurdo.

Ⓘ 3 casi:

- $m = n \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{m+1}{n+1},$
- $m < n \Rightarrow mn + m < mn + n \Rightarrow$
 $\Rightarrow m(n+1) < n(m+1) \Rightarrow \frac{m}{n} < \frac{m+1}{n+1},$
- $m > n \Rightarrow mn + m > mn + n \Rightarrow$
 $\Rightarrow m(n+1) > n(m+1) \Rightarrow \frac{m}{n} > \frac{m+1}{n+1}.$

(L)

Soluz. $A \cup B$ ove

$$A = \{(1; y) / y \in \mathbb{R}\}$$

reta // a y

$$B = \{(x; -2) / x \in \mathbb{R}\}$$

reta // a x

$$A \cap B = \{(1; -2)\}$$

