Corso di DIDATTICA DELLA MATEMATICA - A.A. 2006/7 - Prof. Maroscia

30·1·07

Esercizi (III)

1. Trovare due numeri razionali x, y tali che: $\frac{2003}{2005} < x < y < \frac{2004}{2005}$.

   E' possibile trovare un numero irrazionale α tale che: $\frac{2003}{2005} < \alpha < \frac{2004}{2005}$?

2. Verificare che $\sqrt{p}$ è un numero irrazionale, per ogni primo p.

   E' vero che anche $\sqrt[3]{p}$ è un numero irrazionale, per ogni primo p ?

3. Dato un quadrato magico 3×3

a	b	c
d	e	f
g	h	i

   con $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$ e somma costante S, verificare che risulta sempre: $S = 3e$.

4. E' vero che:

   (a) la somma di due quadrati magici 3×3 è ancora un quadrato magico?

   (b) il prodotto di un quadrato magico 3×3 per un numero reale è un quadrato magico?

   (c) l'insieme dei quadrati magici 3×3 a elementi reali risulta uno spazio vettoriale reale rispetto all'addizione e alla moltiplicazione per uno scalare?

5. Dati nel piano tre punti non allineati arbitrari A, B, C, quanti sono i parallelogrammi aventi tra i vertici i punti A, B, C ?

6. Dimostrare che un insieme finito costituito da n elementi ($n \geq 1$) possiede esattamente 2^n sottoinsiemi, dei quali metà sono "pari" e metà sono "dispari".

7. Verificare che, se una retta del piano di equazione $y = mx$ contiene un punto a coordinate intere, allora ne contiene infinite.

8. Siano $z_1, \dots, z_n$ le radici complesse n-esime dell'unità, con $n > 1$. E' vero che:

   (a) $z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0$?

   (b) $z_1 z_2 \cdots z_n = -1$?

9. Calcolare mentalmente il numero: $\dfrac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}$.

10. Scomporre i seguenti polinomi in fattori a coefficienti reali:

$$x^4 + 1, \quad x^4 - x^2 + 1, \quad x^4 + x^3 + x + 1$$

CENCI LUIGI

(1)

a) Inserimento di 2 numeri razionali x, y :

- procedo a botte di media aritmetica:

$$y = \frac{\frac{2003}{2004} + \frac{2004}{2005}}{2} ,$$

$$x = \frac{\frac{2003}{2005} + y}{2}$$

(dovrei però impegnarmi un po' per dire esattamente chi sono x e y).

- uso la seguente proprietà dei reali:

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall a, b, c, d \in \mathbb{R} \ , \text{ con } b, d > 0 \\ \dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d} \iff \dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d} \end{array}} \quad ; \quad \text{q. di}$$

$$y = \frac{2003+2004}{2005+2005} = \frac{4007}{4010} ,$$

$$x = \frac{2003+4007}{2005+4010} = \frac{6010}{6015} .$$

- semplicemente:

$$x = \frac{2003,1}{2005} = \frac{20031}{20050} ,$$

$$y = \frac{2003,2}{2005} = \frac{20032}{20050}$$

b) Trovare un irrazionale α tra $\frac{2003}{2005}$ e $\frac{2004}{2005}$:

se ne possono trovare non uno ma un'infinità numerabile e in una infinità numerabile di modi :

ad esempio

$$\alpha = \frac{2003 + \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{p}}}{2005}, \quad \text{oppure}$$

$$\alpha = \frac{2003 + \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{p}}}{2005}$$

$$\alpha = \frac{2003 + \frac{k^2}{k^2+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{p}}}{2005}$$

$$\alpha = \frac{2003 + \frac{k^3}{k^3+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{p}}}{2005}$$

- - - .

$\forall\, k, n, p > 0$ interi , con $n \geq 2$ e p primo.

La tecnica per provare che i vari α sopra costruiti sono irrazionali (algebrici) è standard:

si ipotizza (p.a.) che α sia razionale, si opera a partire da esso razionalmente (entro il campo $\mathbb{Q}$) con un # finito di passi fino ad isolare (pervenire a) $\sqrt[n]{p}$ che così verrebbe ad essere un razionale, in contraddizione col fatto che è irrazionale (vd. eserc. 2).

Ad esempio:

prendiamo $\alpha = \dfrac{2003 + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{2005}$ e

supponiamo sia razionale, allora dovranno essere razionali anche:

$\alpha \cdot 2005$

$\alpha \cdot 2005 - 2003$

$(\alpha \cdot 2005 - 2003)\cdot \frac{5}{4}$

$$\frac{1}{(\alpha \cdot 2005 - 2003)\frac{5}{4}} = \sqrt{2} \rightarrow \text{contraddiz.}$$

Variazioni sul tema

Inserire tra due raz. a, b con $a < b$

A) $M \geq 1$ → A.1) razionali / A.2) irrazionali $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_M$,

B) un'infinità numerabile di → B.1) razionali / B.2) irrazionali $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$

soluz.:

per A/B.1) $\alpha_k = a + q(k)(b-a)$,

per A/B.2) $\alpha_k = a + q(k) \cdot \delta \cdot (b-a)$,

dove:

- δ e' un qls. irraz. / $0 < \delta < 1$, ad es.:

  $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{e}, \ldots$

- $q(k)$ e' una qls. funz. razionale di k t.c.

$$\begin{cases} 0 < q(k) < 1 \\ q(k) \text{ strettamente crescente} \\ \text{per } k = 1, \ldots, M \quad \text{nei casi A.1/2} \\ \text{per } k = 1, 2, \ldots \quad \text{" B.1/2} \end{cases} ;$$

ad es.:

$\frac{1}{M+2-k}, \frac{1}{3M-k}, \ldots$ nei casi A.1/2

$\frac{k}{k+1}, \frac{k^2}{k^2+1}, \frac{5k}{7k+2}, \ldots$ in tutti i casi

(2) $\sqrt[n]{p}$ è irrazionale, $\forall\, n, p > 0$ interi,

con $n \geq 2$ e p primo,

ciò perché $\sqrt[n]{p}$ è radice dell'equaz. a coeffic. interi $x^n - p = 0$ la quale può avere come radici razionali solo ± 1, $\pm p$ (che, tra l'altro, non sono radici).

(3) Riscrivo gli el.ti del quadrato attorno al centrale e tenendo conto delle somme costanti S su ogni riga e colonna e solo dopo avere completato il quadrato vincolo le due diagonali ad avere, ciascuna, somma S:

Passo 1: colonna centrale

b
e
$S-e-b$

Passo 2: riga centrale

d	e	$S-e-d$

pertanto

	b	
d	e	$S-e-d$
	$S-e-b$	

Passo 3: fisso un angolare e completo il quadrato

a	b	$S-a-b$
d	e	$S-e-d$
$S-a-d$	$S-e-b$	$a+b+d+e-S$

ultimo

Passo 4: condizioni sulle diagonali

$$\begin{cases} a+e+a+b+d+e-S=S \\ S-a-d+e+S-a-b=S \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a+b+d+2e=2S \\ -2a-b-d+e=-S \end{cases} \quad +$$

$$3e=S$$

.

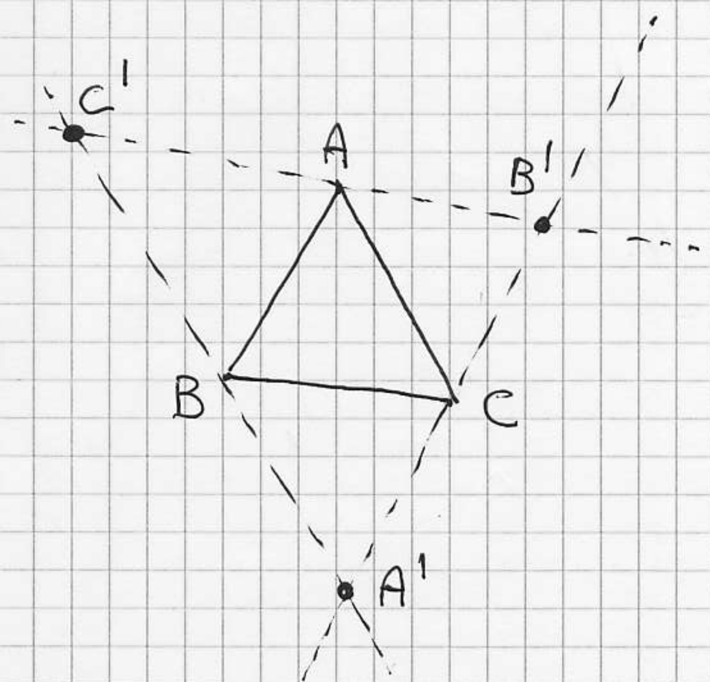
(4) 3 si! in particolare:

indicata con $S(Q)$ la somma costante di un quadrato magico $n \times n$, si ha:

a) $S(Q_1+Q_2)=S(Q_1)+S(Q_2)$,

b) $S(k \cdot Q)=k \cdot S(Q)$.

(5) 3 : A, B, C dati, costruisco $\overset{\triangle}{A'B'C'}$



tracciando da ogni vertice di $\overset{\triangle}{ABC}$ la // al lato opposto:

i //-grammi richiesti sono:

$ABCB'$

$ACBC'$

$ABA'C$.

(6) Uso i coeffic. binomiali:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \#\ \text{s.i. con } k \text{ el.ti}$$

$$\text{con } k = 0, 1, 2, \dots, n \,,$$

uso il triangolo di Pascal-Tartaglia-Zhu Shijie e costruisco il seguente schema:

n	2^n		# s.i. con numero di el.ti PARI (0 compreso)	# s.i. con numero di el.ti DISPARI
0	1	1		
1	2	1 1	1	1
2	4	1 2 1	1+1 = 2	2 = 2
3	8	1 3 3 1	1+3 = 4	4 = 3+1
4	16	1 4 6 4 1	1+6+1 = 8	8 = 4+4
5	32	1 5 10 10 5 1	1+10+5 = 16	16 = 5+10+1
⋮	⋮	...	---	---
	# s.i.	# s.i. con 0 1 2 3 4 5 ... el.ti.		

Uso binomio di Newton:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \,.$$

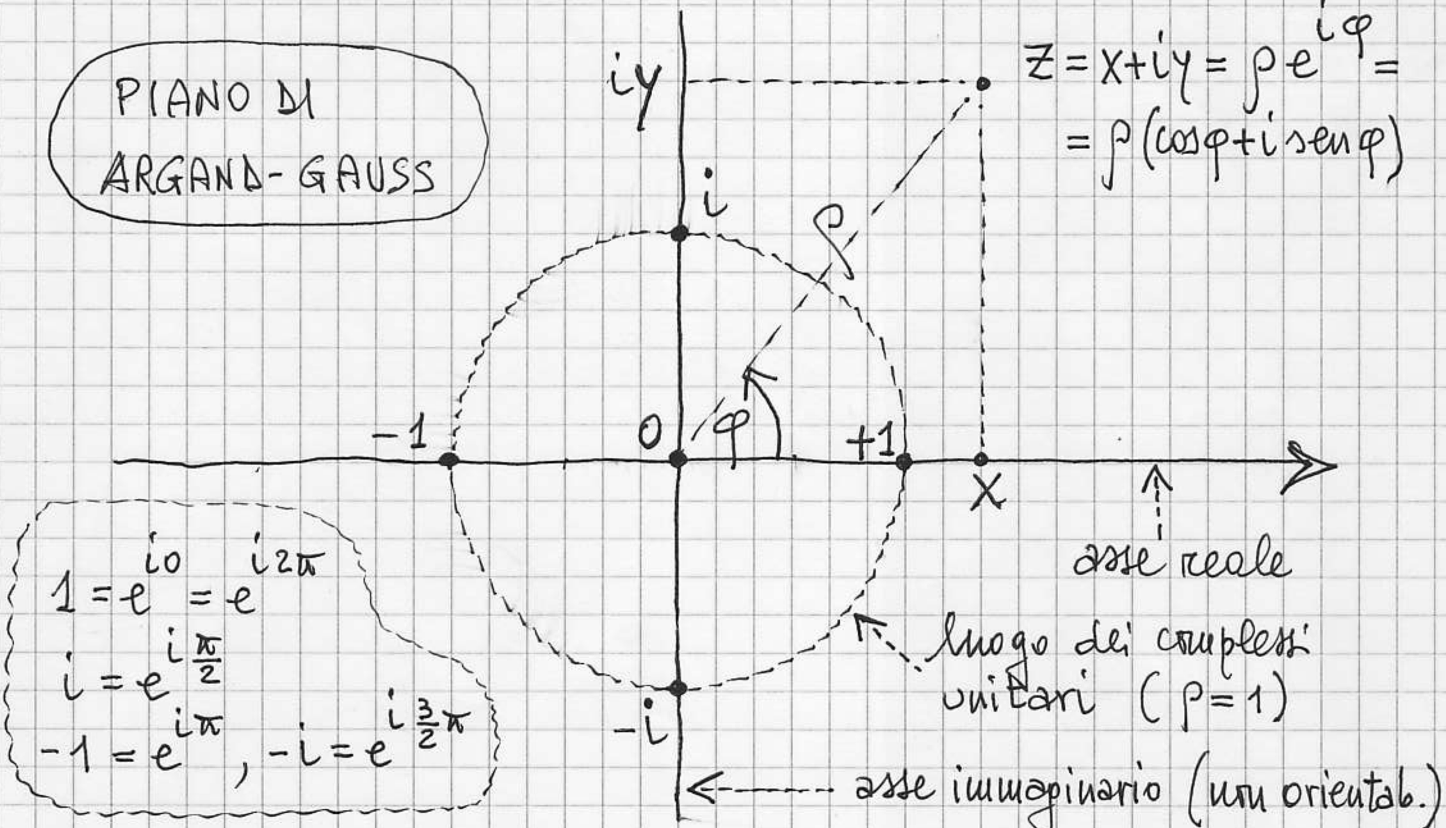
7) offensivo?

$r: y = mx$,

se $(p;q) \in r$ con $p, q \in \mathbb{Z}$ allora $q = mp$,
da cui (offensivamente?) $uq = mup \ \forall u \in \mathbb{Z}$,
da cui " " $(up; uq) \in r \ \forall u \in \mathbb{Z}$.

8) a) si!, b) 1 se n dispari; -1 se n pari.

I) uso le proprietà dei numeri complessi



le n radici n-esime dell'1 sono:

$$z_1 = 1, \ z_2 = e^{i\frac{2\pi}{n}}, \ z_3 = e^{i\frac{4\pi}{n}}, \ \dots, \ z_n = e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}$$

$\left[A^n - B^n = (A-B)(\dots) \right]$

a) $z_1 + z_2 + \dots + z_n =$

$$= 1 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^2 + \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^3 + \dots + \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{n-1} =$$

$$= \frac{1^n - \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = \frac{1 - e^{i2\pi}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = \frac{1-1}{1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0$$

b) $z_1 z_2 \cdots z_n = 1 \cdot e^{i \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2\pi k}{n}} =$ $\left(\sum_{k=1}^{\cdot} k = \frac{\cdot(\cdot+1)}{2} \right)$

$$= e^{i\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k} = e^{i\frac{2\pi}{n}\cdot\frac{(n-1)n}{2}} =$$

$$= \left(e^{i\pi}\right)^{n-1} = (-1)^{n-1} = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ disp.} \\ -1 & \text{se } n \text{ pari} \end{cases}.$$

II) dim. con le formule di Viète:

data l'equaz. a coeffic. in $\mathbb{C}$

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

con $a_n \neq 0$, dette $z_1, z_2, \dots, z_n$, le sue n radici in $\mathbb{C}$ (non necess.te tutte $\neq$), valgono le seguenti n relazioni tra radici e coeffic., conosciute come

formule o identità di Viete:

1ª) la somma delle radici $\sum_{i=1}^{n} z_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = (-1)^1 \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n}$

2ª) la somma dei prodotti delle radici a 2 a 2 $\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} z_i z_j = +\frac{a_{n-2}}{a_n} = (-1)^2 \cdot \frac{a_{n-2}}{a_n}$

3ª) la somma dei prodotti delle radici a 3 a 3 $\sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} z_i z_j z_k = -\frac{a_{n-3}}{a_n} = (-1)^3 \cdot \frac{a_{n-3}}{a_n}$

--- ... --- ---

$(n-1)$ª) la somma dei prodotti delle radici a $n-1$ a $n-1$ $\sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}=1 \\ i_1<i_2<\dots<i_{n-1}}}^{n} z_{i_1} z_{i_2} \cdots z_{i_{n-1}} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{a_1}{a_n}$

nª) il prodotto delle radici $z_1 z_2 \cdots z_n = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}$

Nel ns caso l'equaz. e'

$z^n - 1 = 0$ e cioe'

$a_n = 1$, $a_{n-1} = a_{n-2} = \ldots = a_2 = a_1 = 0$, $a_0 = -1$

da cui:

a) $\sum_{i=1}^{n} z_i = -\frac{0}{1} = 0$,

b) $z_1 z_2 \cdots z_n = (-1)^n \frac{(-1)}{1} = (-1)^{n+1} = \begin{cases} 1 & n \text{ disp} \\ -1 & n \text{ pari} \end{cases}$.

Esempi aggiuntivi ("potenza" delle form. di Viete):

- per $z^4 - 123 = 0$ valgono:

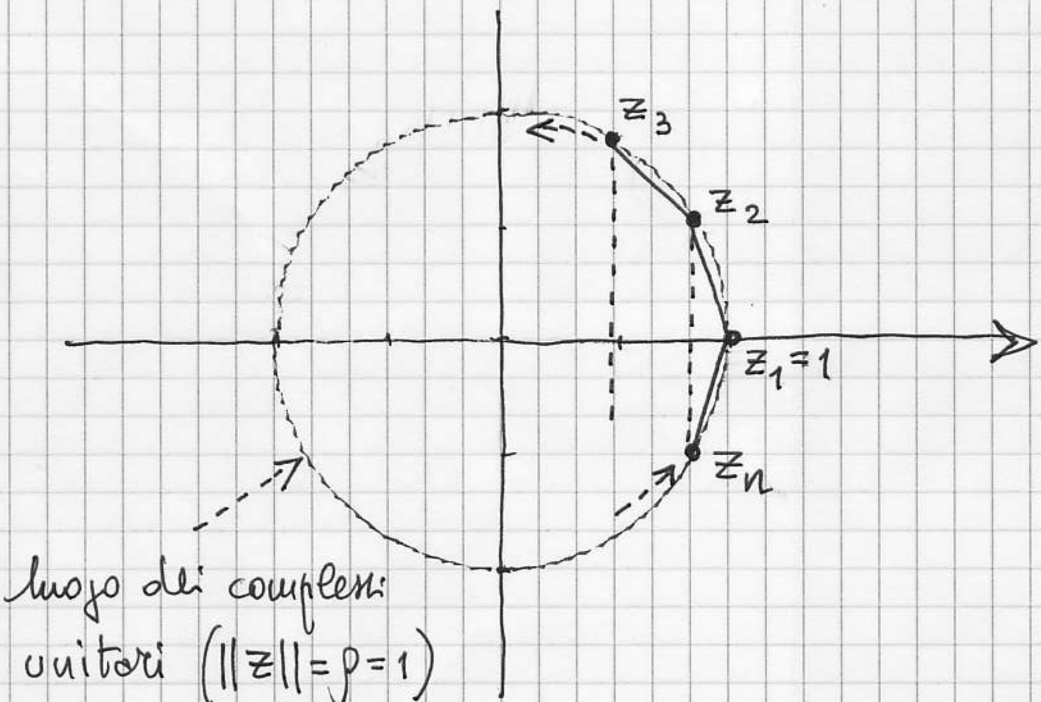
$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$$
$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_3 z_4 = 0$$
$$z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + z_2 z_3 z_4 = 0$$
$$z_1 z_2 z_3 z_4 = (-1)^4 \frac{(-123)}{1} = -123$$

- per $5z^3 - 2z^2 - 9 = 0$ valgono:

$$z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{(-2)}{5} = \frac{2}{5}$$
$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = 0$$
$$z_1 z_2 z_3 = -\frac{(-9)}{5} = \frac{9}{5}$$

III) Approccio induttivo-deduttivo

$z_1 = 1$ e' sempre radice n-esima dell'1, le altre n-1 si dispongono con indice progressivo in senso antiorario sul luogo dei complessi unitari, e tutte insieme sono i vertici di un poligono regolare.



Il poligono e' sempre simmetrico risp. all'asse reale e ciò comporta che il prodotto di 2 radici simmetriche (cioe' tra loro coniugate) e' 1 $(z\bar{z} = \|z\|^2)$.

<u>n.b.</u> Notazioni:

$\bar{z} = \overline{x+iy} = x - iy = \overline{\rho e^{i\varphi}} = \rho e^{i(-\varphi)}$ coniugato di z,

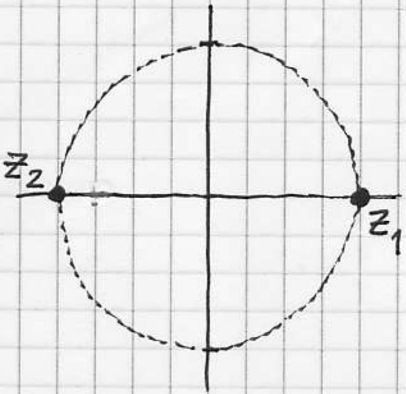
$\|z\| = \sqrt{x^2+y^2} = \rho$ modulo di z,

$x = \rho\cos\varphi = \mathrm{Re}\, z$ parte reale di z,

$y = \rho \operatorname{sen}\varphi = \mathrm{Im}\, z$ parte immaginaria di z,

$\varphi = \arg z$ argomento principale di z, $0 \le \varphi < 2\pi$.

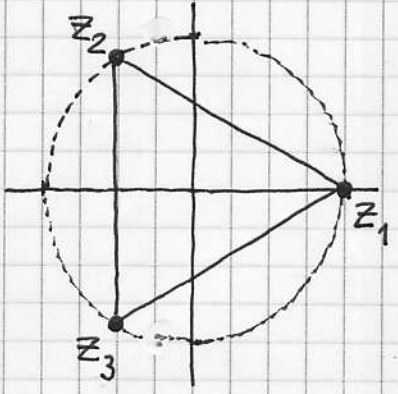
Esperimenti :



$n=2$

$z_1+z_2=+1+(-1)=0$;

$z_1z_2=(+1)(-1)=-1$.



$n=3$

$\arg z_2=\frac{2}{3}\pi$;

$\operatorname{Re} z_2=-\frac{1}{2}$;

$z_3=\overline{z_2}$;

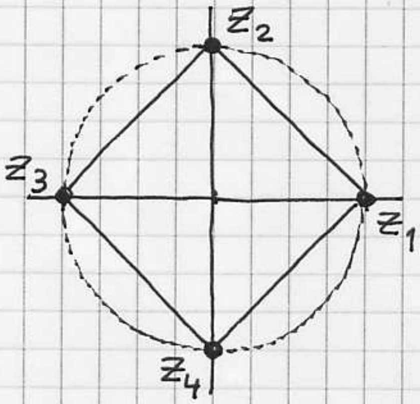
$z_1+z_2+z_3=$

$=1+2\operatorname{Re} z_2=$

$=1+2\left(-\frac{1}{2}\right)=0$,

$z_1z_2z_3=1\cdot z_2\overline{z}_2=$

$=\|z_2\|^2=1^2=1$.



$n=4$

$z_1+z_2+z_3+z_4=$

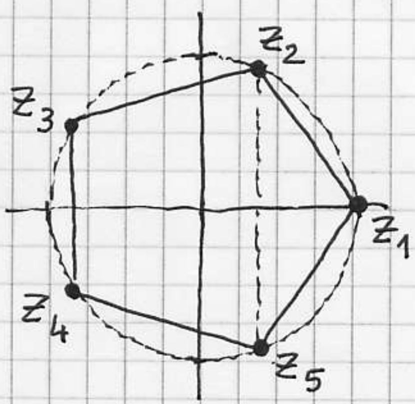
$=(+1)+i+(-1)+(-i)=0$;

$z_1z_2z_3z_4=$

$=1\cdot i\cdot(-1)(-i)=$

$=-(-i^2)=$

$=-[-(-1)]=-1$.



$n=5$

$\arg z_2=\frac{2\pi}{5}\ (72^\circ)$, $\operatorname{Re} z_2=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$;

$\operatorname{Re} z_3=\cos\frac{4\pi}{5}=-\cos\frac{\pi}{5}=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}$;

$z_4=\overline{z}_3 \Rightarrow z_3+z_4=2\operatorname{Re} z_3,\ z_3z_4=\|z_3\|^2$;

$z_5=\overline{z}_2 \Rightarrow z_2+z_5=2\operatorname{Re} z_2,\ z_2z_5=\|z_2\|^2$;

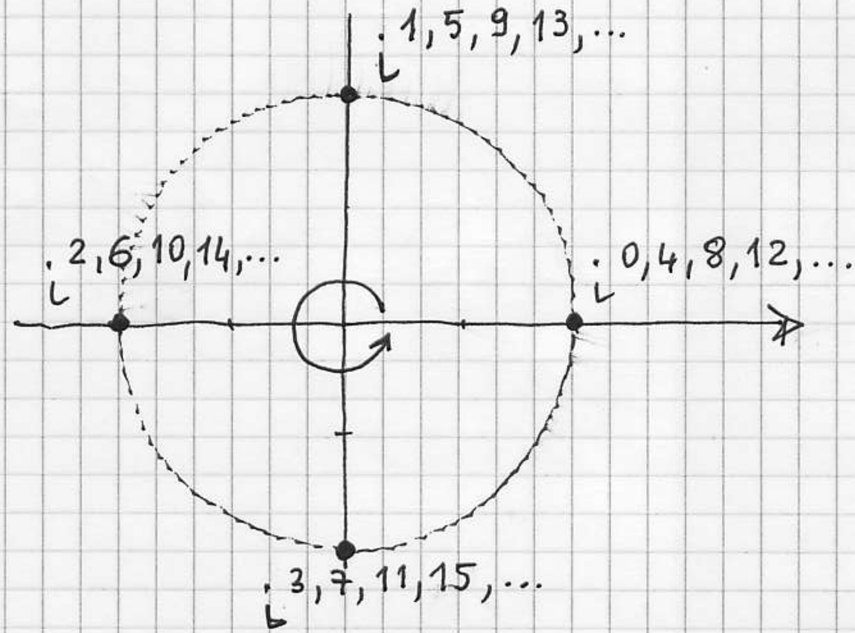
$z_1+z_2+z_3+z_4+z_5=1+2\,\frac{\sqrt{5}-1}{4}+2\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)=0$;

$z_1z_2z_3z_4z_5=1\cdot\|z_2\|^2\cdot\|z_3\|^2=1$.

Ci domandiamo q.d'è che $i, -1, -i$ sono radici n-esime dell'unità:

a partire dalla definizione $i^2=-1$ ricaviamo

$i^{4k}=1$, $i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$, $i^{4k+3}=-i$



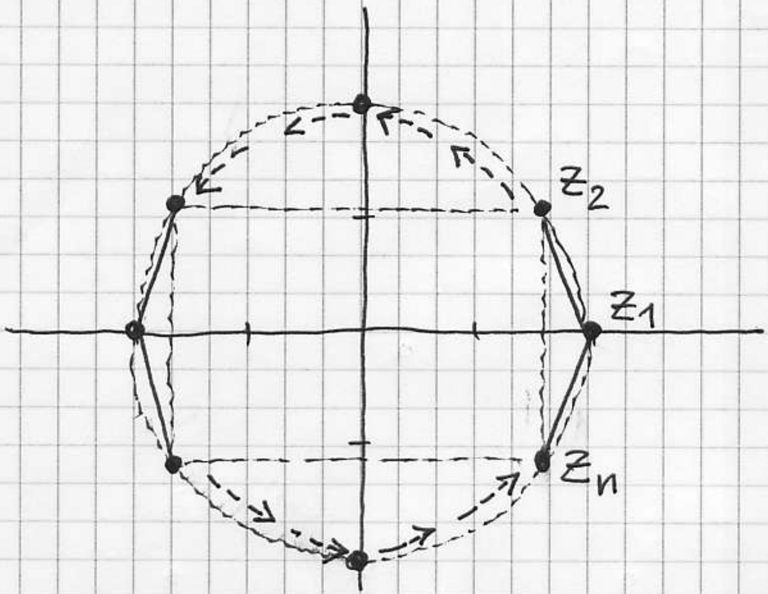
dalle suddette potenze di i (cicliche mod 4) ricavo:

$(-i)^{4k}=(-1)^{4k}i^{4k}=i^{4k}=1$, $(-i)^{4k+1}=(-i)^{4k}(-i)=-i$

--- cioè il seguente schema:

$k\geq 0$ intero		ESPONENTE n			
		PARI		DISPARI	
		$4k$	$4k+2$	$4k+1$	$4k+3$
BASE	i	1	-1	i	$-i$
	-1	1	1	-1	-1
	$-i$	1	-1	$-i$	i

•) Per n pari del tipo $4k$ $(k>0)$:

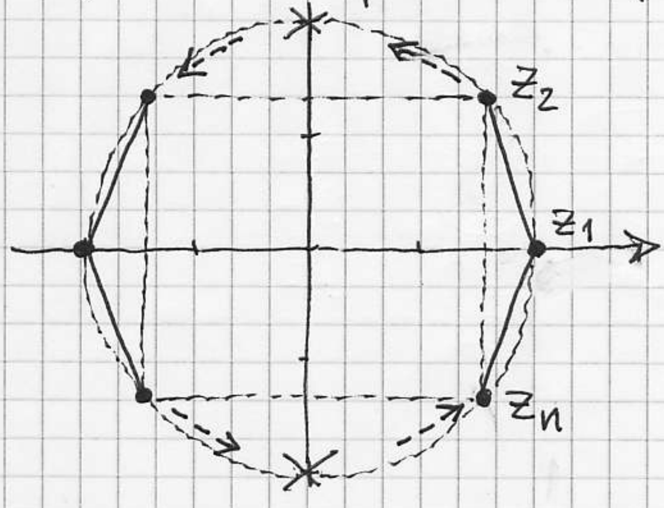


$1, i, -1, -i$ sono radici n-esime dell'unita', la loro somma e' nulla e il loro prodotto e' -1

il polig. regolare e' simm. anche risp. all'asse immag. e questo comporta che le altre $n-4$ radici n-esime dell'unita' oltre ad avere prodotto 1 (perche' simmetriche a coppie risp. all'asse reale, vale a dire coniugate a coppie) hanno anche somma nulla, e pertanto:

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0 + (\text{somma delle altre } n-4) = 0+0=0$$
$$z_1 z_2 \cdots z_n = (-1)\cdot(\text{prodotto delle altre } n-4) = -1\cdot 1 = -1$$

•) Per n pari del tipo $4k+2$ $(k>0)$:

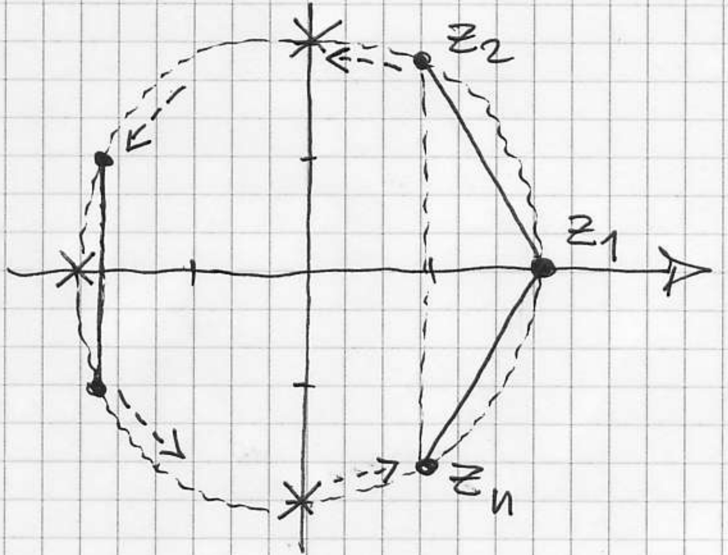


$1, -1$ sono radici n-esime dell'unita', $i, -i$ non sono radici n-esime dell'unita' il polig. regol. e' simmetr. anche risp. all'asse immag. cosicche' le altre $n-2$ radici n-esime dell'1 hanno somma nulla oltre al prodotto 1, pertanto

$$z_1+z_2+\cdots+z_n = 1+(-1)+0 = 0,$$

$$z_1\cdot z_2\cdots z_n = 1\cdot(-1)\cdot 1 = -1.$$

•) per n dispari (>1)



$i, -1, -i$ non sono radici n-esime dell'1

il poligono non e' simmetrico risp. all'asse immagin., per le altre $n-1$ radici posso dire al solito che hanno prodotto 1 cosicche' $z_1 z_2\cdots z_n = 1\cdot 1 = 1$

mentre <u>dovrei</u> provare che

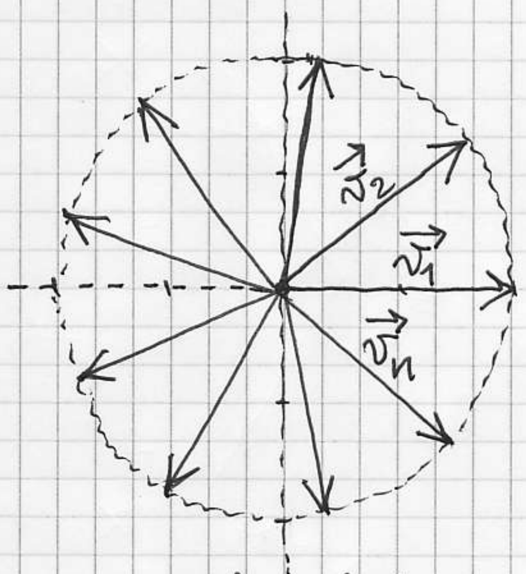
$$z_2+z_3+\cdots+z_n = -1 \quad ?$$

•) per n pari / disp. > 1

potrei provare che $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 0$

con i vettori geometrici :

considerati n vettori applicati in uno stesso p.to e con 2^i estremi disposti su una crf. a formare un polig. regolare :



provare che il loro risultante è nullo, cioè che ciascuno è opposto ("bilancia") al risultante dei rimanenti ; ciò è ragionevole, e a livello fisico è evidente.

L'idea è costruire una poligonale partendo da $\vec{v}_2$ cui attacco $\vec{v}_3$, cui attacco $\vec{v}_4$, ..., fino ad attaccare $\vec{v}_n$ per ritrovarmi ad avere $-\vec{v}_1$.

IV) dim. della a) per via trigonometrica

utilizzando le due formule:

$$\text{IV.1)} \quad \sum_{k=0}^{m} \cos(A+kB) = \frac{\cos\left(A+m\frac{B}{2}\right) \operatorname{sen}\left[(m-1)\frac{B}{2}\right]}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}},$$

$$\text{IV.2)} \quad \sum_{k=0}^{m} \operatorname{sen}(A+kB) = \frac{\operatorname{sen}\left(A+m\frac{B}{2}\right) \operatorname{sen}\left[(m-1)\frac{B}{2}\right]}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}},$$

valide $\forall m \geq 0$ intero e $\forall$ coppia (A, B) di angoli;

riscriviamo le ns n radici n-esime dell'1 così:

$$z_1 = 1 = \cos\left(0 + 0 \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(0 + 0 \cdot \frac{2\pi}{n}\right),$$

$$z_2 = \cos\left(0 + 1 \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(0 + 1 \cdot \frac{2\pi}{n}\right),$$

$$z_3 = \cos\left(0 + 2 \cdot \frac{2\pi}{n}\right. + i \operatorname{sen}\left(0 + 2 \cdot \frac{2\pi}{n}\right),$$

...

$$z_n = \cos\left[0 + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right] + i \operatorname{sen}\left[0 + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right];$$

le sommo e uso IV.1/2) con $A = 0$, $B = \frac{2\pi}{n}$, $m = n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = \frac{\cos\left(\frac{n-1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2} \cdot \frac{2\pi}{n}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n}\right)} + i \, \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n-1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2} \cdot \frac{2\pi}{n}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n}\right)} =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{n-1}{n}\pi\right) \operatorname{sen}\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}} + i \, \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n-1}{n}\pi\right) \operatorname{sen}\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}} =$$

$$= 0, \quad \text{essendo } \operatorname{sen}\pi = 0.$$

<u>dim.</u> IV.1) [IV.2) e' analoga]

moltiplico per $\operatorname{sen}\frac{B}{2}$ ciascun addendo $\cos(A+kB)$

e uso la Werner $\cos p \operatorname{sen} q = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(p+q) - \operatorname{sen}(p-q)\right]$:

$$2\cos A \operatorname{sen}\frac{B}{2} = \operatorname{sen}\left(A + 1\cdot\frac{B}{2}\right) - \boxed{\operatorname{sen}\left(A - 1\cdot\frac{B}{2}\right)},$$

$$2\cos(A+B)\operatorname{sen}\frac{B}{2} = \operatorname{sen}\left(A+3\cdot\frac{B}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(A+1\cdot\frac{B}{2}\right),$$

$$2\cos(A+2B)\operatorname{sen}\frac{B}{2} = \operatorname{sen}\left(A+5\cdot\frac{B}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(A+3\cdot\frac{B}{2}\right),$$

- - -

$$2\cos\left[A+(m-1)B\right]\operatorname{sen}\frac{B}{2} = \operatorname{sen}\left[A+(2m-1)\frac{B}{2}\right] - \operatorname{sen}\left[A+(2m-3)\frac{B}{2}\right],$$

$$2\cos(A+mB)\operatorname{sen}\frac{B}{2} = \boxed{\operatorname{sen}\left[A+(2m+1)\frac{B}{2}\right]} - \operatorname{sen}\left[A+(2m-1)\frac{B}{2}\right];$$

sommandole si semplificano tutti i termini a destra tranne i due incasellati $\boxed{}$, q. di:

$$\left(2\operatorname{sen}\frac{B}{2}\right)\sum_{k=0}^{m}\cos(A+kB) = \operatorname{sen}\left[A+(2m+1)\frac{B}{2}\right] - \operatorname{sen}\left(A-\frac{B}{2}\right),$$

uso la prostaferesi $\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2\cos\frac{p+q}{2}\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$,

e il gioco e' fatto.

<u>Commenti</u>:

•) Le IV.1/2) servono a fattorizzare somme di soli coseni o di soli seni di angoli in progressione aritmetica; per ricordarle:

$$\frac{\begin{matrix}\underline{IV.1)}\ \cos \\ \underline{IV.2)}\ \mathrm{sen}\end{matrix}\left[1^\circ\,\mathrm{term} + (\#\,\mathrm{term}-1)\cdot \mathrm{rag}/2\right]\cdot \mathrm{sen}\left(\#\,\mathrm{term}\cdot \mathrm{rag}/2\right)}{\mathrm{sen}\left(\mathrm{rag}/2\right)}.$$

•) Per $n=1$ le $\underline{IV}.1/2)$ danno (sono) le prostaferesi:

$\underline{IV}.1)$ $\cos p + \cos q = \dots$ $\quad (A = p,\ B = q - p)$,

$\underline{IV}.2)$ $\mathrm{sen}\,p + \mathrm{sen}\,q = \dots$ $\quad (A = p,\ B = q - p)$,

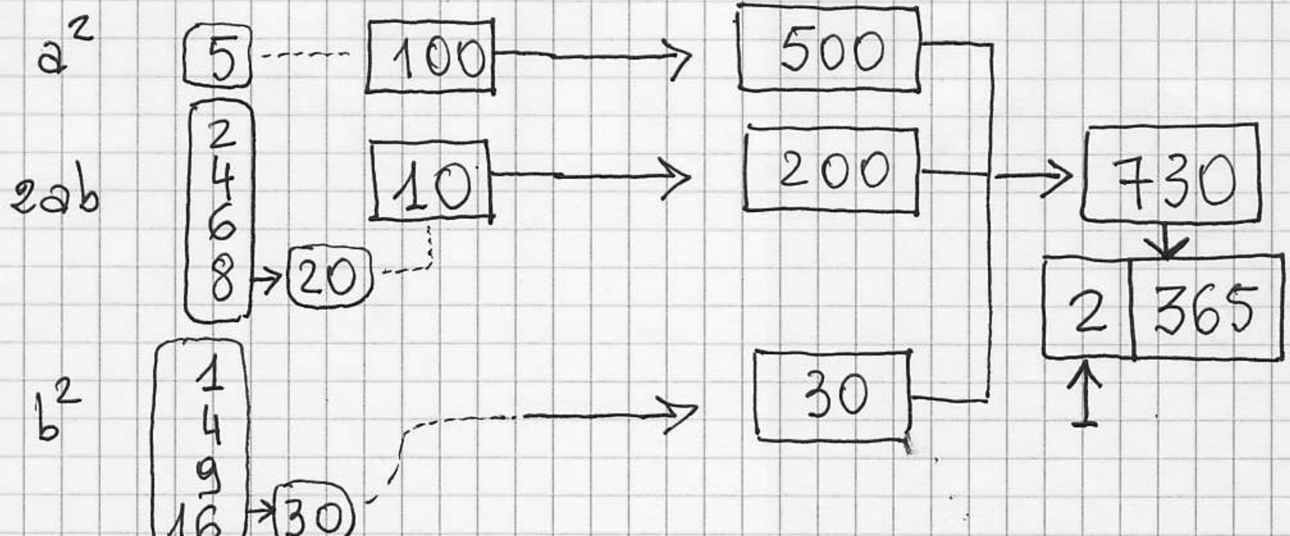
$\underline{IV}.1)$ $\cos p - \cos q = \dots$ $\quad (A = p,\ B = \pi - q - p)$,

$\underline{IV}.2)$ $\mathrm{sen}\,p - \mathrm{sen}\,q = \dots$ $\quad (A = p,\ B = -q - p)$.

9) Uso $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, cioè "vedo"

$$10^2 + (10+1)^2 + (10+2)^2 + (10+3)^2 + (10+4)^2$$

cosicché mentalmente costruisco la mappa:



10

$$x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2-(\sqrt{2}\,x)^2 =$$
$$= (x^2+1+\sqrt{2}\,x)(x^2+1-\sqrt{2}\,x) ;$$

$$x^4-x^2+1 = x^4+2x^2+1-3x^2 = (x^2+1)^2-(\sqrt{3}\,x)^2 =$$
$$= (x^2+1+\sqrt{3}\,x)(x^2+1-\sqrt{3}\,x) ;$$

$$x^4+x^3+x+1 = x^3(x+1)+(x+1) = (x+1)(x^3+1) =$$
$$= (x+1)(x+1)(x^2-x+1) = (x+1)^2(x^2-x+1) .$$