Corso di DIDATTICA DELLA MATEMATICA - A.A. 2006/7 - Prof. Maroscia

22.1.07

Esercizi (II)

*

1. Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha: $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. Calcolare la somma dei termini di una progressione geometrica della forma:
$$a, aq, aq^2, \ldots, aq^{n-1} \qquad (a, q \in \mathbb{R})$$

3. E' vero che l'inverso di $x = 1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ si scrive nella forma $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ con $a,b,c \in \mathbb{Q}$?

4. Trovare le radici reali dell'equazione: $\sin^6 x + \cos^6 x = 1$.

5. E' vero che l'unico triangolo rettangolo che ha i lati di lunghezza $a, a+1, a+2$, con $a \in \mathbb{R}$, è il triangolo egizio di lati $3, 4, 5$?

6. Perchè le radici complesse n-esime dell'unità, con $n \geq 3$, si rappresentano nel piano di Argand-Gauss con i vertici di un poligono regolare di n lati?

7. E' vero che risulta: $\dfrac{1+3}{5+7} = \dfrac{1+3+5}{7+9+11} = \dfrac{1+3+5+7}{9+11+13+15} = \cdots = \dfrac{1}{3}$?

8. E' possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ e $\mathbb{N}$?

9. Quanto misura ciascuno degli angoli interni di un pentagono regolare?

10. Stabilire se l'applicazione $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita: $f(x,y) = x+y$, è iniettiva o suriettiva.

11. Verificare che l'equazione $2x - 3y = 1$ possiede infinite soluzioni intere.

12. Dati nel piano due punti distinti $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, verificare che l'equazione:
$$(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$$
rappresenta una circonferenza. Di quale circonferenza si tratta?

13. E' vero che esistono infiniti numeri primi?

14. Stabilire se la relazione $\sim$ così definita in $\mathbb{N}$:
$$a \sim b \quad \text{se} \quad ab = u^2 \quad \text{con } u \in \mathbb{N} \qquad (a, b \in \mathbb{N})$$
risulta una relazione di equivalenza.

15. Dimostrare che, fissati arbitrariamente 5 punti all'interno di un triangolo equilatero di lato 1, esistono almeno due di essi la cui distanza è $\leq 1/2$.

16. Quanti sono gli sviluppi piani di un cubo <u>distinti tra loro</u>, cioè che non si possano ottenere l'uno dall'altro per mezzo di una isometria del piano?

MAROSCIA II

P. 1

CENCI LUIGI

(1) x induz. :

$n=1$ ovvio

$$1^2+2^2+\dots+(n+1)^2 = 1^2+2^2+\dots+n^2+(n+1)^2 =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \qquad 2n^2+7n+6=0 \quad n = \dots \begin{cases} -2 \\ -3/2 \end{cases}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)\left[(n+1)+1\right]\left[2(n+1)+1\right]}{6}$$

(1) metodo diretto : $X = \sum_{k=1}^{n} k^2$

$$\left.\begin{array}{ll} 1 & = 1^2 \\ 1+3 & = 2^2 \\ 1+3+5 & = 3^2 \\ --- & \\ 1+3+5+\dots+2n-3 & = (n-1)^2 \\ 1+3+5+\dots+2n-3+2n-1 & = n^2 \end{array}\right| +$$

$$1\cdot n \quad 3\cdot(n-1) \quad 5\cdot(n-2) \quad --- \quad (2n-3)\cdot 2 \quad (2n-1)\cdot 1$$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)(n-k+1) = X$$

spezzo la Σ e uso $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\sum (2k-1)(n+1) + \sum (2k-1)(-k) = X$$

$$(n+1)\sum(2k-1) - \sum 2k^2 + \sum k = X$$

$$(n+1)\,n^2 - 2X + \frac{n(n+1)}{2} = X \quad \ldots$$

(2)
$$X = a + aq + \cdots + aq^{n-1}$$
$$qX = \qquad aq + \cdots + aq^{n-1} + aq^n$$
$$X - qX = a - aq^n \quad \ldots$$

(3)
$$1 + \sqrt[3]{2} + \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 = \frac{1 - \left(\sqrt[3]{2}\right)^3}{1 - \sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1} \quad \ldots$$

(4) uso l'1. goniom. e I ident. Waring $A^2+B^2 = (A+B)^2 - 2AB$:

$$(\operatorname{sen}^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = 1 \qquad A^3 + B^3 = (A+B)(\ldots)$$

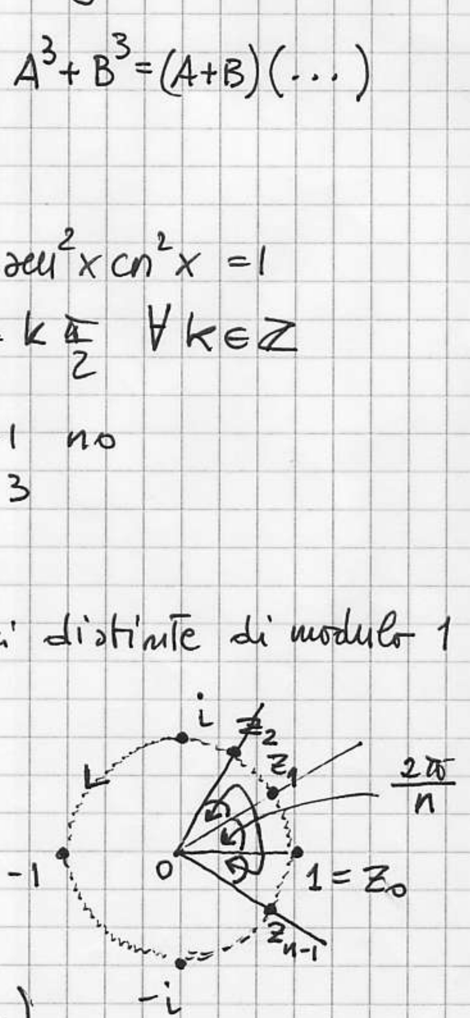
$$\operatorname{sen}^4 x - \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 1$$
$$(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = 1$$
$$\operatorname{sen} x \cdot \cos x = 0 \quad \to \quad x = k\frac{\pi}{2} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

(5)
$$(a+2)^2 = (a+1)^2 + a^2 \qquad \begin{cases} a = -1 & \text{no} \\ a = 3 \end{cases}$$

(6) in $\mathbb{C}$ $\quad z^n = 1$ ha n radici distinte di modulo 1

$$z_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi k}{2}$$

con $k = 0, 1, \ldots, n-1$



(che $z_h \neq z_k$ per $h \neq k$
e $h, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ e' un eserc.)

7 • percorso 1 :

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{k=1}^{2n}(2k-1)-\sum_{k=1}^{n}(2k-1)} = \frac{n^2}{(2n)^2-n^2} = \frac{1}{3} \;;$$

• percorso 2 :

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{k=1}^{n}(2n-1+2k)} = \frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n}(2n-1)+2\sum_{k=1}^{n}k} =$$

$$= \frac{n^2}{(2n-1)n + 2\cdot\frac{n(n+1)}{2}} = \dots = \frac{1}{3} \;;$$

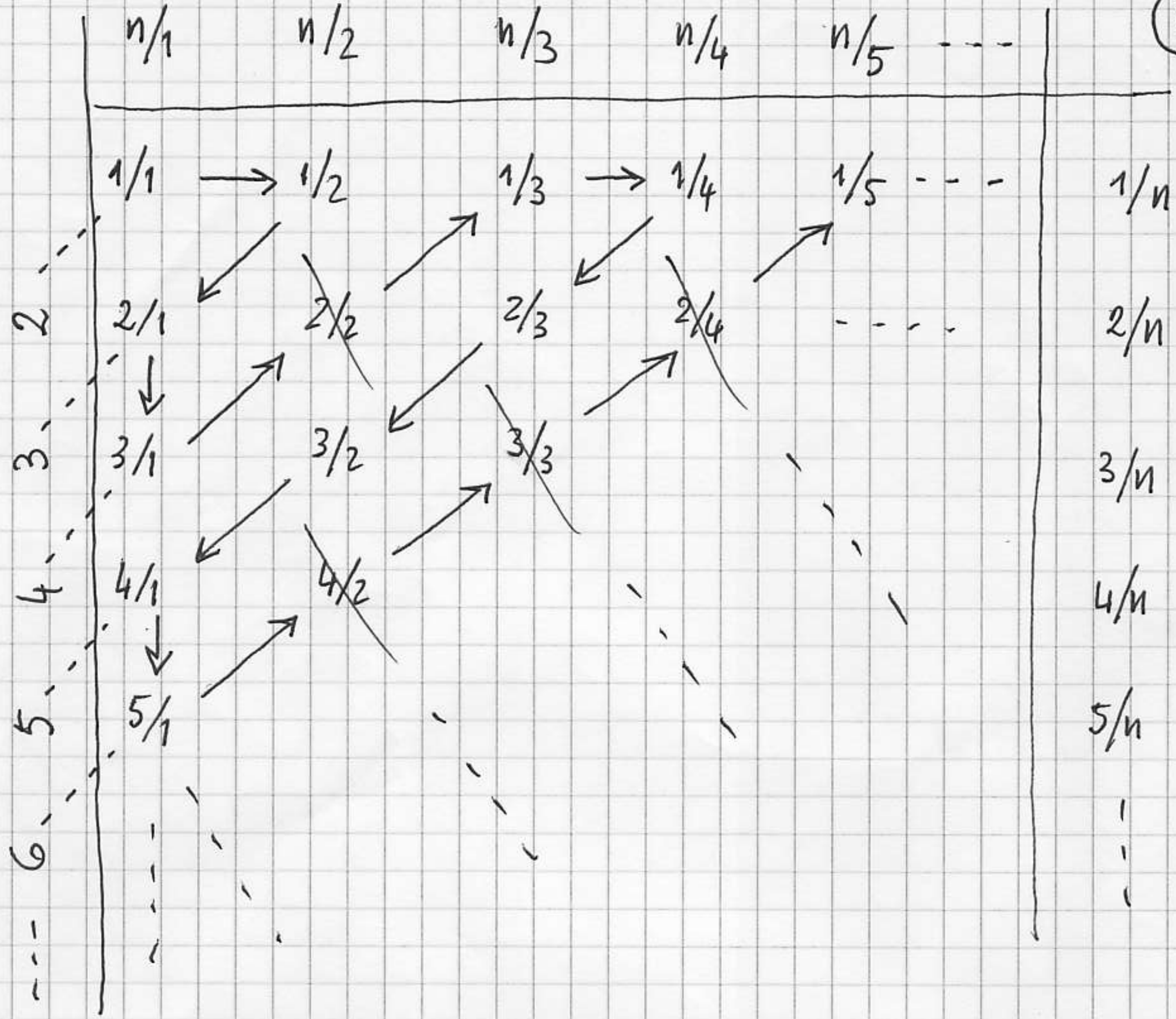
• percorso 3 :

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{k=n+1}^{2n}(2k-1)} = \left(\begin{array}{c}\text{sostituzione}\\ i=k-n \rightarrow k=n+i\\ k=n+1 \rightarrow i=1\\ k=2n \rightarrow i=n\end{array}\right)$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{i=1}^{n}\left[2(n+i)-1\right]} \longrightarrow \text{percorso 2} .$$

8 Sì! con procedimento diagonale di Cantor-Cauchy illustrato nel seguente grafico :

$\mathbb{Q}^+ = \{ p/q : p, q \text{ coprimi positivi} \}$



l'enumerazione di $\mathbb{Q}^+$ e' percio':

$1/1, \ 1/2, \ 2/1, \ 3/1, \ 1/3, \ 1/4, \ 2/3, \ 3/2, \ 4/1, \ 5/1, \ 1/5 \ \ldots$

(9) $\dfrac{(n-2)\pi}{n}$ con $n = 5 \rightarrow 108°$.

(10) iniettiva no xche' $f(2;3) = f(3;2)$

suriettiva si : " $f(z/2\,;z/2) = z$ $\quad \forall z \in \mathbb{R}$.

opp. " $f(z-1;1) = z$

(11) $\begin{cases} x = \dfrac{3y+1}{2} = 3k-1 \\ y = 2k-1 \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

(12) P_1 e P_2 verificano l'equaz. e questa sviluppata e' l'equaz. di una crf. di centro $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$, quindi e' la crf. per P_1 e P_2 e di centro il p.to medio di P_1P_2.

(13) sì! <u>dim. di Euclide</u>:

p.a. n° finito di primi $p_1 < p_2 < \dots < p_M$,

costruisco $P = p_1 p_2 \cdots p_M + 1$

che equivale a dire che la divisione di P per p_i da' quoz. $p_1 p_2 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_M$ e resto 1 (quoz. e resto sono unici),

osservo che $P > p_M$;

due possibilita':

- P primo e p. di contraddiz. giacche' p_M non sarebbe piu' il max. primo, opp.
- P composto e allora deve essere divisibile per almeno un p_i e cio' non e' possibile per p.to detto sopra;

conclusione: dato che in entrambi i casi si ha contraddiz. allora e' falsa l'ipot. che p_M e' il max. primo e p. di i primi non sono in n° finito.

(14) e' una relaz. di equivalenza (se $0 \notin \mathbb{N}$):

propr. riflessiva e simmetrica ovvie,
per verificare la propr. transitiva
uso Teor. fondamentale dell'Aritmetica
(fattorizzaz. unica in primi)

siano

$$u = u_1^{n_1} \cdots u_r^{n_r} \qquad n_i > 0 \quad i = 1, \dots, r$$

$$v = v_1^{m_1} \cdots v_s^{m_s} \qquad m_j > 0 \quad j = 1, \dots, s$$

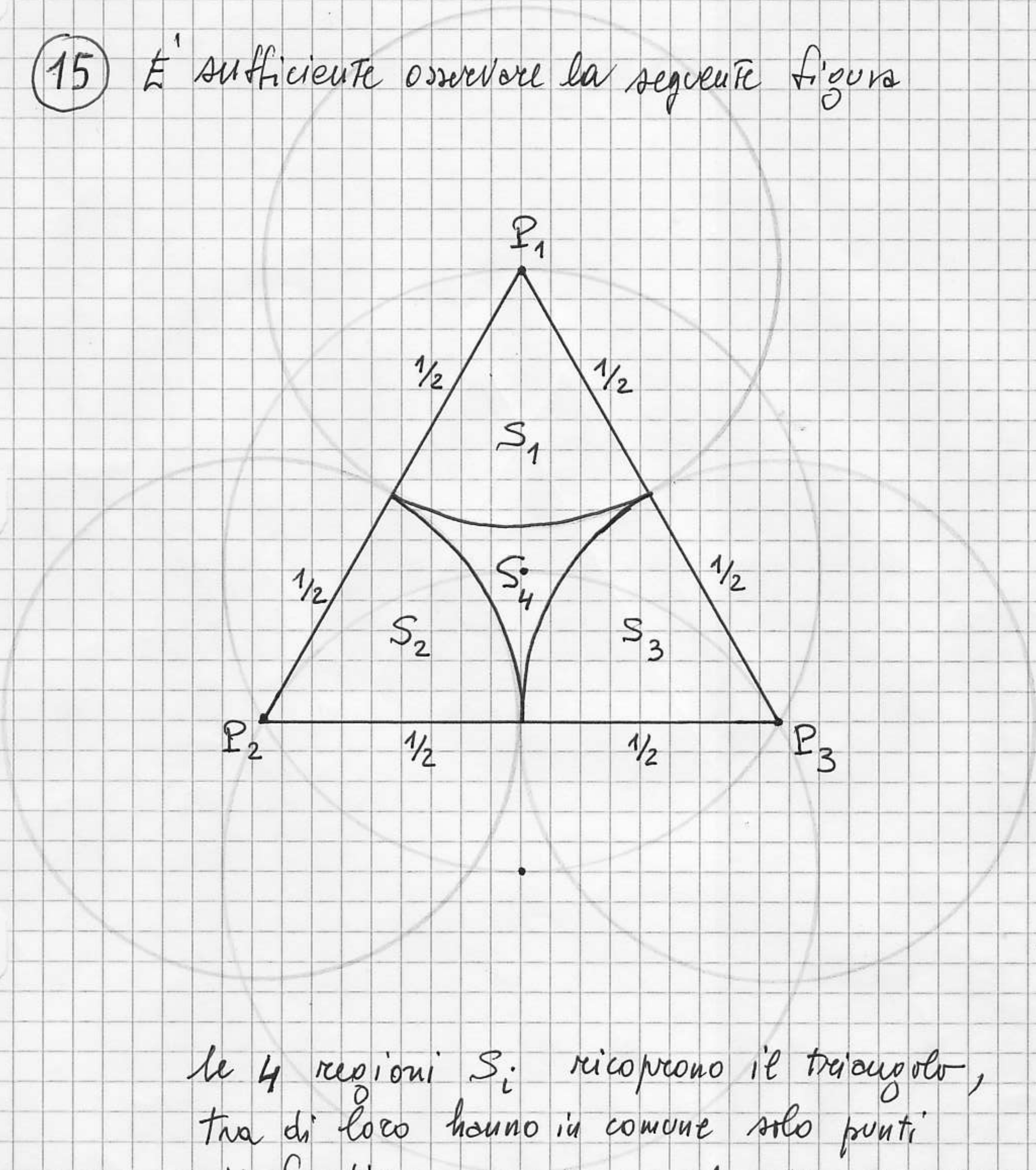
le fattorizzaz. (uniche) in primi di u e v,
WLOG possiamo supporre $u_i \neq v_j \ \forall i \neq j$;

se b e' primo:
allora (x Teor. fondam. Aritm.) b^2
coincide con un $v_j^{2m_j}$ o un
$u_i^{2n_i}$, cosicche' lo semplifico
e da $ab^2c = (uv)^2$ passo alla
$ac = (\ \ )^2$;

se b e' composto:
lo fattorizzo in primi
$b = b_1^{t_1} \cdots b_l^{t_l}$ e procedo $\forall b_k$ come sopra, cioe'
sempre per Teor. fondam. aritm.
ciascun $b_k^{2t_k}$ coincide con un $v_j^{2m_j}$ o
un $u_i^{2n_i}$, quindi lo semplifico, e alla fine
da $ab^2c = (uv)^2$ passo a $ac = (\ \ )^2$.

(WLOG = without loss of generality)

(15) E' sufficiente osservare la seguente figura



le 4 regioni S_i ricoprono il triangolo, tra di loro hanno in comune solo punti di frontiera e ciascuna ha <u>diametro</u> 1/2

(in uno spazio metrico il <u>diametro</u> di un insieme X e' il $\sup \{ d(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in X \}$ ove $d : X^2 \to \mathbb{R}$ e' la distanza)

cioe' ogni coppia di punti di S_i ha distanza (euclidea) $\leq \frac{1}{2}$ $\quad \forall\, i = 1, 2, 3, 4$.

7) x induzione

$$\frac{\sum \text{ dei primi } n \text{ dispari}}{\sum \text{ dei successivi } n \text{ dispari}} = \frac{1}{3}, \quad \forall n \geq 2$$

che è preferibile scrivere così:

$$3 \cdot \left(\sum \text{ dei primi } n \text{ dispari} \right) = \sum \text{ dei successivi } n \text{ dispari}, \quad \forall n \geq 2$$

cioè:

$$\boxed{3\,(1+3+\cdots+2n-1) = 2n+1+2n+3+\cdots+4n-1, \quad \forall n \geq 2}$$

- $n=2 \qquad 3\,(1+3) = 5+7 \qquad$ Ok
- $3 \cdot \left(\sum \text{ dei primi } n+1 \text{ dispari} \right) =$

$$= 3 \cdot (1+3+\cdots+2n-1+2n+1) =$$

$$= \underbrace{3 \cdot (1+3+\cdots+2n-1)}_{= \text{ per ipot. induttiva}} + 3\,(2n+1) =$$

$$= 2n+1+2n+3+\cdots+4n-1+6n+3 =$$

$$= +2n+3+\cdots+4n-1+6n+3+2n+1 =$$

$$= +2n+3+\cdots+4n-1+4n+1+4n+3 =$$

$$= \sum \text{ dei successivi } n+1 \text{ dispari}.$$