

Esercizi (I)

1. Dimostrare che, per ogni $n \geq 1$, valgono le seguenti uguaglianze:

$$(a) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(b) \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

2. E' vero che la somma dei primi n numeri dispari, con $n \geq 1$, è uguale a n^2 ?

3. Disporre in ordine crescente i seguenti numeri reali:

$$\frac{7}{3}, \quad \frac{4}{7}, \quad \frac{3}{4}$$

4. E' vero che un triangolo di lati 3, 4, 5 (centimetri) è rettangolo?

5. Quante sono le radici reali dell'equazione:

$$x + \sqrt{x+1} = 0 \quad ?$$

6. Verificare che il baricentro di un triangolo "divide" il triangolo stesso in sei triangoli tra loro equivalenti, cioè aventi la stessa area.

7. Dimostrare che per ogni coppia di numeri reali a, b non entrambi nulli si ha:

$$a^2 + b^2 + ab > 0$$

8. E' vero che per 3 punti del piano non allineati passa una e una sola circonferenza?

9. Verificare che l'equazione: $x^5 - 3x + 11 = 0$ non ha radici in $\mathbb{Z}$.

10. Perché la differenza tra un numero naturale e la somma delle sue cifre è sempre divisibile per 9?

11. Dimostrare che $\sqrt[3]{2}$ è un numero irrazionale.

12. Scrivere tutti i numeri da 1 a 10 utilizzando esattamente quattro 4 e le quattro operazioni.

13. E' possibile disegnare su un foglio di carta quadrettata un triangolo equilatero avente come vertici dei "nodi"?

14. Scrivere esplicitamente una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$.

Matroschia I

P. 1

CENCI LUIA

① 2

- X induz. :
n=1 ovvio

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + (n+1) &= 1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2} \end{aligned}$$

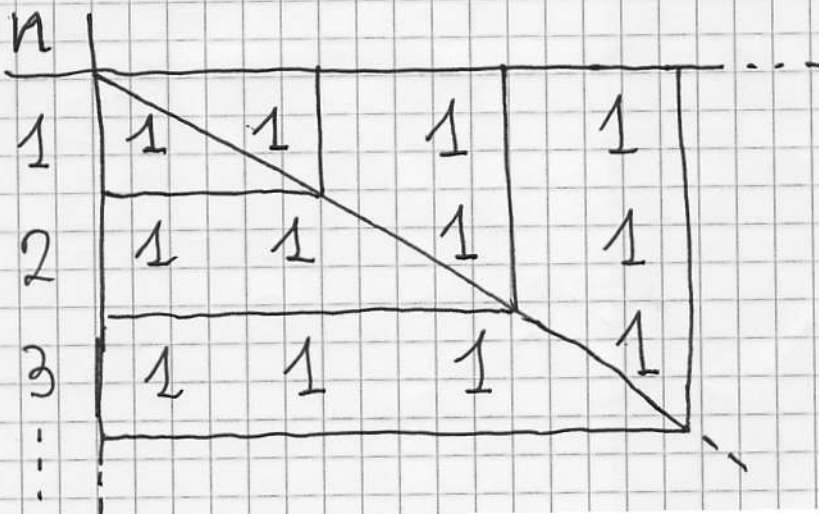
- metodo diretto alla Gauss:

$$\begin{array}{r} X = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n \\ X = n + (n-1) + \dots + 2 + 1 \end{array} \quad \Bigg| \quad +$$

$$2X = (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)$$

$$2X = n \cdot (n+1) \Rightarrow X = \frac{n(n+1)}{2}$$

- PWW (proof without words)



① b

- x induzione :

$n=1$ ovvio

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n+1)[(n+1)+1]} = \\
 & = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)[(n+1)+1]} = \\
 & = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2)n+1}{(n+1)(n+2)} = \\
 & = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{(n+1)+1}
 \end{aligned}$$

- metodo diretto :

decompongo in fratti semplici, cioè

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{(n+1)A + Bn}{n(n+1)}$$

$$\rightarrow n(A+B) + A = 1 \rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

quindi $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, per cui

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \\
 & = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \\
 & = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}
 \end{aligned}$$

② si !

- x induz. :
n=1 ovvio

$$\begin{aligned}
 & 1 + 3 + \dots + [2(n+1) - 1] = \\
 & = 1 + 3 + \dots + (2n-1) + [2(n+1) - 1] = \\
 & = n^2 + [2(n+1) - 1] = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2
 \end{aligned}$$

- metodo diretto alla Gauss :

$$\begin{array}{r}
 X = 1 + 3 + \dots + 2n-3 + 2n-1 \\
 X = 2n-1 + 2n-3 + \dots + 3 + 1
 \end{array} \Bigg| +$$

$$\begin{aligned}
 2X &= 2n + 2n + \dots + 2n + 2n \\
 2X &= n \cdot 2n \Rightarrow X = n^2
 \end{aligned}$$

- PWW

n				...
1	1	1	1	
2	1	1	1	
3	1	1	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

③ li confronto a coppie :

- confronto $3^{7/4}$ e $7^{4/3}$:

m.c.m. $(4, 3) = 12$, quindi

$$3^{7/4} = 3^{21/12} \left(= \sqrt[12]{3^{21}} \right)$$

$$7^{4/3} = 7^{16/12} \left(= \sqrt[12]{7^{16}} \right)$$

ora confronto 3^{21} e 7^{16}

$$7^{16} = (2 \cdot 3 + 1)^{16} > (2 \cdot 3)^{16} \quad (\text{binomio Newton})$$

provo che $2^{16} > 3^5$:

o a mano (o calcolatrice), oppure

$$2^{16} = (2^2 \cdot 2)^5 \cdot 2 > 3^5 \cdot 2 > 3^5$$

così che

$$7^{16} > (2 \cdot 3)^{16} = 2^{16} \cdot 3^{16} > 3^5 \cdot 3^{16} = 3^{21}$$

da cui (essendo $y = \sqrt[n]{x}$ crescente)

$$\text{ricavo } \sqrt[12]{7^{16}} > \sqrt[12]{3^{21}} \quad \text{cioè}$$

$$\boxed{7^{4/3} > 3^{7/4}}$$

- confronto $3^{7/4}$ e $4^{3/7}$:

m.c.m. $(4, 7) = 28$, quindi

P.5

$$3^{7/4} = 3^{49/28}$$
$$4^{3/7} = 4^{12/28}$$

confronto 3^{49} e 4^{12}

$$3^{49} = (2+1)^{48} \cdot 3 > 2^{48} \cdot 3 = 4^{24} \cdot 3 > 4^{24} > 4^{12}$$

cioè $3^{49/28} > 4^{12/28}$ da cui

$$\boxed{3^{7/4} > 4^{3/7}}$$

in conclusione

$$7^{4/3} > 3^{7/4} > 4^{3/7}$$

④ sì! Teorema pitagorico
(cioè teor. inverso di Pitagora)

⑤

• metodo 1 :

- isolare il radicale
- elevare al quadrato
- risolvere
- verificare con l'eq. iniziale

• metodo 2 :

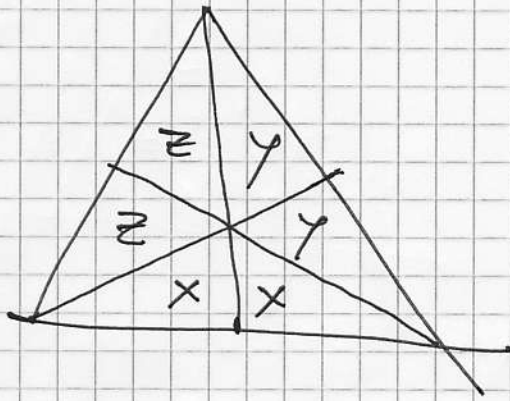
risolvere il sistema

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ -x \geq 0 \\ x+1 = x^2 \end{cases}$$

in entrambi i casi trova 1 sola soluz.

$$x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

(6)



le 2 aree indicate con x sono = x che
riferite a triang. con stessa altezza e basi
congruenti, così pure per le aree indicate
con y e z ;

i 2 triang. formati dai triangolini di
aree z, z e x e y, y e x hanno
stessa altezza e basi congruenti quindi
sono equivalenti, cioè

$$2z + x = 2y + x \Rightarrow z = y,$$

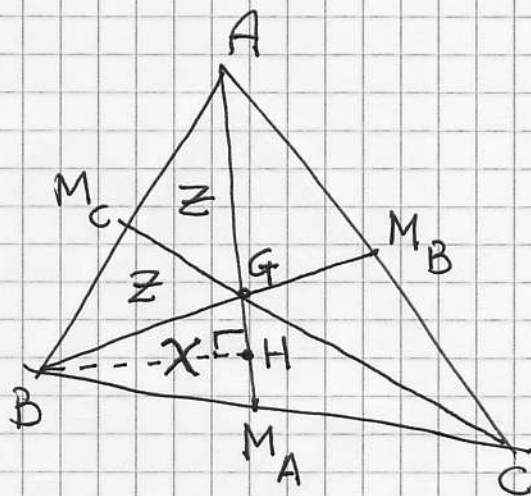
$$\text{analogamente } 2z + y = 2x + y \Rightarrow z = x,$$

$$\text{così che } z = y = x.$$

Aggiungiamo:

con suddette proprietà (e cioè che le
mediane dividono un triangolo in 6
triangolini equivalenti tra loro) si
prova la nota proprietà che il
baricentro divide ogni mediana in
2 parti in rapporto tra loro 2:1,
essendo la magg. quella comprendente il vertice:

7



$\triangle AGB$ e $\triangle GBM_A$ hanno stessa altezza BH, q. di
le relative aree stanno tra loro come le rispettive
basi, cioè $\frac{2Z}{X} = \frac{AG}{GM_A}$ e dato che $Z = X$
si ha $AG = 2GM_A$; analog. ut. si ha
 $BG = 2GM_B$ e $CG = 2GM_C$.

7 Dire che un n° x è un nullo equivale a
dire che $x^2 > 0$, dire che 2 n° x e y sono
non entrambi nulli equivale a dire $x^2 + y^2 > 0$.
Metodo esaustivo:

- $ab = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + ab = a^2 + b^2 > 0$;

- $ab \neq 0$, cioè $(a \neq 0) \wedge (b \neq 0)$:

- $a = b \Rightarrow a^2 + b^2 + ab = 3a^2 > 0$ ($= 3b^2 > 0$)

- $a \neq b \Rightarrow a^2 + b^2 + ab = \frac{a^3 - b^3}{a - b} > 0$

xc' $a - b$ e $a^3 - b^3$ sono concordi
in virtù di:

$$a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3 \text{ e } a > b \Leftrightarrow a^3 > b^3$$

⑧ Si! Ma facendola complicata:
detti P_1, P_2, P_3 i 3 p.ti distinti e non allineati,

Esistenze:

si prova che gli assi dei 3 segmenti P_1P_2, P_2P_3
e P_1P_3 concorrono in un p.to C ,

si prova che la circ. $\mathcal{C}$ di centro C e
raggio $r = \overline{CP_1}$ passa anche per P_2 e P_3
cioè che $\overline{CP_2} = \overline{CP_3} = r$;

Unicità:

se $\mathcal{C}'$ è una circ. di centro C' e raggio r'
passante per P_1, P_2 e P_3 allora C' equidista
da P_1, P_2 e P_3 e q.d. necess. $C' = C$
e $r' = r$, cioè $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$.

⑨ $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ e le eventuali radici raz. di 1 eq. a
coeff. interi devono essere del tipo p/q con
 p divis. del term. noto e q divis. del coeff. del term.
di gr. max. Nel ns caso il coeff. del term.
di gr. max è 1 mentre il term. noto è il primo 11,
cosicché le event. rad. raz. sono solo ± 1 e ± 11 e
visto che queste non sono radici ne segue che l'eq. a
data non ha radici raz. e tanto meno intere.

⑩ Si risolve con le congruenze modulo 9.

$\forall n \geq 2$ intero, con $A \equiv B \pmod{n}$, scritto
anche $A \equiv_n B$ ("A congruo B modulo n"),

si intende $A - B = kn$ con $A, B, k \in \mathbb{Z}$, cioè $A - B$ è divisibile per n .

Proprietà utilizzate:

- $A \equiv_n A \quad \forall A \in \mathbb{Z}$
- $A \equiv_n B \Leftrightarrow A - B \equiv_n 0$
- $A \equiv_n B \Rightarrow AC \equiv_n BC \quad \forall C \in \mathbb{Z}$, cioè i 2 membri di 1 congr. possono essere moltiplicati per uno stesso fattore;
- $(A \equiv_n B) \wedge (C \equiv_n D) \Rightarrow (A + C \equiv_n B + D) \wedge (AC \equiv_n BD)$, cioè le congr. possono essere sommate e moltiplicate membro a membro.

Scritto un naturale in notaz. decimale

$N = \sum_{i=0}^n a_i \cdot 10^i$, e abbreviato $\equiv_g$ con $\equiv$, si ha:

$$\begin{array}{rcl}
 1 & \equiv & 1 \quad \Rightarrow \quad a_0 \cdot 1 \equiv a_0 \cdot 1 = a_0 \\
 10 & \equiv & 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 \cdot 10 \equiv a_1 \cdot 1 = a_1 \\
 10^2 & \equiv & 1^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_2 \cdot 10^2 \equiv a_2 \cdot 1 = a_2 \\
 \dots & & \dots \\
 10^{n-1} & \equiv & 1^{n-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad a_{n-1} \cdot 10^{n-1} \equiv a_{n-1} \cdot 1 = a_{n-1} \\
 10^n & \equiv & 1^n = 1 \quad \Rightarrow \quad a_n \cdot 10^n \equiv a_n \cdot 1 = a_n
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} 1 & \equiv & 1 \\ 10 & \equiv & 1 \\ 10^2 & \equiv & 1^2 = 1 \\ \dots & & \dots \\ 10^{n-1} & \equiv & 1^{n-1} = 1 \\ 10^n & \equiv & 1^n = 1 \end{array}} \right\} +$$

$$N \equiv \sum_{i=0}^n a_i$$

(11)

$\sqrt[3]{2}$ non può essere razionale xché le uniche radici razionali di $X^3 - 2 = 0$ possono essere solo $\pm 1, \pm 2$.

(12)

$$0 = 44 - 44 ; 1 = \frac{44}{44} ; 2 = \frac{4}{4} + \frac{4}{4}$$

$$3 = \frac{4+4+4}{4} ; 4 = 4 + \frac{4-4}{4} ; 5 = \frac{4 \times 4 + 4}{4}$$

$$6 = 4 + \frac{4+4}{4} ; 7 = 4 + 4 - \frac{4}{4} ; 8 = 4 + 4 + 4 - 4$$

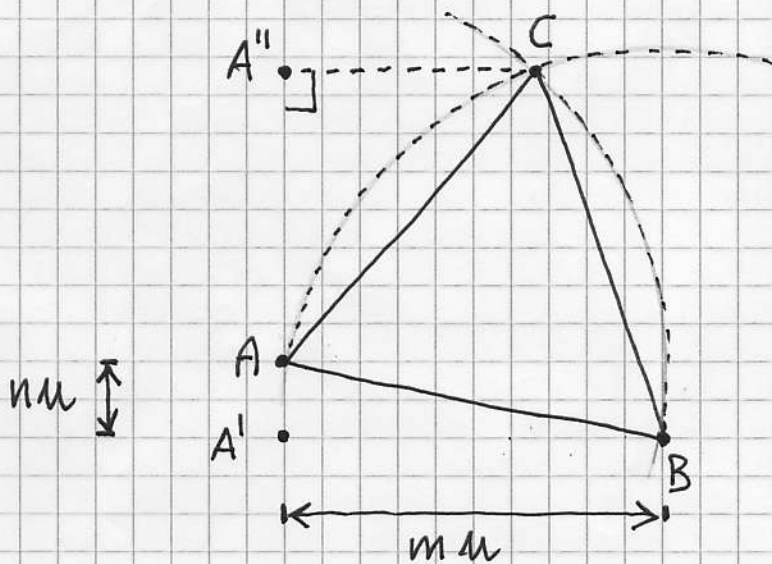
$$9 = 4 + 4 + \frac{4}{4} ; 10 = \frac{44 - 4}{4}$$

(13)

no! Detto m = lato del quadrato, consideriamo 2 vertici, A e B , su nodi:

1) nessun lato su righe orizz. o vertic.:

$m, n \geq 1$ interi

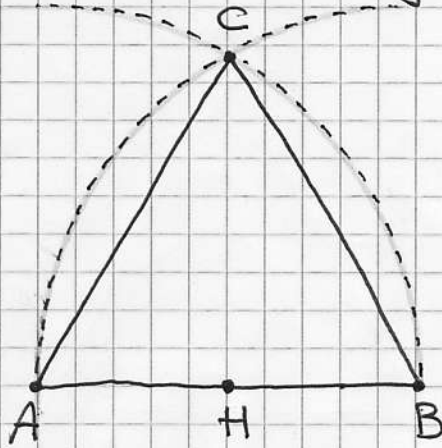


$$\begin{aligned} \frac{A''C}{n} &= \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{\sin\left[\pi - \left(\frac{\pi}{3} + \angle A'AB\right)\right]} = \\ &= \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \angle A'AB\right)} = \\ &= \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{2(m^2+n^2)}{\sqrt{3}n+m}$$

che non può essere intero perché il denominat. è irraz.

2) un lato su righe orizz. o vertic.:



necess. nte

$$\overline{AB} = 2k \text{ con } k \geq 1 \text{ int.},$$

$$\overline{CH} = k\sqrt{3} \text{ che non può}$$

essere intero dato che

il prodotto di un raz. $\neq 0$

per un irraz. dà un irraz.

(14) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$

$$\text{con } f(z) = \begin{cases} 2z & \text{se } z > 0 \\ -2z+1 & \text{se } z \leq 0 \end{cases}$$

f iniettivo: se $f(z_1) = f(z_2)$, allora:

$$\text{○ } 2z_1 = 2z_2 \text{ con } z_1, z_2 > 0 \text{ e p.d. } z_1 = z_2$$

$$\text{○ } -2z_1+1 = -2z_2+1 \text{ con } z_1, z_2 \leq 0 \text{ e}$$

$$\text{quindi } z_1 = z_2;$$

f suriettivo: se $n > 0$ intero, allora:

$$\text{○ } n = 2k \text{ con } k \geq 1 \text{ intero e p.d.}$$

$$\text{prendendo } z = k \text{ si ha } f(z) = 2k = n$$

$$\text{○ } n = 2k-1 \text{ con } k \geq 1 \text{ intero e p.d.}$$

$$\text{prendendo } z = -k+1 \text{ si ha}$$

$$f(z) = (-2)(-k+1)+1 = 2k-1 = n.$$