

DIDATTICA DELLA MATEMATICA - A.A. 2006/7

PAOLO MAROSCIA

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

UNIVERSITÀ DI ROMA "LA SAPIENZA"

INSEGNARE LA MATEMATICA

A TUTTI

OGGI

" LA MATEMATICA E' UN' ATTIVITÀ "

(H. FREUDENTHAL)

“ Nelle nostre scuole ,
generalmente parlando ,
si ride troppo poco .

L'idea che l'educazione
della mente debba essere
una cosa tetra è tra le più
difficili da combattere. “

(*G. RODARI*)

**“ Mathematics is the only
exact science where one
never knows what one is
talking about nor whether
what is said is true.”**

Bertrand Russell (1872 – 1970)

“ La Matematica è fatta
per il 50 per cento di formule,
per il 50 per cento di dimostrazioni,
e per il 50 per cento di immaginazione.”

(Anonimo)

CHE COS'E' LA MATEMATICA ?

- UN LINGUAGGIO
- UNA TECNICA
- UNO STRUMENTO DI CONOSCENZA
- SCOPERTA / INVENZIONE
- FILOSOFIA
- POESIA
- MUSICA
- ARTE
- GIOCO

-

Perciò la matematica la
quale misura quando il
piacer nostro non vuol
misura, definisce e
circoscrive quando il
piacer nostro non vuol
confini [...], analizza
quando il piacer nostro
non vuole analisi né
cognizione esatta della
cosa piacevole [...], la
matematica, dico,
dev'esser necessariamente
l'opposto del piacere.

(G. LEOPARDI)

A LESBIA

Vivamus, mea Lesbia, atque amemus,
Rumoresque senum severiorum
Omnes unius aestimemus assis;
Soles occidere et redire possunt;
Nobis cum semel occidit brevis lux,
Nox est perpetua una dormienda.

Da mi basia *mille*, deinde *centum*,
Dein *mille* altera, dein secunda *centum*,
Deinde usque altera *mille*, deinde *centum*.
Dein, cum milia multa fecerimus,
Conturbabimus illa, ne sciamus,
Aut ne quis malus invidere possit,
Cum tantum sciet esse basiorum.

(CATULLO)

LO ZERO E' UN NUMERO
MOLTO SPECIALE E INTRIGANTE...
SCONOSCIUTO NEL MONDO
CLASSICO E NEL MONDO ARABO,
INTRODOTTO IN ... INDIA

E GIUNTO IN EUROPA,
GRAZIE A LEONARDO PISANO^(*),

— VERSO IL 1200 d.C., CIRCA

— 1500 ANNI DOPO GLI

"ELEMENTI" DI EUCLIDE!

(*) CHIAMATO ANCHE FIBONACCI

IN GENERALE, LA MATEMATICA VIENE PERCEPITA
COME UNA DISCIPLINA

- ARIDA
- BRUTTA
- FREDDA
- TERRIBILMENTE RIGOROSA
- AL DI FUORI DEL TEMPO
- SENZA LEGAMI CON LE APPLICAZIONI
- ISOLATA RISPETTO ALLE ALTRE ATTIVITÀ UMANE

DUNQUE COME UNA DISCIPLINA "DISUMANA"

- FORSE LA MATEMATICA E' LA DISCIPLINA PIÙ ODIATA DAGLI STUDENTI (NON SOLO IN ITALIA !)
- INOLTRE GENERA ANSIA, ANGOSCIA, ...

BIBLIOGRAFIA

1) S. TOBIAS, COME VINCERE LA PAURA DELLA MATEMATICA, LONGANESI 1993

2) A. SIETY, MATEMATICA, MIO TERRORE, SALANI 2003

- IN ITALIA, IL PROBLEMA E' SOTTOVALUTATO

“ I matematici , poi , per i quali è inevitabile che l'animo sia separato dai sensi e quasi dal rapporto con il corpo per considerare e dimostrare cose assai astruse e lontane dalla realtà materiale , sono quasi tutti intontiti , indolenti , letargici e sempre estranei agli eventi umani...”

(B. RAMAZZINI, *De Malis Artificum*, 1700)

PRIMUM NON NOCERE

(IPPOCRATE ...)

SUMMUM IUS, SUMMA INIURIA

(CICERONE)

EST MODUS IN REBUS

(ORAZIO)

LA MATEMATICA VIENE DA LONTANO ...

TALETE (640 – 550 a.C.)

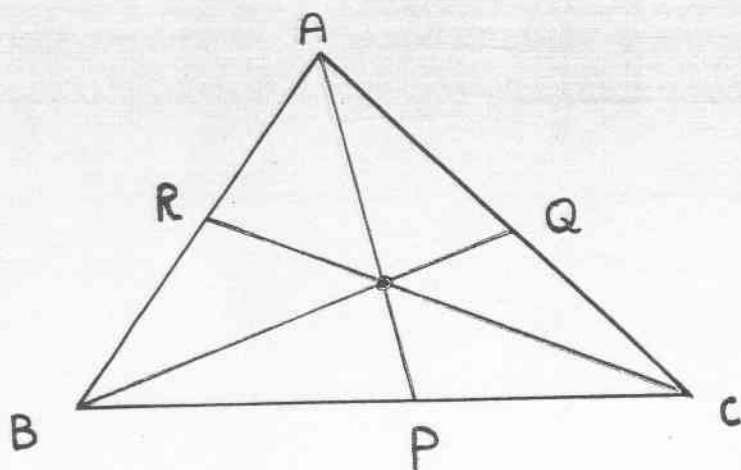
PITAGORA (580 – 500 a.C.)

PLATONE (427 – 347 a.C.)

EUCLIDE (~ 300 a.C.)

ARCHIMEDE (287 – 212 a.C.)

TEOREMA
DI CEVA



DATI 3 PUNTI P, Q, R RISPETTIVAMENTE SUI
LATI BC, CA, AB DI UN TRIANGOLO ARBITRARIO ABC,
LE RETTE AP, BQ, CR PASSANO PER UNO STESSO
PUNTO $\Leftrightarrow$ RISULTA :

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} = 1 \quad (\text{CEVA, 1678})$$

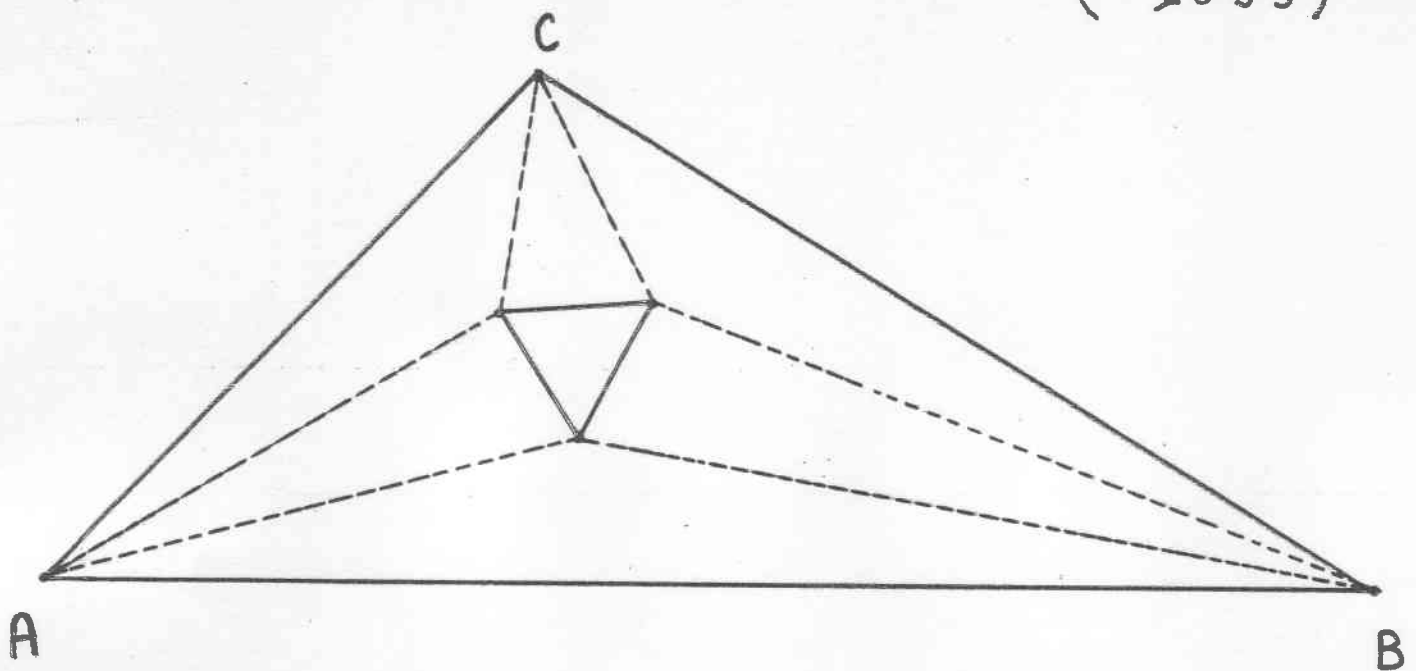
DAL TEOREMA DI CEVA DISCENDONO IN PARTICOLARE :

- (a) IL TEOREMA DELLE MEDIANE
- (b) IL TEOREMA DELLE BISETTRICI
- (c) IL TEOREMA DELLE ALTEZZE

RELATIVI A UN TRIANGOLO ARBITRARIO

TEOREMA DI MORLEY

(~1899)



LE TRISATTRICI DEGLI

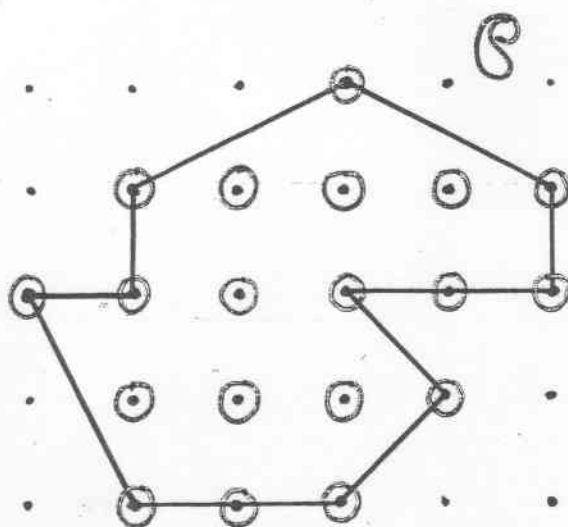
ANGOLI INTERNI DI

UN TRIANGOLO INDIVIDUANO

UN TRIANGOLO EQUILATERO

PROBLEMA

DATO NEL PIANO UN POLIGONO $\mathcal{C}$
AVENTE TUTTI I VERTICI NEI NODI
DI UN FOGLIO DI CARTA QUADRETTATA,
E' POSSIBILE CALCOLARE L'AREA DI $\mathcal{C}$
SEMPLICEMENTE CONTANDO I NODI
CONTENUTI IN $\mathcal{C}$, BORDO INCLUSO?



12 NODI SUL BORDO

7 NODI INTERNI

LA RISPOSTA È SÌ !

TEOREMA DI G. PICK (1899)

PER OGNI POLIGONO $\mathcal{P}$

AVENTE I VERTICI NEI NODI

SI HA :

$$\text{Area}(\mathcal{P}) = \frac{b}{2} + i - 1$$

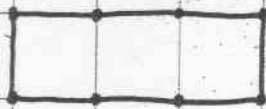
DOVE

$b = \# \text{ NODI SUL BORDO DI } \mathcal{P}$

$i = \# \text{ NODI INTERNI A } \mathcal{P}$



2



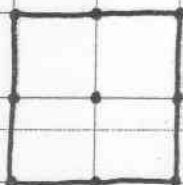
3



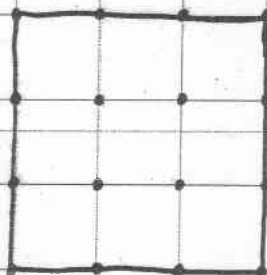
4



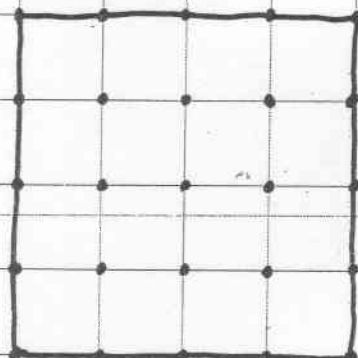
1



4



9



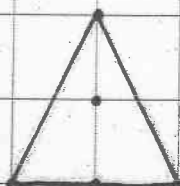
16



$\frac{1}{2}$



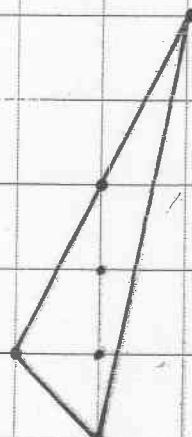
1



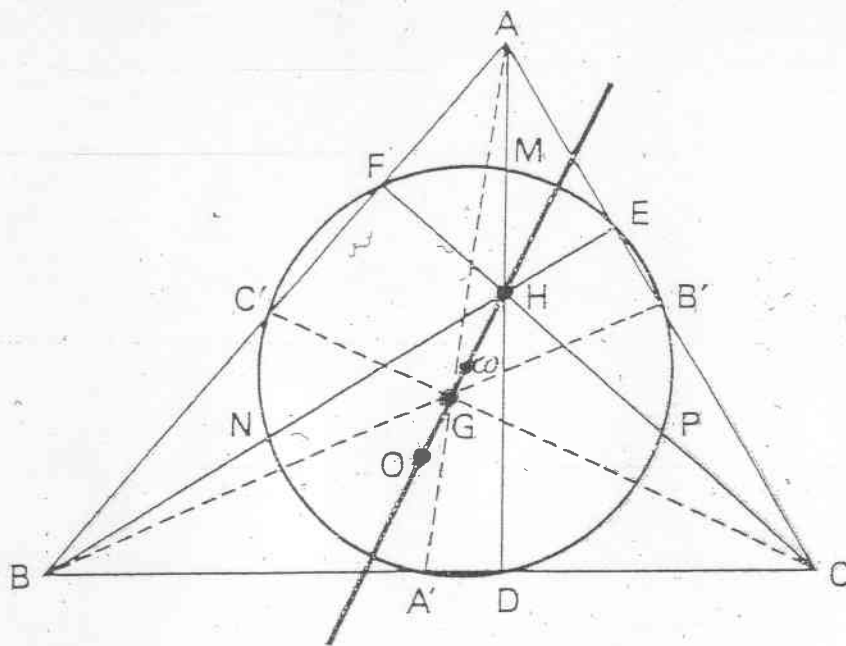
2



2



RETTA E CIRCONFERENZA DI EULERO



G = BARICENTRO

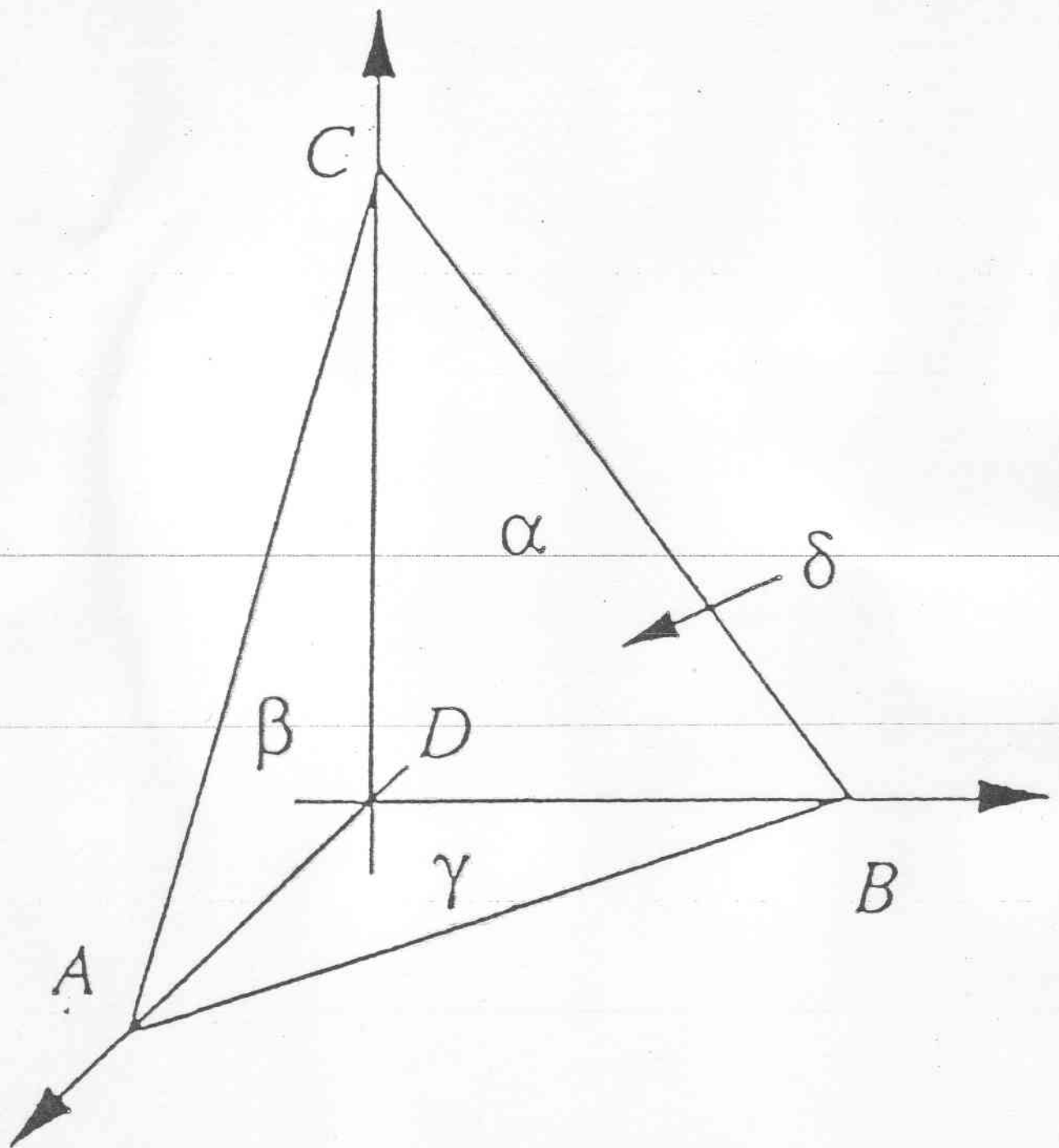
H = ORTOCENTRO

O = CENTRO DELLA CIRCONFERENZA CIRCOSCRITTA

ω = CENTRO DELLA CIRCONFERENZA DI EULERO

= PUNTO MEDIO DI OH

PITAGORA ...



$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \delta^2$$

UN' OCCHIATA AI LIBRI DI TESTO (!)

(I) ... BASTA SAPER RISOLVERE
UN' EQUAZIONE DI PRIMO GRADO PER
POTER DECIDERE SE L' UGUAGLIANZA
ASSEGNATA E' UNA EQUAZIONE DETERMINATA,
UNA FALSA UGUAGLIANZA (SE L'EQ. E' IMPOSSIBILE),
OPPURE UNA IDENTITA' ALGEBRICA (SE
L'EQ. E' INDETERMINATA).

[S. CIRILLO - N. SILVESTRI, ALGEBRA AUTOESPLICATIVA
SCUOLA MEDIA, FRATELLI FERRARO 1994]

(II) (a) ... PRINCIPIO DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO:

IL PRODOTTO DI DUE O PIU' FATTORI
E' NULLO SE ALMENO UNO
DEI FATTORI E' NULLO.

DEFINIZIONE . UN INSIEME A CHE E' DOTATO
DI UNA LEGGE DI COMPOSIZIONE INTERNA SI
CHIAMA INSIEME COMPONIBILE .

... I DUE ELEMENTI SUI QUALI SI
ESEQUE L'OPERAZIONE BINARIA SI CHIAMANO
OPERANDI .

... GLI OPERANDI SONO ANCHE CHIAMATI
FATTORI O TERMINI DELL'OPERAZIONE .

... L'ELEVAMENTO A POTENZA E'
L'OPERAZIONE CHE SOSTITUISCE LA
MOLTIPLICAZIONE NEL CASO IN CUI I
FATTORI SONO TUTTI UGUALI TRA LORO .

... E' NECESSARIO CHIARIRE CHE :

" SI CHIAMA ESPRESSIONE LETTERALE
UN INSIEME DI NUMERI RAPPRESENTATI IN TUTTO
O IN PARTE DA LETTERE , E LEGATI TRA LORO
DAI SEGNI DELLE OPERAZIONI CHE SI DEBONO
ESEGUIRE SU DI ESSI "

... INDICHEREMO GLI INTERI RELATIVI CON $Z_i (?)$

ESERCIZIO n. 1655 (su 4478)

UN NEGOZIANTE DI LIBRI USATI
 VENDE IN UN PRIMO MOMENTO, $(2x+3)$ LIBRI
 AL PREZZO DI $4(3x+236)$ LIRE CIASCUNO,
 ACQUISTA IN UN SECONDO MOMENTO $(x+2)$ LIBRI
 AL PREZZO DI $100(x+4)$ LIRE CIASCUNO
 E, IN UN TERZO MOMENTO, VENDE
 $4(x-1)$ LIBRI AL PREZZO DI $200(x+2)$ LIRE
 CIASCUNO.

ESPRIMERE IN FUNZIONE DI x IL RICAVO
 GLOBALE DOPO LE SUDETTE OPERAZIONI ^(*).

(*) LA CONDIZIONE ALLA QUALE DOVRÀ
 ESSERE SOTTOPOSTA LA x È RICAVABILE DA UNA
 NOTA PROPRIETÀ DELLA SOTTRAZIONE TRA NUMERI
 ASSOLUTI.

$$\left[(724x^2 + 2124x + 432) \text{ LIRE, con } x > 1 \right]$$

[R. FERRAUTO, I NUMERI E LE FUNZIONI,
 DANTE ALIGHIERI 1988.]

ESERCIZIO (n. 575)

LA STRADA TRA LENOLA E FONDI PRESENTA
a CURVE A DESTRA E b CURVE A SINISTRA.
NEL PRIMO TRATTO IL NUMERO COMPLESSIVO DI
CURVE E' UGUALE AL NUMERO COMPLESSIVO DEL
SECONDO TRATTO DIMINUITO DELLA METÀ DEL NUMERO
DELLE CURVE A DESTRA DELL' INTERO PERCORSO;

NEL SECONDO TRATTO IL NUMERO COMPLESSIVO DI
CURVE E' IL DOPPIO DEL NUMERO DI CURVE
DEL TERZO TRATTO AUMENTATO DI UN TERZO
DEL NUMERO DI CURVE A SINISTRA DELL' INTERO
PERCORSO.

QUANTE SONO LE CURVE DI CIASCUN TRATTO?

$$\left[\frac{3a + 14b}{30} ; \frac{9a + 7b}{15} ; \frac{9a + 2b}{30} \right]$$

(3) I PRINCIPIO DI EQUIVALENZA

AGGIUNGENDO O TOGLIENDO AD AMBO I MEMBRI DI UN'EQUAZIONE UNO STESSO NUMERO O UNA STESSA ESPRESSIONE ALGEBRAICA CONTENENTE L'INCOGNITA x (CHE SI POSSA CALCOLARE PER OGNI VALORE DI x), SI OTTIENE UN'EQUAZIONE EQUIVALENTE ALLA DATA.

Esercizio 6.116: AGGIUNGETE AL PRODOTTO DEL MONOMIO $5a$ PER LA DIFFERENZA DEL MONOMIO $-x$ CON IL MONOMIO $+\frac{3}{5}x$, IL QUOZIENTE DEL MONOMIO $-20a^4x^3y$ PER LA SOMMA DEL MONOMIO $-13a^3x^2y$ CON IL MONOMIO $8a^3x^2y$.
 $[-4ax]$

[L. ARTUSI CHINI - F. BONFANTI, LA MATEMATICA PER LA SCUOLA MEDIA, VOL. 3. LE MONNIER, 1989.]

UNA DISCUSSIONE CRITICA, MOLTO INTERESSANTE, RELATIVA ALLA PRESENTAZIONE DI ARGOMENTI DI ALGEBRA, SI TROVA IN:

V. VILLANI, ERRORI NEI TESTI SCOLASTICI: ALGEBRA. ARCHIMEDE, 51-65, Fasc. 2, 1993.

II. UN' OCCHIATA AI LIBRI DI TESTO (!)

(1) IN ALGEBRA UN' ESPRESSIONE COME : $36 R k l$,
 OPPURE $30 a c d$, OPPURE COME $4 x^2 y$, O COME $\frac{1}{2} m n^2$,
 O COME $\frac{3 w R}{x^2}$, NELLA QUALE LE VARIE QUANTITA'
 SONO LEGATE SOLO DALLA MOLTIPLICAZIONE O
 DALLA DIVISIONE , O DA ENTRAMBE , SI CHIAMA
MONOMIO .

[A. MONCHIERI , MATEMATICA OGGI , 1 - DE AGOSTINI 1992]
 (PER IL BIENNIO DELLE SCUOLE SUPERIORI)

(1') UNA SCRITTURA COMPOSTA DI NUMERI
 E LETTERE TRA I QUALI SI OPERI SOLO
 CON LA MOLTIPLICAZIONE (O LA SUA INVERSA)
 SI CHIAMA **MONOMIO** .

Esempio : $-\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{a} \cdot b^2 \cdot c^5$

[W. MARASCHINI - M. PALMA , PROBLEMI E MODELLI
 DELLA MATEMATICA PER LE SCUOLE MEDIE SUPERIORI ,
 Vol. A , PARAVIA 1986]

(2) UN POLINOMIO E' LA SOMMA ALGEBRICA
DI PIU' MONOMI NON SIMILI FRA LORO. [B.M.]

(2') CON IL TERMINE POLINOMIO INDICHIAMO
UNA SOMMA ALGEBRICA DI MONOMI NON SIMILI;
QUINDI UNA ESPRESSIONE NON ULTERIORMENTE
RIDUCIBILE AD UN SOLO MONOMIO. [W.M. - M.P.]

CURIOSITA'

- O E' UN MONOMIO ?
- O E' UN POLINOMIO ?
- x E' UN POLINOMIO ?
- $x + \sqrt{2}x$ E' UN MONOMIO ?
- $x + x^2 - 2x + 3x^2$ E' UN POLINOMIO ?
- $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ E' UN POLINOMIO ?
- E' POSSIBILE FARE LA SOMMA DI
DUE MONOMI NON SIMILI TRA LORO ?
- E' NECESSARIO DARE DEFINIZIONI FORMALI ESPLICITE ?

ALCUNI TIPI DI DIMOSTRAZIONE...

- D. CON L'IPOTESI AUSILIARIA ...
- D. PER ASSURDO
- D. CON IL CONTROESEMPIO ...
- D. PER DILEMMA (!)

SI BASA SULLA SEGUENTE FORMULA CHE,

COME PUOI VERIFICARE TU STESSO,

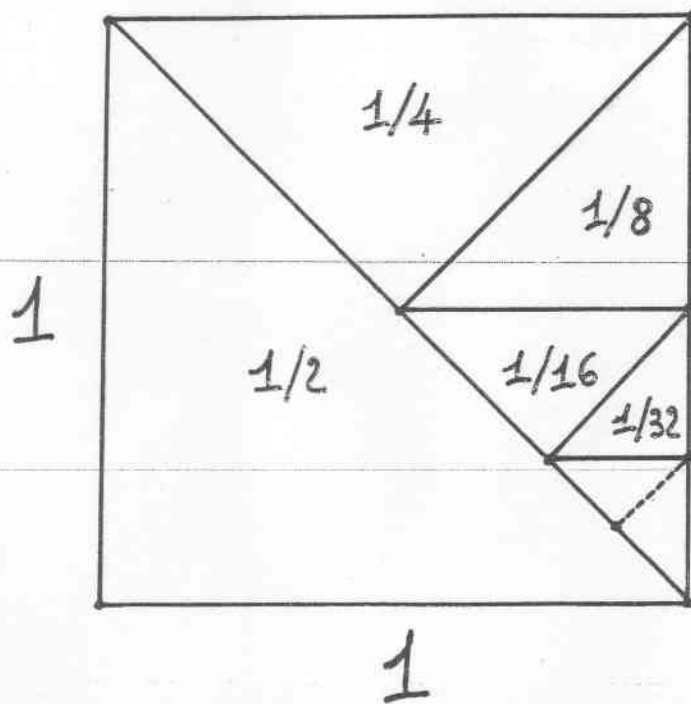
E' UNA TAUTOLOGIA :

$$\begin{aligned} &(((B \wedge A) \Rightarrow C) \wedge ((B \wedge D) \Rightarrow C) \wedge (A \vee D)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (B \Rightarrow C) \end{aligned}$$

EQUAZIONI ...

- ALGEBRICHE (INTERE)
 - ALGEBRICHE NUMERICHE
 - ALGEBRICHE LETTERALI
 - ALGEBRICHE FRAZIONARIE O FRATTE
 - BINOMIE, TRINOMIE, POLINOMIE O POLINOMIALI
 - BIQUADRATICHE
 - CARTESIANE
 - DI I GRADO
 - DI II GRADO (COMPLETE, INCOMPLETE)
 - DI II GRADO (PURE, SPURIE)
 - EQUIVALENTI
 - ESPONENZIALI
 - GONIOMETRICHE
 - IRRAZIONALI
 - IRRIDUCIBILI
 - LINEARI
 - LOGARITMICHE
 - OMogenee
 - PARAMETRICHE (LINEARI, OMogenee)
 - RECIPROCHE ...
 - RIDUCIBILI
 - RISOLVENTI (DI UN SISTEMA)
 - TRASCENDENTI
- MONOMIE
- 

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 1$$



" IL TRAMEZZINO INFINITO "

QUADRATI MAGICI ...

4	9	2
3	5	7
8	1	6

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

~ A. DÜRER, "MELENCOLIA I" (1514)

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

A. GAUDÌ (1852 - 1926)

"SAGRADA FAMILIA"

Italo CALVINO (1923-1985)

“LEZIONI AMERICANE”

(Valori letterari per il terzo millennio)

Leggerezza

Rapidità

Esattezza

Visibilità

Molteplicità

(Consistenza)

?

PERCHÉ SUGLI OROLOGI ...

ESPOSTI NELLE VETRINE DEI

GIOIELLIERI, LA POSIZIONE

DELLE LANCETTE

PIÙ DIFFUSA È

QUELLA SULLE

" 10 E 10 " ?

INSEGNA

COSÌ COME TI E' STATO INSEGNATO

NON E'

UN COMANDAMENTO DA RISPETTARE

(M. ARTIN, 1990)

La libertà di pensiero
ce l'abbiamo.

Adesso ci vorrebbe il pensiero.

(K. KRAUS)

ALCUNI PROBLEMI APERTI

1) E' VERO CHE OGNI NUMERO PARI > 2

E' LA SOMMA DI DUE NUMERI PRIMI ?

(CONGETTURA DI GOLDBACH, 1742)

2) ESISTONO INFINITE COPPIE

DI NUMERI PRIMI "GEMELLI" ?

[QUALI $(3, 5)$, $(5, 7)$, $(11, 13)$, $(17, 19)$, ...]

3) E' VERO CHE I NUMERI "PERFETTI"

SONO IN NUMERO INFINITO ?

[QUALI AD ESEMPIO :

$$6 = 1 + 2 + 3, \quad 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 \quad]$$

INOLTRE, ESISTONO NUMERI

"PERFETTI" DISPARI ?

COSA NON DOVREBBE FARE UN LIBRO DI TESTO...

(B. DE FINETTI, 1961)

1) NON AMMANNIRE NOZIONI, FORMULE E CONCLUSIONI DA IMPARARE A MEMORIA E DA TRANSGUGIARE AD OCCHI CHIUSI.

2) NON APPESANTIRE ED OSCURARE I CONCETTI CON TERMINOLOGIE POMPOSE E FORMULAZIONI ARTIFICIOSE.

3) NON ECCEDERE NEL SIMBOLISMO E NELL'USO DI ALGORITMI FACENDONE QUASI UN FINE A SE STESSO.

4) NON ANNOIARE E FAR ODIARE LA MATEMATICA PRESENTANDOLA COME ARIOSO STRUMENTO DI ACROBAZIE APPARENTEMENTE PRIVE DI SENSO E DI INTERESSE.

COME DOVREBBE ESSERE UN LIBRO DI TESTO ...

(B. DE FINETTI, 1961)

... TUTTO DEVE RIUSCIRE IN PRIMO
LUOGO INTUITIVO, NEL SENSO CHE
OCCORRE SOPRATTUTTO AFFERRARNE IL SENSO;
QUANTO AL RIGORE, E' BENE, DOPO,
FARNE INTUIRE L'ESIGENZA MOSTRANDO
LE INSUFFICIENZE CHE PUÒ AVERE LA
PRIMA INTERPRETAZIONE INTUITIVA,
INSEGNANDO AD AVVICINARVISI CON
LA RIFLESSIONE CRITICA E IN QUALCHE
CASO (OVE POSSIBILE A SCOPO ESEMPLIFICATIVO)
RAGGIUNGERLO.