

Es14: a e b naturali dispari $\Rightarrow 8 \mid a^2 - b^2$

$$a \text{ dispari} \Rightarrow a = 2k+1$$

$$b \text{ dispari} \Rightarrow b = 2h+1$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$= (2k+1+2h+1)(2k+1-2h-1)$$

$$= (2k+2h+2)(2k-2h) = 4(k+h+1)(k-h)$$

• k pari e h pari

$$4(2k'+2h'+1)(2k'-2h') = 8(2k'+2h'+1)(k'+h')$$

• k dispari e h dispari

$$4(2k'+1+2h'+1+1)(2k'+1-2h'-1) = 8(2k'+2h'+3)(k'+h')$$

• k pari e h dispari (analogo il viceversa)

$$4(2k'+2h'+1+1)(2k'-2h'-1) = 8(k'+h'+1)(2k'-2h'-1)$$

CD

Es15:

TEO DI ARNOT: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

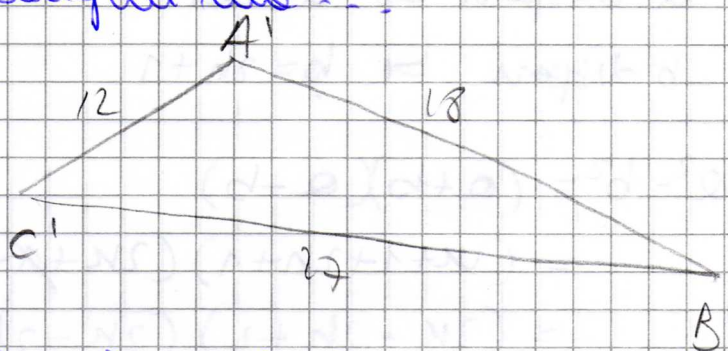
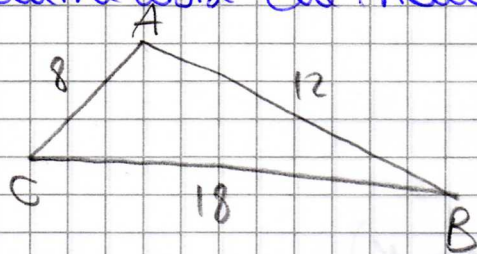
$$\Rightarrow 2bc \cos \alpha = a^2 - b^2 - c^2$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cos \alpha = 25 - 9 - 16$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{RETTANGOLO}$$

ES25:

Sembrerebbe che siano congrui ma...



Sono simili perché i lati corrispondenti sono proporzionali

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{12}{18} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

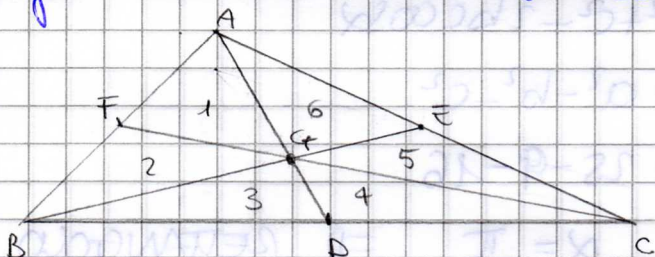
⇒ hanno i 3 angoli uguali e due lati uguali:
ma non sono uguali!

⇒ la tesi dell'esercizio è falsa!

⇒ È importante riflettere sulla similitudine.

ES26:

6 triangoli con vertice nel baricentro



un'altra proprietà del baricentro è: $\overline{AG} = 2\overline{GD}$

$$\overline{BG} = 2\overline{GE}$$

$$\overline{CG} = 2\overline{GF}$$

ⓘ Devo far vedere $\textcircled{1} = \textcircled{2} = \textcircled{3} = \textcircled{4} = \textcircled{5} = \textcircled{6}$ convergono solo x oggi

Quando $\hat{A}GB$ me... è il caso più "cattivo", per vederlo bene devo "storcere" la testa.

⇒ Quando $\hat{B}GC$ ⇒ $\boxed{\textcircled{3} = \textcircled{4}}$ perché stesse base e stesse altezze
Analogamente $\boxed{\textcircled{1} = \textcircled{2}}$ e $\boxed{\textcircled{5} = \textcircled{6}}$

Considero $\triangle ABC$

la sua area è uguale a quella di $\triangle ADC$

$$\Rightarrow ① + ② + \cancel{③} = \cancel{④} + ⑤ + ⑥ \Rightarrow 2 \cdot ① = 2 \cdot ⑤ \Rightarrow \boxed{① = ⑤}$$

Analogamente $\triangle BEC$ è equivalente a $\triangle BFA$

$$\Rightarrow \cancel{③} + \cancel{④} + ⑤ = \cancel{⑥} + ② + ① \Rightarrow 2 \cdot ③ = 2 \cdot ① \Rightarrow \boxed{① = ③}$$

$$\Rightarrow ① = ②$$

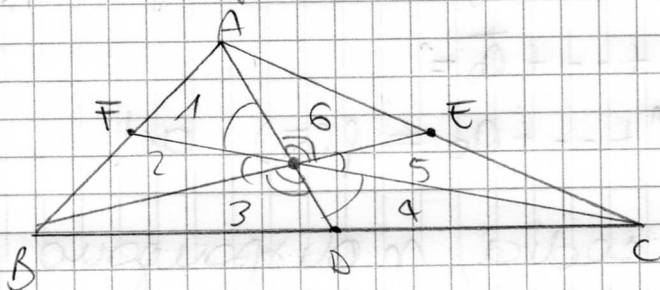
$$\stackrel{||}{⑤} = ⑥$$

N.B. $③ + ③ + ④ = ⑤ + ⑥ + ①$ ($\triangle ACF$ equivalente a $\triangle BCF$)

NON SERVIRÀ!

Tutto dipende dal fatto che D, E e F sono p.t. medi.

II)



Ripetiamo da $① = ②$

$$③ = ④$$

$$⑤ = ⑥$$

ma sfruttando le proprietà
del baricentro

$$A = \frac{1}{2} ab \sin \varphi \quad \text{e} \quad \frac{1}{6} \quad AG = 2 \cdot DG \quad FG = \frac{1}{2} CG$$

$$\Rightarrow ① = \frac{1}{2} AG \cdot FG \sin \varphi = DG \cdot FG \sin \varphi = \frac{1}{2} DG \cdot CG \sin \varphi$$

$$④ = \frac{1}{2} DG \cdot CG \sin \varphi$$

$$\Rightarrow ① = ④$$

Analogamente $② = ⑤$

$$\Rightarrow ③ = ⑥ \text{ perpendicolare}$$

N.B. Non conviene utilizzarlo, errore!

Es 33:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

n dispari $\Rightarrow f$ possiede almeno una radice reale
infatti:

$$(a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R})$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ è una radice di $f(x)$ cioè $f(\lambda) = 0$

$\Rightarrow$ ha anche $f(\bar{\lambda}) = 0$ infatti:

$$f(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow \overline{f(\lambda)} = 0 \quad (\text{OFTENSIVO})$$

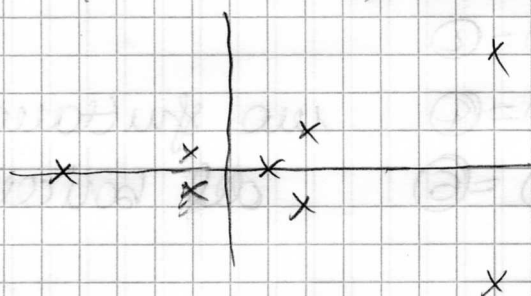
$$\Rightarrow 0 = \overline{f(\lambda)} = \overline{a_n \lambda^n + \dots + a_0}$$

$$= \overline{a_n} \overline{\lambda^n} + \dots + \overline{a_0}$$

FOOM: le coefficienti
diventa uno = $\overline{a_n} \overline{\lambda^n} + \dots + \overline{a_0} =$
SPERATA!

$$= a_n \bar{\lambda}^n + \dots + a_0 = f(\bar{\lambda}) \quad \text{OK!}$$

$\Rightarrow$ disuguale, le radici, si dispongono a coppie



$\Rightarrow$ per regioni di parità almeno una è reale!

oss: $f(x) = f(\bar{x}) = 0$ è "risolto" e sperimentato nelle equazioni di π grado

oss: una matrice reale 3×3 possiede almeno un autovettore reale

$\Rightarrow$ nello spazio c'è almeno un vettore che non cambia direzione!

ES 34:

• $\mathbb{Z}_m$ quello dei cui resto modulo m dove m non è primo!

Es: $\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

In generale in $\mathbb{Z}_m$ $m \geq 2$

$$[a]_m \cdot [b]_m \stackrel{\text{def}}{=} [ab]_m$$

$$\Rightarrow [2]_6 \cdot [3]_6 = [6]_6 = [0]_6 \quad \nabla \quad \begin{matrix} [2]_6 = 0 \\ \text{oppure} \\ [3]_6 = 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ non vale la legge di annullamento del prodotto

• Matrici di ordine 2

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \nabla \quad \begin{matrix} A \\ B \\ A \cdot B \end{matrix}$$

oss: Per le matrici non vale la proprietà commutativa e non vale la legge di annullamento del prodotto.

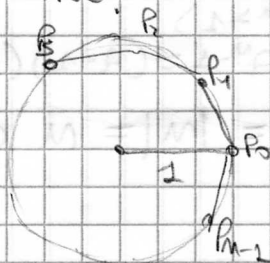
Proviamo ancora di metterci più seri possibili (cioè le cose più naturali!) Ma lo zero "mille paura"!!!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

N.B. lo zero (di cui abbiamo "paura") è una fortuna perché ci semplifica la vita!

USARE L'OCCURIO!

ES 40:



$$\prod_{i=0}^{n-1} p_i = n \quad (n \geq 3)$$

ci mettiamo nel piano complesso (ARGAND-GAUSS)

$$p_0 = 1 \rightarrow 1 + 0i$$

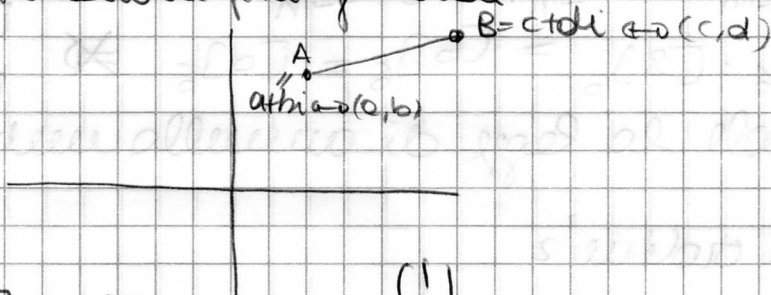
N.B. Figure approssimate, difficoltà nel descrivere una struttura

$$p_1 \rightarrow z_1 = x_1 + iy_1$$

$$p_2 \rightarrow z_2 = x_2 + iy_2$$

$$p_{m-1} \rightarrow z_{m-1} = x_{m-1} + iy_{m-1}$$

Valiamo una situazione più generale



come usuali
complessi

$$AB = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2} \stackrel{(1)}{=} |(a-c) + i(b-d)| = |A-B|$$

è facile ma alcuni studenti
imparano le formule con ed
è importante pigliare forza con
molte le banalità.

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^{m-1} |p_i| = \prod_{i=1}^{m-1} |1 - z_i| =$$

N.B. Forare con cautela da situazioni semplici o situazioni
difficili!

$$= |1 - z_1| \cdot |1 - z_2| \cdots |1 - z_{m-1}| = |(1 - z_1)(1 - z_2) \cdots (1 - z_{m-1})| =$$

$$= |(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_{m-1})| \quad \begin{matrix} z=1 \\ z=1 \end{matrix} = \left| \frac{z^m - 1}{z - 1} \right| =$$

logica come
radice di
una p

nella circonferenza unitaria
i vertici del poligono regolare
sono le radici n-esime dell'unità
($z^n = 1$)

$$\Rightarrow z^m - 1 = (z - 1)(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_{m-1})$$

$$= |z^{m-1} + z^{m-2} + \cdots + z + 1| \quad \begin{matrix} z=1 \\ z=1 \end{matrix} = |m| = m \text{ ok!}$$

$$z^{m-1} = \frac{(z-1)(z-z_1) \cdots (z-z_{m-1})}{(z-1)(z^{m-1} + z^{m-2} + \cdots + z + 1)} \quad \begin{matrix} z=1 \\ z=1 \end{matrix}$$

ALGEBRA ELEMENTARE,
problema notevole
per conoscere le radici

COSE IMPORTANTI

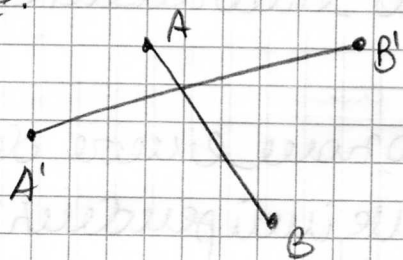
- Esprimere facilmente le distanze tra due punti nel piano di Gauss (e il modulo della differenza tra due numeri complessi).
- passaggio da $2 \cdot 3 = 6 \leadsto 3$ radici di $2x = 6$
- $z_1, \dots, z_m$ vertici del poligono regolare e radici m-esime dell'unità
 $\leadsto$ si va ad una volta esprimere di $z^m = 1$.

N.B. DIFFICOLTÀ PSICOLOGICA

$$\left| \frac{z^m - 1}{z - 1} \right|_{z=1}$$

Bisogna far "spornare" il denominatore una potenza di secondo grado del calcolo: INDETERMINAZIONE APPARENTE!

ES43:

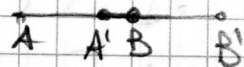


Quattro p.ti t.c. $\overline{AC} \cdot \overline{BC} = \overline{A'C} \cdot \overline{B'C}$.

Voglio far vedere che i quattro p.ti stanno sulla circonferenza.

N.B.: I segmenti si incontrano solo in un p.t.

$\Rightarrow$ i p.ti non sono allineati



Per 3 p.ti non allineati passa una e una sola circonferenza
 $\Rightarrow$ candidato naturale

$\Rightarrow$ costruiamo la circonferenza per A, A' e B.

$\Rightarrow$ dobbiamo far vedere che passa anche per B'.

Se B'' il p.to in cui $\overline{AB'}$ (e vice il prolungamento)

incrocia la circonferenza $B' = B'' \Leftrightarrow \overline{CB'} = \overline{CB''}$

$$\text{per hp } \overline{CB'} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{\overline{A'C}} = \overline{B''C}$$

+
teo dello corde

con

ES 94:

Inverso di $x = 1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$

$$x^{-1} = \alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt[3]{2} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$$

$$\begin{aligned} 1 &= (1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{2})(\alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt[3]{2}) = \alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt[3]{2} + \alpha\sqrt{2} + 2\beta + \gamma\sqrt[6]{2} + \\ &\quad + \alpha\sqrt[3]{2} + \beta\sqrt[6]{2} + \gamma\sqrt[3]{4} = \\ &= (\alpha + 2\beta) + \sqrt{2}(\alpha + \beta) + \sqrt[3]{2}(\alpha + \gamma) + \sqrt{2}\sqrt[3]{2}(\beta + \gamma) + \gamma\sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha + 2\beta = 1 \Rightarrow \beta = 1$$

$$\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta$$

$$\alpha + \gamma = 0$$

$$\beta + \gamma = 0$$

$$\gamma = 0 \leadsto \text{"Cotta" con il fatto che } \beta = 1 \text{ e } \gamma + \beta = 0$$

Il problema è che $1, \sqrt{2}$ e $\sqrt[3]{2}$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{Q}$, ma anche $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt{2}\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}$ sono linearmente indipendenti.

$\Rightarrow$ non si può scrivere come combinazione lineare degli altri. Forziamo volere che sono linearmente indipendenti:

$$\text{cioè che } a_1 + a_2\sqrt{2} + a_3\sqrt[3]{2} + a_4\sqrt{2}\sqrt[3]{2} + a_5\sqrt[3]{4} = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$$

altri modi: • 1 l.i. su $\mathbb{Q}$ (perché $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} = 1$)

• $1, \sqrt{2}$ l.i. in $\mathbb{Q}$ perché $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} = \langle 1 \rangle$

($v_1, \dots, v_k \in V$ sono l.i. v_1 l.i.)

$$v_2 \notin \langle v_1 \rangle$$

$$v_3 \notin \langle v_1, v_2 \rangle$$

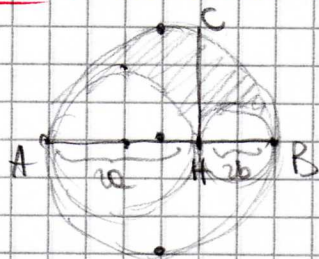
$$\vdots$$

• $1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}$ l.i. perché $\sqrt[3]{2} \notin \langle 1, \sqrt{2} \rangle$ infatti

$$\text{se per assurdo } \sqrt[3]{2} = a + b\sqrt{2} \quad a, b \in \mathbb{Q}$$

$$\dots \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \text{ assurdo.}$$

ES 49: COLTELLINO DEL CALCOLO (ARCHIMEDE)



$A(III) \hat{=}$ Area del cerchio di diametro $\overline{CH}$

$$A(III) = \frac{\pi(a+b)^2}{2} - \frac{\pi a^2}{2} - \frac{\pi b^2}{2} = \frac{\pi}{2} (\cancel{a^2} + \cancel{b^2} + 2ab - \cancel{a^2} - \cancel{b^2}) = \pi ab$$

Resta da calcolare $\overline{CH}$: (dove viene $2\sqrt{ab}$)

$\triangle ACB$ rettangolo + II teo di EUCLIDE

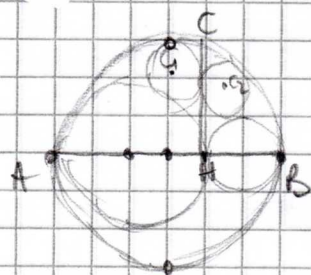
(in relazione all'ipotenusa, quello più grande le proiezioni dei cateti)

$$\Rightarrow AH : CH = CH : HB$$

$$\Rightarrow \overline{CH}^2 = 4ab$$

$$\Rightarrow \overline{CH} = 2\sqrt{ab}$$

QED



$$A_{G1} = A_{G2}$$