

ES2: QUADRATI MAGICI

$$S = 3e$$

$$\begin{cases} a+b+c=S \\ d+e+f=S \\ g+h+i=S \\ \vdots \end{cases}$$

8 relazioni

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Cominciamo con l'osservare che c'è un eccesso di informazioni!
 $\Rightarrow$ non ci conviene partire da tutte.

N.B. Conviene selezionare le informazioni più importanti.

$\Rightarrow$ scegli le relazioni in cui compare le

$\Rightarrow$ sono 4 relazioni

$$\begin{cases} \overset{S}{a} + e + \overset{S}{i} = S \\ d + e + f = S \\ g + e + c = S \\ b + e + h = S \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underset{\times}{a} + \underset{\circ}{e} + \underset{\times}{i} + \underset{\circ}{d} + \underset{\times}{e} + \underset{\circ}{f} + \underset{\times}{g} + \underset{\circ}{e} + \underset{\circ}{c} = 3S$$

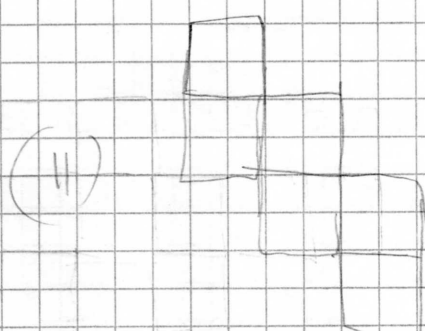
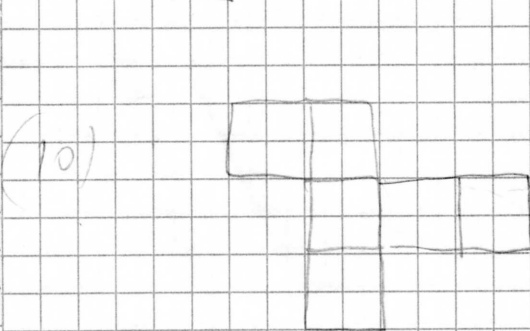
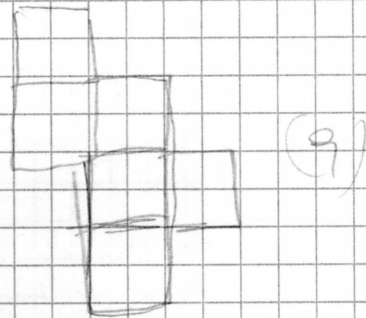
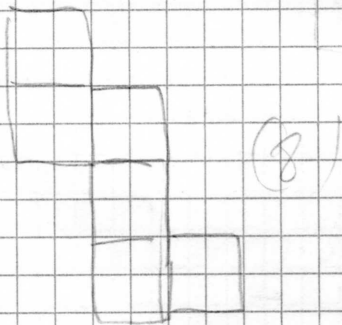
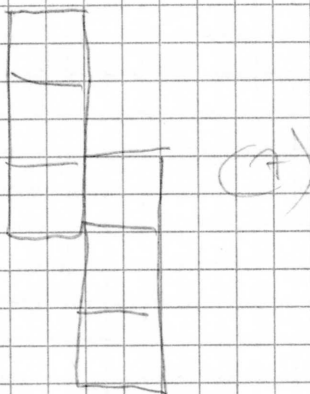
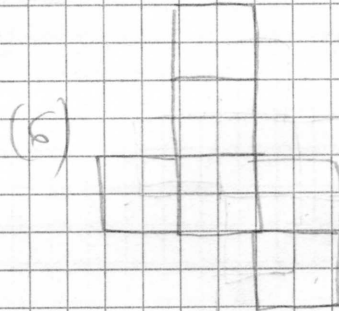
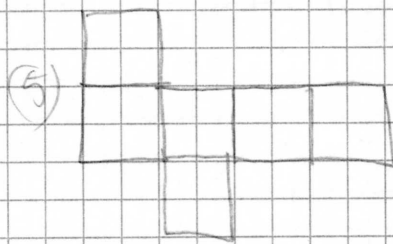
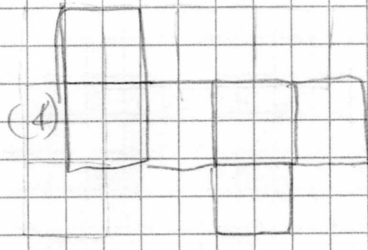
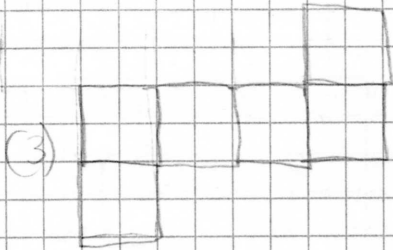
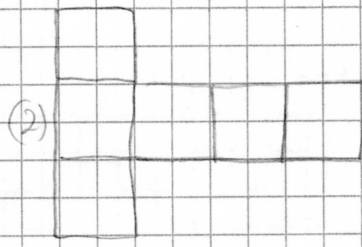
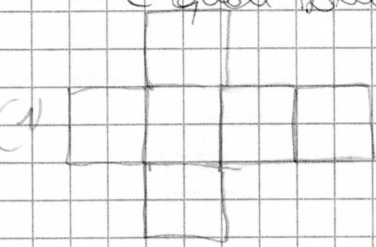
$$\Rightarrow S + 3e + S = 3S \Rightarrow S = 3e$$

$\Rightarrow$ le quante neanche due!

$\Rightarrow$ in tot ho usato 5 informazioni!

Es 3; Quanti sono gli sviluppi piani distinti di un cubo? (11)

E quali sono?



Es 5: 883 è primo?

DIVISIBILITÀ: doe?

↳ bisogna dire in quale ambiente $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \dots)$
le def di primo cambia.

CRIVELLO DI ERATOSTENE

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

$$\sqrt{883} = 29, \dots$$

considero tutti i numeri primi ≤ 29 e vedo se è divisibile
per qualcuno di questi

(Non sembra collegato al crivello)

Perché mi fermo a $\sqrt{883}$?

Il crivello di Eratostene per 883 è troppo lungo!

Basta limitarsi a considerare i primi $p \leq \sqrt{m}$ infatti:

$$n = a \cdot b \quad 1 < a \leq b < n \Rightarrow a^2 \leq n \Rightarrow a \leq \sqrt{n} \quad a = \frac{n}{b}$$

chiarissimo il TONO D'OMBRA con il TRATTAMENTO:

$$m = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k} \quad \text{e appross } p_1 < p_2 < \dots < p_k$$

Se m non fosse primo

$$\Rightarrow m \geq p_1^2 \Rightarrow p_1 \leq \sqrt{m}$$

$$m = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$$

oppure

$$m = p_1^{e_1} \quad (e_1 > 1)$$

$$m = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k}$$

Quindi $29 < \sqrt{883} < 30$

$\Rightarrow$ basta verificare per $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$

$\Rightarrow$ è primo!

ES7: $\sqrt{2}$ non è razionale

PER ASSURDO:

Suppongo per assurdo che $\exists$ un numero razionale positivo $c > 0$
t.c. $c^2 = 2$ (anche se $c < 0$ comunque $c^2 = 2$)

$$c \in \mathbb{Q} \Rightarrow c = \frac{m}{n} \text{ con } m, n \in \mathbb{N} \quad (m, n \geq 1)$$

$$c^2 = 2 \Rightarrow \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2$$

Come scelgo m e n ? PER CONDOTTA scelgo m e n coprimi!

$$\text{MCD}(m, n) = 1.$$

$$(\text{infatti } \frac{78}{24} = \frac{39}{12} = \frac{13}{4}, 13 \text{ e } 4 \text{ sono coprimi})$$

Discuto la relazione $m^2 = 2n^2$:

$$2n^2 \text{ è pari} \Rightarrow m^2 = 2n^2 \text{ è pari} \Rightarrow \underline{m \text{ è pari}} \Rightarrow m = 2k$$

$$\Rightarrow (2k)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2 \Rightarrow \underline{n \text{ è pari}}$$

$\Rightarrow$ CONTRADDIZIONE perché avevo supposto che $\text{MCD}(m, n) = 1$.

oss: $\sqrt{3}$ è un numero razionale?

Posso adattare la dimostrazione ora al nuovo caso?

$$c = \frac{m}{n} \quad c^2 = 3 \quad \frac{m^2}{n^2} = 3 \Rightarrow m^2 = 3n^2$$

$$3n^2 \text{ è divisibile per } 3 \Rightarrow m^2 = 3n^2 \text{ è divisibile per } 3$$

$$\Rightarrow \underline{m \text{ è divisibile per } 3}$$

$$\hookrightarrow m^2 = 9k^2 \Rightarrow m = 3s$$

Se per assurdo m non è divisibile per 3

$$\Rightarrow m = 3t + 1 \text{ oppure } m = 3t + 2 \quad (\text{occhio all'opposto!})$$

$$m^2 = (3t+1)^2 = 9t^2 + 1 + 6t \text{ non è divisibile per } 3$$

$$m^2 = (3t+2)^2 = 9t^2 + 4 + 12t \text{ non è divisibile per } 3$$

ATTENZIONE: la divisibilità la considerate in $\mathbb{N}$ o in $\mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow m = 3k \Rightarrow (3k)^2 = 3n^2 \Rightarrow 9k^2 = 3n^2 \Rightarrow 3k^2 = n^2$$

$$\Rightarrow n^2 \text{ è divisibile per } 3 \Rightarrow \underline{n \text{ è divisibile per } 3}$$

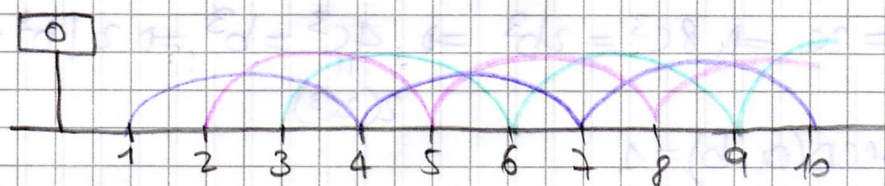
$\Rightarrow$ CONTRADDIZIONE a $\text{MCD}(m, n) = 1$.

$\Rightarrow \sqrt{3}$ non è razionale

=> DIMOSTRAZIONE PING-PONG

Ho utilizzato che ogni numero naturale a $\begin{cases} 3t \\ 3t+1 \\ 3t+2 \end{cases}$

Geometricamente:



N.B.: Teorema della divisione con resto in $\mathbb{N}$ (e in $\mathbb{Z}$) (EUCLIDE)

=> il resto della divisione per 3 $0 \in 0 \in 1 \in 2$!

Così posso dire per $\sqrt{5}$?

$$a = \begin{cases} 5t \\ 5t+1 \\ 5t+2 \\ 5t+3 \\ 5t+4 \end{cases}$$

È un problema applicare la dimostrazione a ping-pong nel caso in cui il n° sotto radice comincia a crescere

OSS! Quello che conta è avere sotto radice un numero PRIMO

PARI - DISPARI



È il pto di partenza per la generalizzazione

$$\sqrt{p} \notin \mathbb{Q} \quad \forall \text{ numero primo } p$$

DIM.: se $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$ (N.B.: a e b sono universali per i numeri naturali)

$$\Rightarrow p = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = pb^2 \Rightarrow p \mid a^2 \Rightarrow p \mid a \Rightarrow a = pc$$

$$\Rightarrow p^2 c^2 = pb^2 \Rightarrow pc^2 = b^2 \Rightarrow p \mid b^2 \Rightarrow p \mid b \quad \text{però } \text{MCD}(a, b) = 1$$

N.B. $p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ e/o $p \mid b$

CONTROESEMPLO x e non è primo:

$$6 \mid 3 \cdot 4 \quad \text{ma } 6 \nmid 3 \text{ e } 6 \nmid 4$$

N.B. Quando si enuncia una proprietà dare sempre esempi e

contraddizioni più di quando non vale: per fissare le idee!

• $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$

per assurdo $\sqrt[3]{2} = \frac{a}{b}$ $a, b \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow a^3 = 2b^3$
 $\text{HCD}(a, b) = 1$

$$\Rightarrow 2|a \Rightarrow a = 2c \Rightarrow 8c^3 = 2b^3 \Rightarrow 4c^3 = b^3 \Rightarrow 2|b^3 \Rightarrow 2|b$$

$2(2c^3)$

$\Rightarrow$ assurdo $\text{HCD}(a, b) = 1$

• $\sqrt[p]{p} \notin \mathbb{Q} \quad \forall p$ primo

(ALTRO MODO)

per assurdo $\sqrt[p]{p} = \frac{a}{b}$ $a, b \in \mathbb{N}$

$a^p = p b^p$ assurdo per il teo fondamentale dell'aritmetica

$$a = p^{z_1} p_2^{z_2} p_3^{z_3} \dots p_n^{z_n} \quad z \geq 0$$

$$b = p^{z_1} p_2^{z_2} p_3^{z_3} \dots p_n^{z_n} \quad \Delta \geq 0$$

$$\Rightarrow p^{3z_1} \dots = p^{3z_{n+1}} \dots$$

assurdo per l'unicità della fattorizzazione

Pb: Possiamo estendere ancora questo risultato? Sì!

$\sqrt[m]{p} \notin \mathbb{Q} \quad \forall p$ primo $\forall m \in \mathbb{N} \quad m > 1$

ovvero sempre una contraddizione con $a^m = p b^m$
 $p^{mz_1} \dots = p^{mz_{n+1}} \dots$

N.B. Si parte da una cosa semplice e poi si estende il discorso per stimolare i ragazzi!

PAUSA DI RIFLESSIONE! $p|ab \Rightarrow p|a$ e/o $p|b$

è una conseguenza del TFA ma vale anche il viceversa (COURANT + ROBBINS)

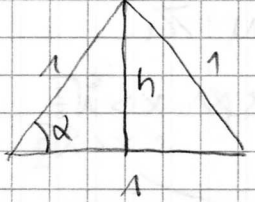
• Cosa succede se prendiamo le radici di un prodotto di numeri primi? Es $\sqrt{6}$?

$\sqrt{pq} \notin \mathbb{Q} \quad p, q$ primi $p \neq q$

$$\sqrt{6} = \frac{a}{b} \Rightarrow 6 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 6b^2 = a^2 \Rightarrow 3 \cdot 2b^2 = a^2 \Rightarrow$$

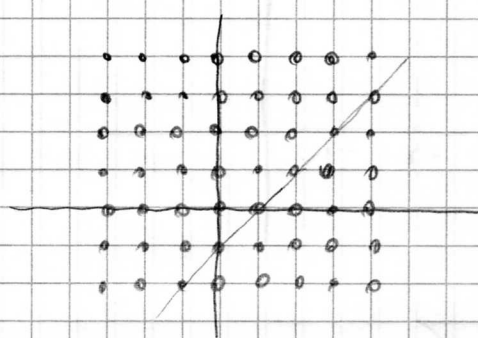
per il TFA
 $pq \cdot q^{z_1} p^{z_2} p_2^{z_3} \dots p_n^{z_n} = q^{t_1} p^{t_2} q_1^{t_3} \dots q_k^{t_n} \Rightarrow p^{z_1+z_2} q^{z_1+z_3} \dots = q^{t_1+t_3} \dots$

ESM:



h irrazionale $\Rightarrow$ anche α è irrazionale

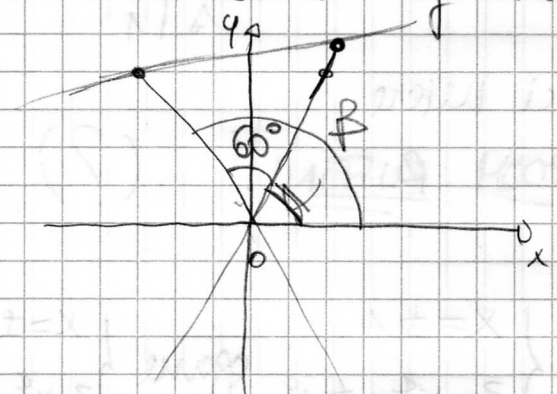
$$\alpha = \frac{\pi}{3} \quad \tan \alpha = \sqrt{3}$$



col la carta quadrata per vedere
tutti i p.h. e coordinate intere
e costruire un vettore che passi per
dei p.h. e coordinate intere.

Una retta ha coeff. razionale $\Leftrightarrow$ passa almeno per un p.h.
a coordinate intere

Per costruire una retta che non passi per p.h. e coordinate
interi (che passi per l'origine) scegli una retta α tg
irrazionale. tg di α è il rapporto $\frac{y}{x}$



tg α è irrazionale
tg $\beta = \tan(\alpha + 60^\circ)$ è razionale
 $\Rightarrow \tan(\beta - \alpha) \in \mathbb{Q}$

Sappiamo per assurdo che $\exists$ un triangolo equilatero che
abbia i vertici nei "nod" ossia a coordinate intere.

Trovo il triangolo in modo che abbia un vertice nell'origi
in ogni caso le coordinate degli altri due vertici restano
interi.

Per il teo di Pick (corollario) l'area delle esche dei
multiplo intero di $\frac{1}{2}$

$$A = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} - \frac{a_k}{2} \quad a_k \in \mathbb{N}$$

dist. tra 2 nodi
 $= 0$ se 2 p.h. e coordinate
interi
 $\Rightarrow (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$
 l^2 intero

$\Rightarrow \sqrt{3}$ è irrazionale $\Rightarrow \nexists$

ES9: $x^5 - 3x + 11 = 0$ Dire che non ha radici in $\mathbb{Z}_4$.

I) $f(x) = x^5 - 3x + 11$

$f(-2) = -15$

$f(-1) = 13$

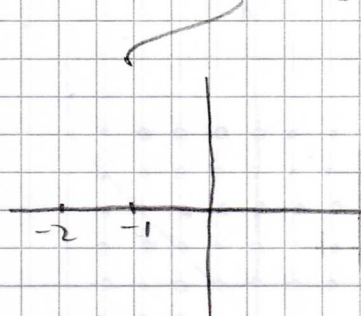
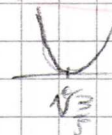
$x > -1 \Rightarrow f(x) > 0 \quad (f(x) > 13)$

$x < -2 \Rightarrow f(x) < 0 \quad (f(x) < -15)$

$5x^4 - 3$

Studio $f'(x)$

$f(x)$ crescente per $x > \sqrt[5]{\frac{3}{5}}$
e $x < \sqrt[5]{\frac{3}{5}}$



N.B. Non è detto che abbia un solo zero reale, possiamo dire che gli unici zeri reali stanno in $(-2, -1)$

$\Rightarrow$ no! zeri interi.

II) Le possibili radici razionali sono $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ t.c. $q \mid 11$

$\Delta \mid 1$

$f(1) \neq 0 \neq f(-1)$

$f(11) \neq 0 \neq f(-11)$

$\Rightarrow$ no radici intere

2004: RUFFINI!! (?)

III) $x^5 - 3x = -11$

$x(3 - x^4) = 11$

radici in $\mathbb{Z}_4 \Leftrightarrow$

$x = \pm 1$

$3 - x^4 = \pm 11$

oppure $\begin{cases} x = \pm 11 \\ 3 - x^4 = \pm 1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ no! $x = 1 \Rightarrow 3 - x^4 = 2$ no

$x = -1 \Rightarrow 3 - x^4 = 2$ no

$x = 11 \Rightarrow --$

$x = -11 \Rightarrow --$

IV) Se 7 o è pari o è dispari,

si vede che non può essere né pari né dispari

$(2k)^5 - 3(2k) + 11 = 32k^5 - 6k + 11$

(?)

II) È stato continuato RUFFINI

$$f(x) \Rightarrow (x-\alpha) \mid f(x)$$

ma ... NON CI AIUTA!

$x^5 - 3x + 11$ ha 5 radici per il TF di Ruffini

$\Rightarrow$ si scrivono (è monico!)

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)(x-\alpha_5) = x^5 + \dots - \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5$$

grazie al teo di Ruffini!

$$\Rightarrow -\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 = 11$$

ipponiamo per ognuno $\alpha_i \in \mathbb{Z}_m$

$$\Rightarrow -m\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 = 11$$

OCCHIO: non possiamo dire niente perché $m \neq 1, 11$

$$\Rightarrow m \nmid 11$$

ma tra gli interi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{Z}$!!

$\Rightarrow$ dobbiamo usare la def di radice:

$$\text{Sostituendo: } m^5 - 3m + 11 = 0$$

$$\Rightarrow m^5 - 3m = -11$$

$$\Rightarrow m(m^4 - 3) = -11$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \mathbb{Z}_1 & \mathbb{Z}_1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \text{un intero che divide } -11 \Rightarrow m = \pm 1 \text{ o } \pm 11$$

$$0 = 44 - 44 = 4 - 4 + 4 - 4$$

$$1 = \frac{44}{44}$$

$$2 = \frac{4}{4} + \frac{4}{4} = \frac{4 \times 4}{4 + 4}$$

$$3 = \frac{4 \times 4 - 4}{4}$$

N.B. $4 \times 4 - 4 = (4 \times 4) - 4$
 $\neq 4 \times (4 - 4)$

non è una REGOLA

è una CONVENZIONE,

fatta per comodità!

È bello così ovunque che si annida
 l'odio per la matematica!

$$4 = (4 - 4) \times 4 + 4$$

$$5 = \frac{4 \times 4 + 4}{4}$$

$$6 = \frac{4 + 4}{4} + 4$$

$$7 = (4 + 4) - \frac{4}{4}$$

$$8 = 4 + 4 + 4 - 4$$

$$9 = (4 + 4) + \frac{4}{4}$$

Questo può anche essere visto come un modo per notare
 la differenza tra $\rightarrow$ e $\leftarrow$ unicate!

$$10 =$$

$$11 =$$

$$12 = \left(4 - \frac{4}{4}\right) \times 4$$

$$13 =$$

$$14 =$$

$$15 = 4 \times 4 - \frac{4}{4}$$