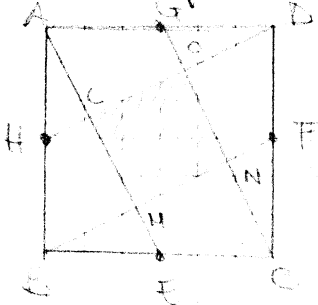


11) È possibile disegnare su un foglio di carta quadrettata un triangolo equilatero avente come vertici i nodi delle carte quadrettate?

12)  $AD=1$

Calcolare l'area del quadrilatero MNNO.

13) PROBLEMA DI JOHAT-

Se $f: N \rightarrow N$

$$n \mapsto f(n) = \begin{cases} 3n+1 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

Es: $n=3 \rightarrow 3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

$n=7 \rightarrow 7 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

Da qualunque numero si parte si arriva ad 1!

(PRAPERTO, non c'è una dim!)

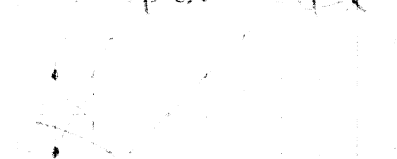
Così succede se $n=29$.

14) Dimostrare che se a e b sono due numeri naturali dispari allora $a^2 - b^2$ è divisibile per 8.

15) È vero che un triangolo avente i lati di lunghezza 3, 4 e 5 (rispetto ad una data unità di misura) è rettangolo?

16) Quante sono le radici reali dell'equazione $\sqrt{x+1} + x = 0$?

17) Decomporre in fattori irriducibili e coefficienti reali, i seguenti polinomi $x^4 - 5x^2 + 6$, $x^3 + 2$, $x^4 + x^2 + 1$.

18)  Calcolare $a + f + r$.

19) Stabilire la l'operazione

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z},$$

così definita: $f(x, y) = x + y \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}$

è iniettiva e suriettiva

20) Dimostrare che $\forall m \in \mathbb{N}$,

il numero $m(m+1)(2m+1)$ è divisibile per 6.

21) Risolvere l'equazione in x, y .

$$(x+y)(y-3) = 0 \quad (\mathbb{Z}^2)$$

e descrivere geometricamente le soluzioni.

22) È vero che l'unico triangolo rettangolo avente i lati di lunghezza $a, a+1, a+2$ $a \in \mathbb{R}$ è il triangolo di lati $3, 4, 5$.

23) Disporre in ordine crescente i numeri reali

$$a = 3^{\frac{1}{4}}, \quad b = 1^{\frac{1}{2}}, \quad c = 1^{\frac{1}{4}}$$

24) Dati nel piano tre p.n. a, b e c non allineati, quanti sono i rettangoli aventi a, b e c tra i lati?

25) È vero che, se due triangoli hanno due lati uguali e i tre angoli uguali allora risultano congruenti?

26) Dividendo un triangolo in 6 triangolini con vertice nel baricentro (tracciando le mediane) dire che hanno tutti o due a due stessa area.

27) Calcolare il MCD (2001, 1948)

28) Determinare i punti a coordinate intere appartenenti alla retta di equazione $1x + \frac{\sqrt{3}}{3}y = \sqrt{3}$

29) Dire che $\forall$ intero $n > 1$ la somma delle radici complesse n -esime dell'unità è uguale a zero. ($x^n = 1$)

30) Si consideri in $\mathbb{N}$ la relazione $\sim$ non definita:

$$a \sim b \iff \exists u \in \mathbb{N} \quad a \cdot b = u^2 \quad u \in \mathbb{N} \quad (a, b \in \mathbb{N}) \quad \text{Esercizio 49/50}$$

31) Calcolare le radici del polinomio

$$x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x - 2$$

32) Quadrato di lato 1.

Come possiamo ottenere un quadrato di area triple?

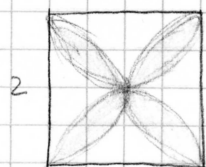
33) Dimostrare che ogni polinomio $P(x)$ a coefficienti reali di grado dispari possiede almeno una radice reale.

34) Trovare dei con per cui non vale la legge di annullamento del prodotto! $\mathbb{Z}_{16}, \mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$

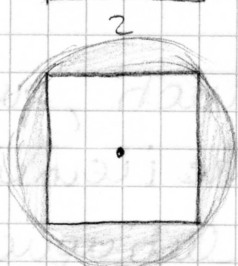
$$\downarrow 2 \cdot 2 = 4 = 0$$

35) Richi in una matrice quadrata le diagonali di sx e dx si chiama principale e l'altra secondaria?

36)

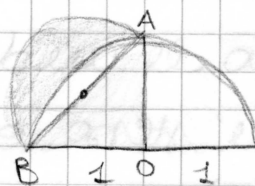


$$A_9 = 2\pi - 4$$



$$A_9 = ?$$

37) Dato una semicirconferenza di raggio 1:



$$A = ?$$

$A_9 = ? \rightarrow$ area del semicerchio di diametro AB al di fuori del primo semicerchio

38) Dimostrare il teorema di Pitagora e l'inverso del teorema di Pitagora ($a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow \triangle ABC$ rettangolo).

39) Far vedere che il lato del triangolo inscritto nella circonferenza unitaria $\sqrt{3}$ si trova using le coordinate cartesiane e i numeri complessi.

40) Verificare che dato un poligono regolare di n lati (usi $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ inscritto in una circonferenza di raggio 1 si ha $\overline{P_0 P_1} \cdot \overline{P_0 P_2} \cdot \overline{P_0 P_3} \cdot \dots \cdot \overline{P_0 P_{n-1}} = n$ (per caso $n=6$)

41) Verificare che $\forall A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ si ha $P_A(A) = 0$.

42) Verificare che $\forall A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ invertibile si ha $A^{-1} = \alpha A + \beta I$.

43) È vero il viceversa del teorema delle due corde?

ovv è vero che se A, B, A', B' sono quattro p.h. del piano

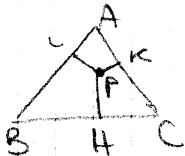
t.c. 1) $\overline{AB}, \overline{A'B'}$ si incontrano in un p.to c

$$2) \overline{AC} \cdot \overline{BC} = \overline{A'C} \cdot \overline{B'C}$$

allora i quattro punti appartengono ad una s.t.e. o a una circonferenza?

44) Calcolare l'inverso del numero reale $x = 1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ (nelle forme $x + y\sqrt{2} + z\sqrt[3]{2}$)

45) Dimostrare che dato un triangolo equilatero di lato l e fissato arbitrariamente p all'interno del triangolo si ha $\overline{PH} + \overline{PK} + \overline{PL} = \text{costante}$ e calcolare questa costante.



46) Dimostrare che per 3 p.h. non allineati del piano passa una e una sola circonferenza.

47) (ESN17 $\frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$)

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 2^2$$

$$1+3+5 = 3^2$$

$$1+3+5+7 = 4^2$$

⋮

$$\frac{1}{3}$$

$$\frac{1+3}{5+7} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{1}{3}$$

(fatto parte da quella sopra)

o	x	o
x	x	o
o	o	o

48) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ...

$$1 = 1^3$$

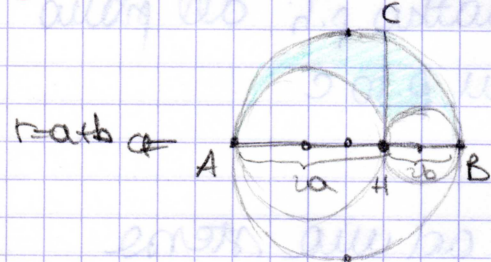
$$3+5 = 2^3$$

$$7+9+11 = 3^3$$

$$13+15+17+19 = 4^3$$

⋮

49) COSELU DEL CALCOLO (ARCHIMEDE)



Verificare che $A = A$ cerchio di diametro CH

50) Dimostrare che finiti arbitrariamente s.p.h. all'interno di un Δ equilatero di lato 1, esistono almeno due di essi la cui distanza $\leq \frac{1}{2}$.

51) Possiamo definire in $\mathbb{Z}_4$ un nuovo ordinamento ρ in modo che $(\mathbb{Z}_4, \rho)$ sia un insieme bene ordinato?

52) Verificare che $\forall a, b \in \mathbb{R}$ con $(a, b) \neq (0, 0)$ si ha $a^2 + b^2 + ab > c$

53) $Q = \{\text{quadrati magici } 3 \times 3\}$
 $\mathbb{R}^3$

Cercare un isomorfismo tra Q e $\mathbb{R}^3$

$$Q \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \mapsto (a, b, c)$$

54) È possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra tutto Q e $\mathbb{N}$?

55) calcolare l'inverso di $z = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}i$ nelle forme $a + bi + ci$

ES 1:

2) $\forall m \geq 1$ intero $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{m(m+1)} = \frac{m}{m+1}$

I PER INDUZIONE $\forall m \geq 1$

N.B. INDUZIONE MATEMATICA $\neq$ INDUZIONE nelle scienze sperimentali

$m=1 \quad \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} \quad \text{OK}$

Supponiamo vero la relazione per m e dimostriamola per $m+1$

~~$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(m+1)(m+2)} =$~~

È DIDATTICAMENTE SBAGLIATA

perché omettiamo la parte più importante
che serve per "spuntare" l'unica cosa
che sappiamo, cioè che vale per m .

$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} = \frac{m}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} = \dots = \frac{m+1}{m+2} \quad \text{OK}$

II Termine generico $\frac{1}{r(r+1)} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}$ infatti $\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1} = \frac{r+1-r}{r(r+1)} = \frac{1}{r(r+1)}$

$\Rightarrow \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{m(m+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots +$
 $+ \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) =$

Tolgo le parentesi:

$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} + \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} =$

$= \frac{1}{1} - \frac{1}{m+1} = \frac{m+1-1}{m+1} = \frac{m}{m+1} \quad \text{OK!}$

Ho sfruttato la PROPRIETÀ ASSOCIATIVA $((a+b)+c=a+(b+c))$

sono partite dalla proprietà associativa riferita a 3 addendi, al caso generale di n addendi!

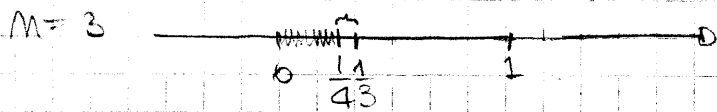
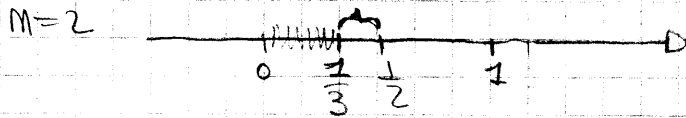
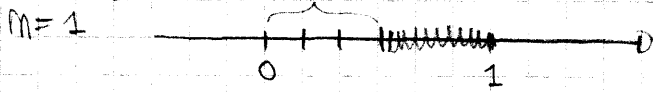
Quando tolgo le parentesi posso in modo diverso
 $\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \dots$

Quel significato geometrico possiamo dare ad ogni addizione (somma n)

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \dots$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3} = \dots$$

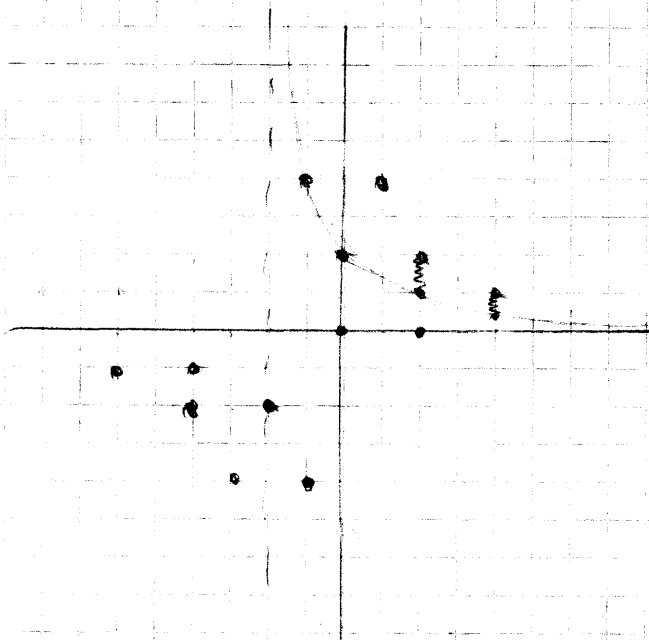
• lunghezza di un intervallo?



• possiamo anche vederlo nel piano:

consideriamo le iperboli $C_1: y = \frac{1}{x}$

$$C_2: y = \frac{1}{x+1}$$



Se li vedo in orizzontale, ora li vedo in verticale come differenza di ordinate

$\Rightarrow$ è più facile fare la somma

$$b) 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + m^3 = (1 + 2 + \dots + m)^2$$

I per induzione su $m \geq 1$

$$m=1 \quad 1^3 = 1^2 \quad \text{OK}$$

VERA per $m-1$.

$$\underbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (m-1)^3}_{\overset{||}{a^2}} + m^3 = \underbrace{(1 + 2 + 3 + \dots + m-1 + m)}_{a^2}^2$$

$$\cancel{a^2} + m^3 = \cancel{a^2} + m^2 + 2am$$

$$m^3 = m^2 + 2(1+2+\dots+m-1)m$$

$$m^3 = m^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)(n) \cdot m = \cancel{m^2} + m^3 - \cancel{m} \quad \text{OK!}$$

II (usando la tavola pitagorica)

Usiamo quella per 10 ...

... quando si ha una nuova idea non bisogna per forza partire dal caso generale:

⇒ VALORIZZARE I CASI PARTICOLARI! per trasmettere l'idea

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	...	...	...	20
3	6	9	12	15	18	...	...	...	30
4	8	12	16	20	24	...	...	...	40
5	10	15	20	25	30	...	...	...	50
6	12	18	24	30	...	...	...	...	:
7	...	...	...	...	...	...	...	...	:
:	...	...	...	...	...	...	...	...	:
10	20	30	40	50	60	...	...	...	100

Dimostriamo prima la proprietà per $n=10$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = (1 + 2 + \dots + 10)^2$$

Nella tavola abbiamo 100 numeri, facciamo la somma:

- PER RIGHE

$$\begin{aligned} & (1+2+\dots+10) + (2+4+6+\dots+20) + \dots + (10+20+\dots+100) = \\ & = (1+2+\dots+10) + 2(1+2+\dots+10) + 3(1+2+\dots+10) + \dots + 10(1+2+\dots+10) = \\ & = (1+2+\dots+10)(1+2+\dots+10) = \boxed{(1+2+\dots+10)^2} \end{aligned}$$

N.B. si vede quanto è utile mettere in evidenza!

- PER "ANGOLI"

$$\boxed{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3}$$

OK per $n=10$

Dobbiamo pensare alla dila generale, basta sostituire n a 10

~~10~~ n

~~20~~ $2n$

$\vdots$

~~100~~ n^2

~~10~~ n ~~20~~ $2n$

2004: vediamo al posto k cosa succede al k -esimo "angolo"

$$k(1+2+\dots+k) + k(1+2+\dots+(k-1)) = \dots = k^3$$

N.B. Partendo dai casi particolari, con concretezza in vista ed affrontando il caso generico, si può controllare il processo.